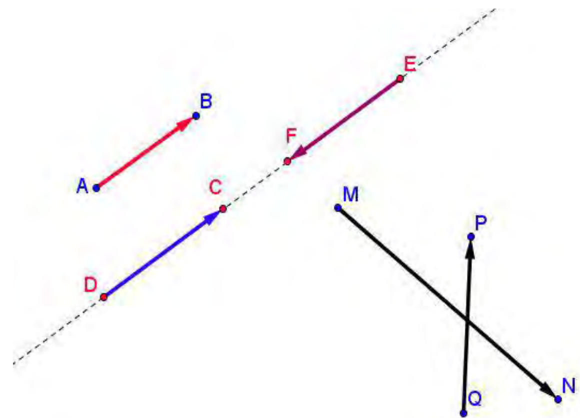
Chương 1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG OXY

CHỦ ĐỀ 1.1:

VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

1. Định nghĩa:véctơ là một đoạn thẳng có định hướng

- Hai vectơ bằng nhau: có cùng hướng và cùng độ dài.
- Hai vectơ đối nhau: ngược hướng và cùng độ dài.



2. Các phép toán của vectơ:

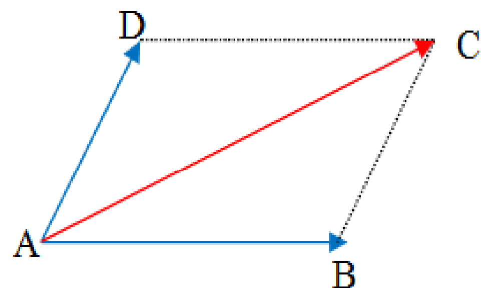
***a.* Phép cộng vectơ:**

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Ta có $\forall A,B,C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ***(quy tắc chèn điểm)***

☞ *Nếu ABCD là hình bình hành thì :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

***b.* Phép trừ vectơ:** $\forall O,A,B$: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$



***c.* Tích một số thực với một vectơ:**

- $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b};\left(m+n\right)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$
- $m\left(n\vec{a}\right)=\left(mn\right)\vec{a};1.\vec{a}=\vec{a};-1\vec{a}=-\vec{a}$

Điều kiện: $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b}$

$\Leftrightarrow \exists k\in R:\vec{b}=k\vec{a}$ *với*

***d.* Tích vô hướng:** $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

e.* Vectơ đồng phẳng:3 vectơ đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.*

$$\vec{a},\vec{b},\vec{x} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \exists h,k \in R: \vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$$

***f.* Phân tích một vectơ theo một vectơ không đồng phẳng:**

Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng và vectơ $\vec{e}$, có duy nhất 3 số thực x_1, x_2, x_3:

$$\vec{e} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{c}$$

***g.* Định lý:**

Với M là trung điểm AB và G là trọng tâm của ΔABC, O tùy ý thì:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \end{cases}$$

Và G là trọng tâm tứ giác, tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

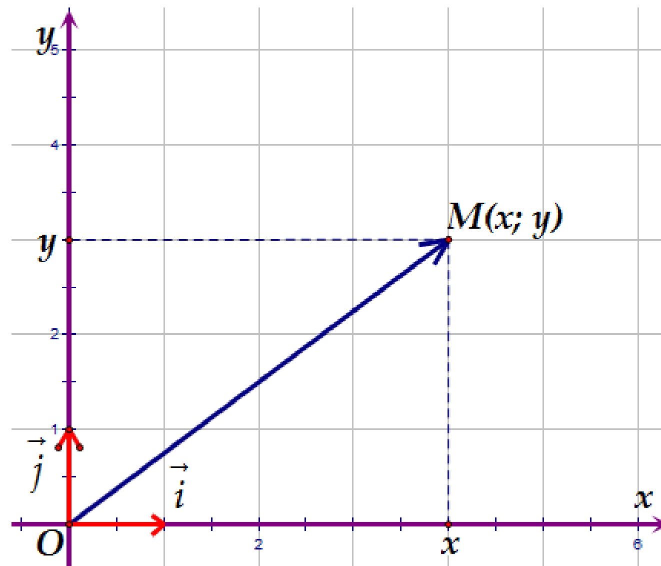
■ *CHỦ ĐỀ 1.2:*

HỆ TỌA ĐỘ – TỌA ĐỘ VÉCTƠ – TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Định nghĩa:

a. Hệ tọa độ:

Hai trục tọa độ x'Ox, y'Oy vuông góc nhau tạo nên hệ trục tọa độ Đề–các Oxy: O là gốc tọa độ, x'Ox là trục hoành và y'Oy là trục tung. Trong đó: $\vec{i} = (1;0),\ \vec{j} = (0;1)$ *là các vec tơ đơn vị trên các trục. Ta có:* $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ *và* $\vec{i}.\vec{j} = 0.$



b. Tọa độ của vectơ: $\vec{u} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

c. Tọa độ của điểm: $\overrightarrow{OM}=(x;y)\Leftrightarrow M=(x;y).$ *Trong đó x là hoành độ, y là tung độ của M.*

2. Các kết quả và tính chất:

Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ *và các vectơ* $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$. *Ta có :*

● $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2).$

● *Tích giữa một véctơ với một số thực:* $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2),\ k\in\mathbb{R}$.

● *Tích vô hướng giữa hai véctơ:* $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$

Hệ quả: $*\ |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$

$$*\ \cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

$$*\ \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0.$$

● *Hai véctơ bằng nhau:* $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}$

● $\vec{a},\vec{b}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{R}:\vec{b}=k.\vec{a}\Leftrightarrow\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}\\ \begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=0.\end{array}\right.$

● *Tọa độ của vec tơ* $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A).$

● *Khoảng cách:* $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$

● *Điểm M chia AB theo tỉ số k (k khác 1)* $\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}$. *Khi đó, tọa độ của M tính bởi:*

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A-k.x_B}{l-k}\\ y_M=\dfrac{y_A-k.y_B}{l-k}\end{cases}$$

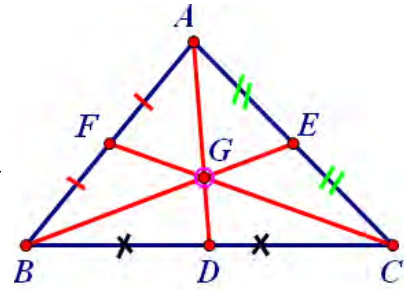
Nếu M là trung điểm của AB, ta có: $\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}.$

3. Kiến thức về tam giác:

Cho $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B),\ C(x_C;y_C).$

a. Trọng tâm của tam giác (giao các đường trung tuyến) :

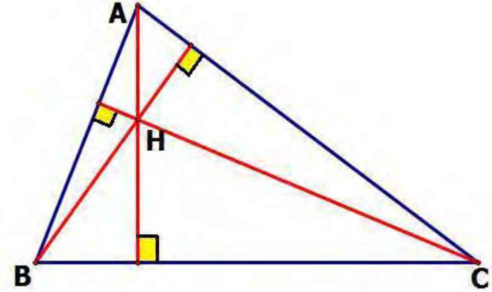
G là trọng tâm tam giác ABC : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$



b.Trực tâm của tam giác (giao các đường cao):

H là trực tâm của tam giác

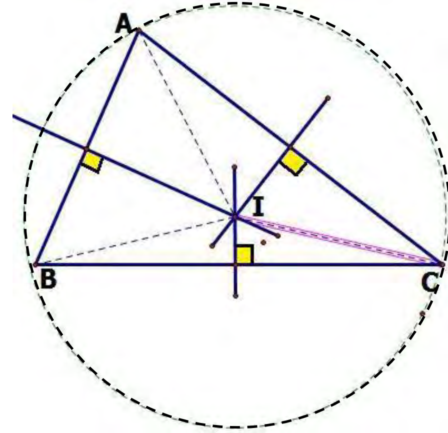
$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$



c. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (giao của các trung trực) :

I(a ; b) là tâm của ΔABC ⇔ AI = BI = CI = R (R là bán kính của ΔABC).

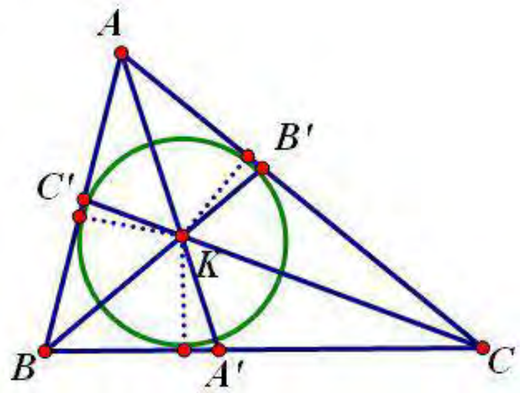
Giải hệ $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ BI^2 = CI^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ tâm I.



d. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác (giao của các đường phân giác trong các góc của tam giác).

Tâm K của đường tròn nội tiếp tam giác ABC tìm được khi thực hiện hai lần công thức điểm chia đoạn theo tỉ số k :

Vì $\dfrac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = -\dfrac{AB}{AC} = k_1$ *nên A' chia BC theo tỉ số* $k_1 \Rightarrow$ *tọa độ của D.*



Vì $\dfrac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{KD}} = -\dfrac{BA}{BD} = k_2$ *nên k chia AD theo tỉ số* k_2*,* $\Rightarrow$ *tọa độ của K.*

e. Diện tích tam giác:

$\bullet\, S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c.$

$\bullet\, S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}bc\sin A.$

• $S = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

• $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2} = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$

Trong đó: $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ với $\overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$, $\overrightarrow{AC} = (b_1; b_2)$.

4. Kiến thức về tứ giác:

Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $D(x_C; y_C)$.

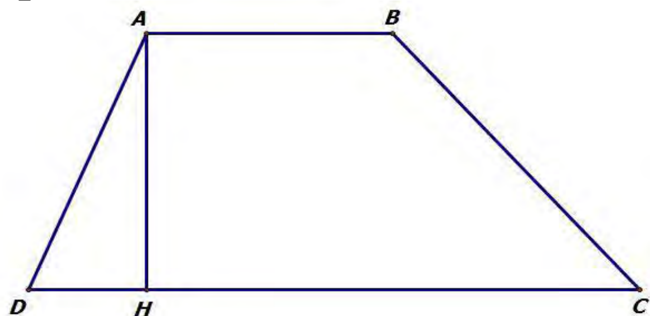
a. Hình thang (là tứ giác có hai cạnh đối song song với nhau) :

• $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai véctơ ngược hướng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (k < 0)

• $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{1}{2}AH(AB + CD)$

Hay $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$ (chia nhỏ hình thang ra thành các hình tam giác tùy ý)

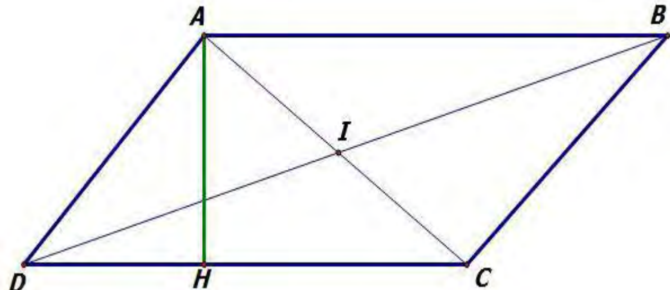


b. Hình bình hành (là tứ giác có các cặp cạnh đôi song song hoặc băng nhau):

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

• I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD.

• $S_{\text{hình bình hành}} = AH.CD = 2S_{\Delta ACD}$
$= 4S_{\Delta ICD}$



(chia nhỏ hình bình hành ra thành các hình tam giác tùy ý).

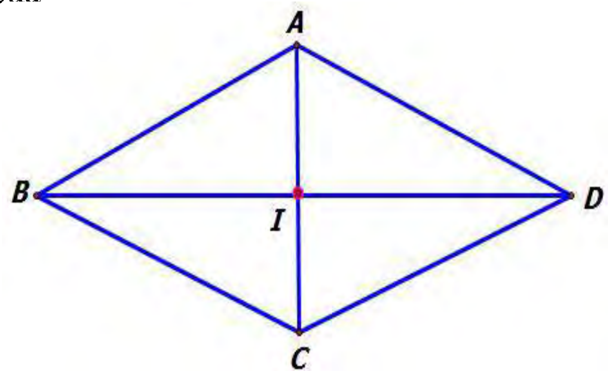
• Chú ý đến tính chất **đối xứng qua I**.

c.Hình thoi (là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau) :

• Hình thoi mang đầy đủ tính chất của hình bình hành..

• Nếu hình bình hành ABCD có AB = BC hoặc AC ⊥ BD thì sẽ trở thành hình thoi.

• AC ⊥ BD, AC và BD cũng là hai **đường phân giác** của góc tạo bởi hai cạnh bên, giao điểm của chúng chính là **tâm đường tròn nội tiếp** hình thoi.



● $S_{\text{hình thoi}} = \frac{1}{2}AC.BD = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta ABI}$

● Chú ý đến tính chất **đối xứng qua I.**

d. Hình chữ nhật (là tứ giác có 3 góc vuông) :

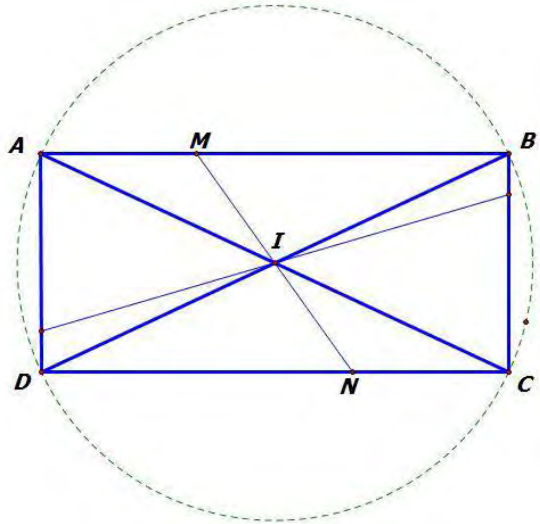
● HCN mang đầy đủ tính chất của hình bình hành.

● Nếu hình bình hành ABCD có một góc bằng 90° hay hai đường chéo AC = BD thì là hình chữ nhật.

● $S_{\text{hình chữ nhật}} = AB.AD = 2S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta ABI}$

● Luôn có một đường tròn ẩn mình ngoại tiếp hình chữ nhật với tâm là $I = AC \cap BD$ là tâm đường tròn ngoại tiếp HCN với bán kính là IA = IB = IC = ID = R.

● Chú ý đến tính chất **đối xứng qua tâm I.** (Ví dụ như trong hình vẽ nếu biết tọa độ M và I ⇒ toa độ $N \in CD$).



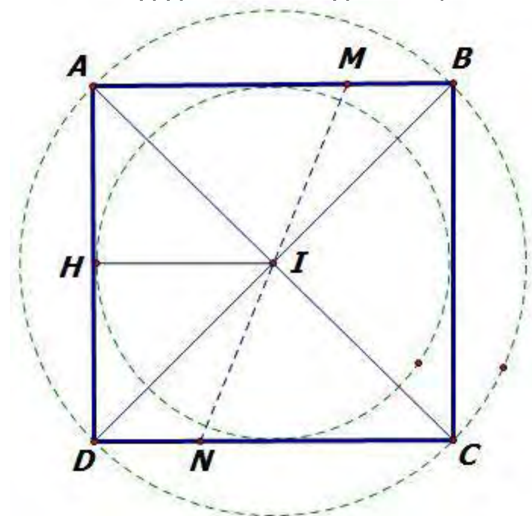
e. Hình vuông (là tứ giác có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau) :

● HV mang đầy đủ các tính chất của hình H.thoi và HCN.

● Nếu hình thoi có một góc bằng 90° hay hai đường chéo AC và BD bằng nhau thì là Hình vuông.

● Nếu hình chữ nhật có hai cạnh bên bằng nhau hay hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau thì là Hình vuông.

● $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2 = 2S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta AID} = 8S_{\Delta AHI}$



● Có đến hai **đường tròn ẩn mình** bên trong hình vuông ABCD là:

☞(C_1) với tâm $I = AC \cap BD$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông và bán kính là IA = R

☞(C_2) với tâm $I = AC \cap BD$ là tâm đường tròn nội tiếp hình vuông và bán kính là IH = R. ((C_2) đi qua trung điểm các cạnh của hình vuông)

● Chú ý đến tính chất **đối xứng qua tâm I.**

■CHỦ ĐỀ 1.3:

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa:

Cho các vectơ $\vec{u}, \vec{n} \neq \vec{0}$.

• $\vec{u}$ **là 1 vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d** khi vec tơ $\vec{u}$ nằm trên 1 đường thẳng song song hoặc trùng với d. Mọi vectơ chỉ phương của d đều có dạng $k.\vec{u}, (k \neq 0)$.

• $\vec{n}$ **là 1 vectơ pháp tuyến (VTPT) của đường thẳng d** khi vectơ $\vec{n}$ nằm trên 1 đường thẳng vuông góc với d. Mọi vectơ pháp tuyến của d đều có dạng $k.\vec{n}, (k \neq 0)$.

• **Một đường thẳng d hoàn toàn được xác định khi biết $M_0 \in d$ và một VTCP $\vec{u}$ hoặc một VTPT $\vec{n}$ của d.**

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng:

a. Định lý:

Phương trình tổng quát của đường thẳng d có dạng $ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$.

☞**Chú ý:** d có vtpt $\vec{n} = (a;b)$, $vtcp\,\vec{u} = (b;-a)$ hay $\vec{u} = (-b;a)$.

(☺**Mẹo nhớ: khi đổi VTCP ↔ VTPT: "Đổi chỗ đổi một dấu"**)

b. Hệ quả:

Phương trình đường thẳng d qua $M_0(x_0;y_0)$ và có vtpt $\vec{n} = (a;b)$ là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0.$$

3. Phương trình tham số – chính tắc của đường thẳng:

a. Phương trình tham số của đường thẳng:

Phương trình tham số của đường thẳng d qua $M_0(x_0;y_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a;b)$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases},\ a^2 + b^2 \neq 0,\ (t \in \mathbb{R}).$$

b. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M_0(x_0;y_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a;b)$ là:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},\ a^2 + b^2 \neq 0.$$

☞***Chú ý:****Phương trình chứa hệ số góc k và tung độ góc m có dạng* $(\Delta): y = kx + m$

☺ *Nếu d có $\vec{u} = (a;b)$ là vtcp thì hệ số* $k = \dfrac{b}{a}$

☻ *Nếu d cắt trục hoành tại M và α góc tạo bởi tia Mx với phần đường thẳng d nằm phía trên trục hoành thì hệ số góc của d là* $\boxed{k = \tan\alpha}$

4. Phương trình đoạn chắn:

Gọi A(a,0) ∈ Ox , B(0,b) ∈ Oy với a,b ≠ 0. Đường thẳng d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B có dạng là:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

5. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng:

Cho 2 đường thẳng

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (1), $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (2) $(a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$.

Giải hệ $\begin{cases} d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ ta có kết quả sau:

●Hệ có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \Leftrightarrow$ d_1 và d_2 cắt nhau.

●Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ và $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0 \Leftrightarrow d_1 // d_2$.

●Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = c_1a_2 - c_2a_1 \Leftrightarrow d_1 \equiv d_2$

■*CHỦ ĐỀ 1.4:*

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

1. Góc giữa 2 đường thẳng:

Cho 2 đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Nếu gọi $\varphi\ (0^0 \leq \varphi \leq 90^0)$ là góc giữa d_1 và d_2 thì :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.}$$

Hệ quả: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$

2. Khoảng cách từ 1 điểm đến một đường thẳng:

a. Công thức:

Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến $d : ax + by + c = 0$ là:

$$\boxed{d(M,d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ a^2 + b^2 \neq 0.}$$

b.Hệ quả:

Nếu $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ cắt nhau tại I $(a_1b_2 \neq a_2b_1)$ thì phương trình các phân giác tạo bởi d_1 và d_2 là:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

☛**Chú ý:**

Cho hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$

Ta có:

☺ M và N nằm cùng phía với đối với Δ khi và chỉ khi:

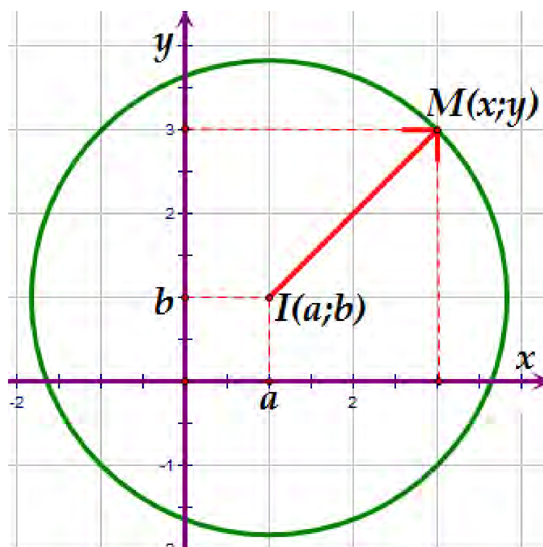
$$(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$$

☻ M và N nằm khác phía với đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$$

■CHỦ ĐỀ 1.5:

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



1. Phương trình:

a. Phương trình tổng quát của đường tròn:

Cho đường tròn (C) tâm I(a; b) bán kinh R có dạng tổng quát :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

b. Phương trình khai triển của đường tròn:

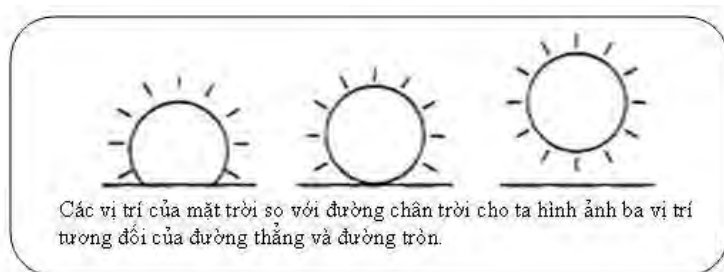
Ngoài ra còn có thể viết PT đường tròn dưới dạng khai triển:

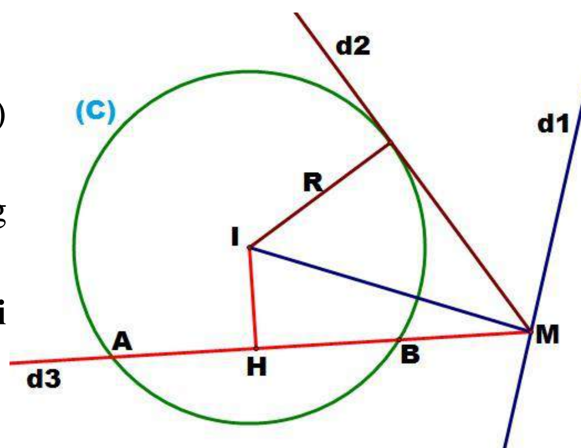
$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

c. Phương trình tham số của đường tròn:

$$\begin{cases} x=a+R\cos t \\ y=b+R\sin t \end{cases} (t\in R)$$

2.Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn:





Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có tâm I, bán kính R.

Gọi d là khoảng cách từ I đến đường (Δ) , Ta có:

● **d(I, Δ) < R ⇔ (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.**

●**d(I, Δ) = R ⇔ (Δ) tiếp xúc với (C).**

●**d(I, Δ) > R ⇔ (Δ) không cắt (C).**

3.Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có tâm và bán kính lần lượt là I_1, R_1, I_2, R_2. Ta có:

● $I_1I_2 < R_1 + R_2$ ⇔ (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau → Có 4 tiếp tuyến chung.

● $I_1I_2 = R_1 + R_2$ ⇔ (C_1) và (C_2) **tiếp xúc ngoài**→ Có 3 tiếp tuyến chung.

● $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ ⇔ (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm → Có 2 tiếp tuyến chung.

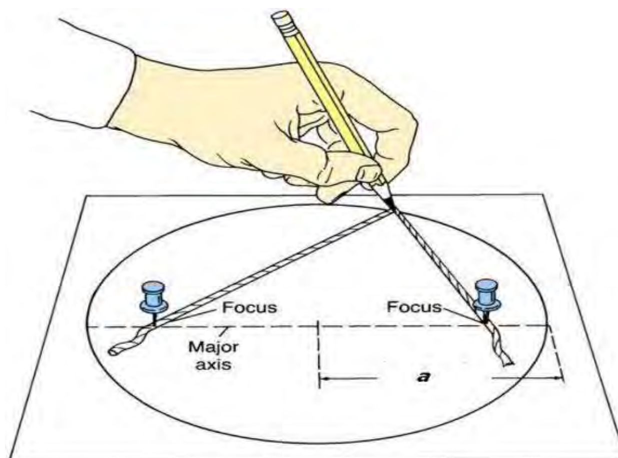
● $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ ⇔ (C_1) và (C_2)**tiếp xúc trong** → Có 1 tiếp tuyến chung.

● $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$ ⇔ (C_1) và (C_2) ở trong nhau → không có tiếp tuyến chung.

■*CHỦ ĐỀ 1.6:*

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa:



Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho hằng số a với a > c.

● Elip (E) $=\{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}$ là tập những điểm mà tổng khoảng cách từ M đến hai điểm $F_1;F_2$ bằng 2a.

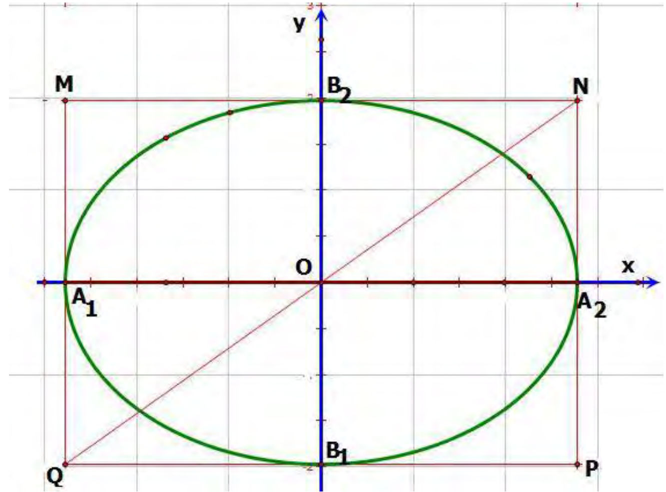
● Ta gọi $F_1;F_2$ là các tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ chính là độ dài tiêu cự.

● Nếu M ∈ (E) thì MF_1 và MF_2 được gọi là bán kính qua tiêu của điểm M.

2. Phương trình chính tắc của elip và các yếu tố của elip.

a. Phương trình chính tắc của elip.

● Xét Elip (E) = $\{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}$ trong đó $F_1F_2 = 2c$.



● Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c;0);\ F_2(c;0)$

Phương trình chính tắc của elip là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ với } b^2=a^2-c^2$$

Nếu M(x; y) ∈ (E) thì các bán kính qua tiêu của điểm M là:

$$MF_1=a+\frac{c}{a}x \text{ và } MF_2=a-\frac{c}{a}x$$

b.Các yếu tố của Elip.

Elip xác định bởi phương trình (*) có một số đặc điểm.

●**Tâm đối xứng** là O, **trục đối xứng** là Ox, Oy

●**Tiêu điểm** $F_1(-c;0);\ F_2(c;0)$

●**Tiêu cự** $F_1F_2 = 2c$

●**Đỉnh trên trục lớn nằm trên Ox**: $A_1(-a;\ 0)$ và $A_2(a;\ 0)$

●**Độ dài trục lớn A_1A_2** = 2a

●**Đỉnh trên trục nhỏ nằm trên Oy**: $B_1(-b;\ 0)$ và $B_2(b;\ 0)$

●**Độ dài trục nhỏ B_1B_2** = 2b

●**Tâm sai** của elip là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn: $e=\frac{c}{a}<1$

●**Đường chuẩn**: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$

●Nếu M(x ;y) ∈ (E) thì $-a \le x \le a$ và $-b \le y \le b$ nên toàn bộ elip (E) thuộc hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng x = ± a, y = ± b. Hình chữ nhật đó gọi là **hình chữ nhật cơ sở**.

■*CHỦ ĐỀ 1.7:*

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG HYPEBOL VÀ PARABOL.

1. Phương trình chính tắc và các thuộc tính của Hypebol:

a. Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>0,\ b>0)$

b. Các yếu tố: $c^2=a^2+b^2$, $c>0$.

* Tiêu cự: $F_1F_2=2c$

* Độ dài trục thực $A_1A_2=2a$

* Độ dài trục ảo $B_1B_2=2b$.

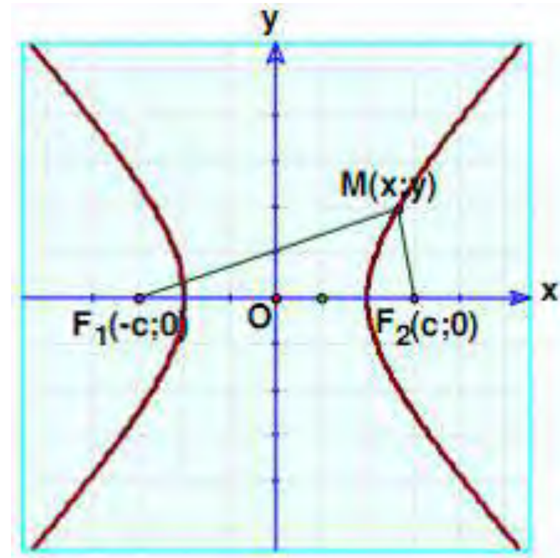
* Hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

* Hai đỉnh: đỉnh trên trục thực $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$,

* Hai đường tiệm cận: $y=\pm\frac{b}{a}x$

* Tâm sai: $e=\frac{c}{a}>1$

* Đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}$



* Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d=2\frac{a}{e}$.

2.Phương trình chính tắc và các thuộc tính của Parabol:

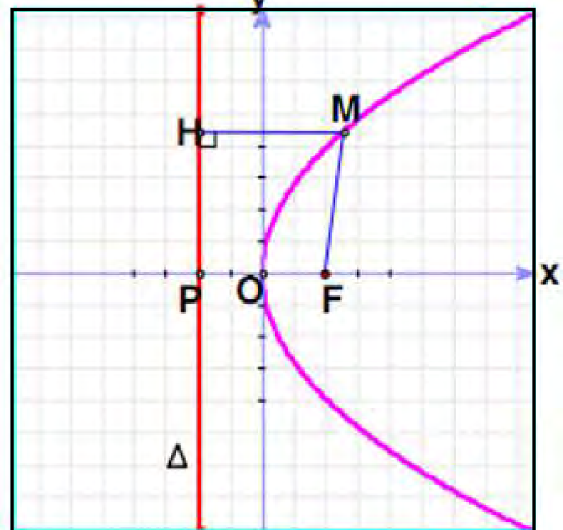
a. Phương trình chính tắc: $\boxed{y^2=2px}$, (p>0 gọi là tham số tiêu).

b. Các yếu tố :

* Một tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

* Đường chuẩn $x=-\frac{p}{2}$

* Bán kính qua tiêu điểm $MF=x+\frac{p}{2}$



■ *CHỦ ĐỀ 1.8:*

PHÉP BIẾN HÌNH CƠ BẢN TRONG MẶT PHẲNG

CÁC KÍ HIỆU CHUNG:

Gọi P là tập hợp mọi điểm của mặt phẳng:

$f:P\to P, M\in P\mapsto M'=f(M)\in P$ có nghĩa f là ***phép biến hình*** của mặt phẳng, biến điểm M (bất kỳ thuộc P) thành điểm M'(thuộc P).

f^{-1} được gọi là phép biến hình ngược của f.

$g_o f$ được gọi là hợp thành tích của f và g theo thứ tự thực hiện:

$M' \equiv f(M): M'$ là ảnh của M qua f. Với H là một hình của mặt phẳng.

$H' \equiv f(H): H'$ là ảnh của H qua f.

$f(M) \equiv M$: M bất động qua f.

HAI PHÉP BIẾN HÌNH CƠ BẢN:PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. PHÉP DỜI HÌNH.

●Định nghĩa và tính chất chung:

☺. $f: P \to P$ là phép dời hình $\Leftrightarrow M'N' = MN, \forall M, N \in P$.

☺. Phép dời hình bảo toàn:

+ Độ dài đoạn thẳng.

+ Quan hệ thẳng hàng và thứ tự các điểm.

+ Quan hệ song song, vuông góc của đường thẳng.

+ Quan hệ về góc giữa hai đường thẳng, hai tia, hai véctơ.

☺. Nếu hình (H) = hình (H') $\Leftrightarrow \exists$ phép dời hình $f:(H) \to (H')$

☺. Phép dời hình cũng là hợp thành (tích) của một số hữu hạn phép đối xứng trục.

●Các phép dời hình tiêu biểu:

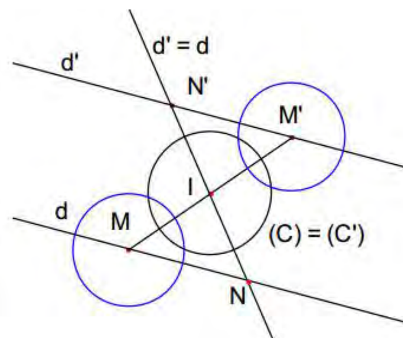
Phép đồng nhất: $I_d: M \mapsto M$

+ Biểu thức tọa độ: $M(x;y) \mapsto M'(x';y')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Phép đối xứng tâm I: $D_I: M \mapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM'}$

+ Minh họa:

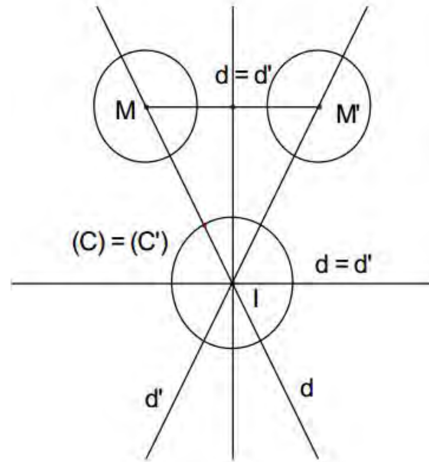


+ Tính chất riêng: $I \notin d \mapsto d' \Rightarrow d' // d$

+ Biểu thức tọa độ: $M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ Với I(a; b).

Phép đối xứng trục Δ: D_Δ : $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M'} \Leftrightarrow hay\, M' \equiv M$ nếu $M \in \Delta\, hay\, \Delta$ là trung trực MM' nếu $M \notin \Delta$

+ Minh họa:



+ Tính chất riêng: $d \mapsto d'$

$d // \Delta \Rightarrow d // d'$

$d \cap \Delta = I \Rightarrow$

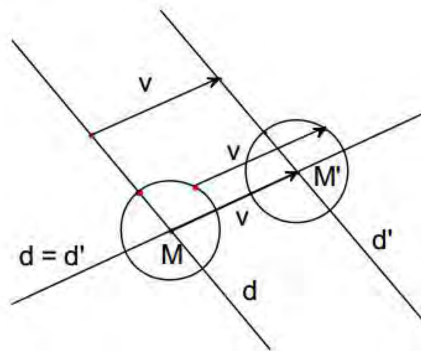
$(\Delta; d) = (\Delta; d')$

+ Biểu thức tọa độ: $M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} b'(x'-x) - a(y'-y) = 0 \\ a\left(\dfrac{x'+x}{2}\right) + b\left(\dfrac{y'+y}{2}\right) + c = 0 \end{cases}$

Với $\Delta : ax + by + c = 0$

Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$: $T_{\vec{v}} : M \mapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

+ Minh họa:



+ Tính chất riêng: $d \mapsto d'$

$\vec{d} \neq k\vec{v} \Rightarrow d // d'$

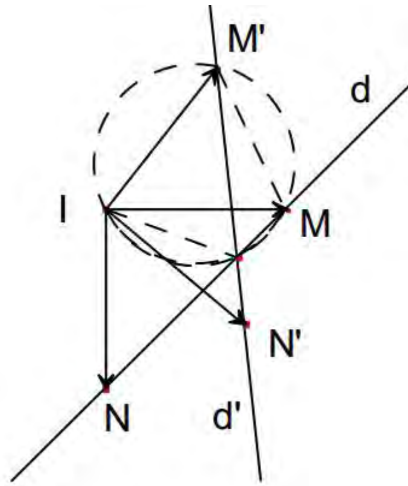
+ Biểu thức tọa độ: $M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$ Với $\vec{v} = (a;b)$

Phép quay tâm I góc quay φ : $Q_{(I;\varphi)} : M \mapsto M'$

Hoặc $M' \equiv I$ nếu $M \equiv I$

Hoặc $IM = IM'$ và $(IM; IM') = \varphi$ nếu $M \neq I$

+ Minh họa:



+ Tính chất riêng: $d \mapsto d'$

$\Rightarrow (d;d') = \varphi$

$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

Biểu thức tọa độ: $M(x;y) \mapsto M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\varphi - (y-b)\sin\varphi \\ y' = b + (x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi \end{cases}$

B. PHÉP ĐỒNG DẠNG

●Định nghĩa và tính chất chung:

☺. g: $P \to P$ là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) $\Leftrightarrow M'N' = MN, \forall M, N \in P$.

☺. Phép đồng dạng bảo toàn:

+ Độ dài đoạn thẳng.

+ Quan hệ thẳng hàng và thứ tự các điểm.

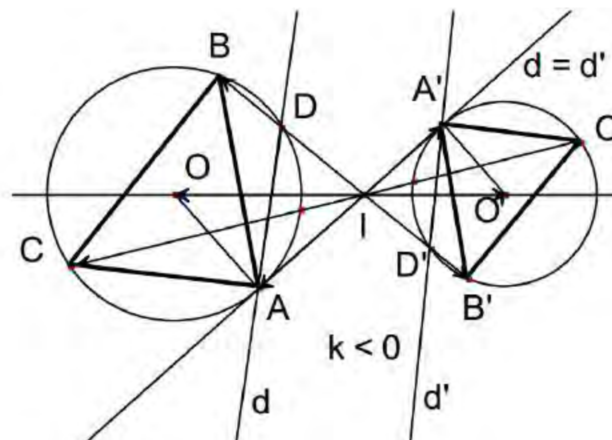
+ Quan hệ song song, vuông góc của đường thẳng.

+ Quan hệ về góc giữa hai đường thẳng, hai tia, hai véctơ.

☺. Nếu hình (H) = hình (H') $\Leftrightarrow \exists$ phép dời hình $f:(H) \to (H')$

☺. Phép đồng dạng tiêu biểu:

PHÉP VỊ TỰ tâm I, tỉ số $k \neq 0$. $V_I^k : M \mapsto M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$



+ Tính chất riêng:

$k \neq 1, I \notin d \rightarrow d' \Rightarrow d'//d$ và $(O;R) \mapsto (O;R') \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IO'} = k\overrightarrow{IO} \\ R' = |k|R \end{cases} (k \neq 1)$

+ Biểu thức tọa độ: $\boxed{\begin{cases} x' = a + k(x-a) \\ y' = b + k(y-b) \end{cases}}$ với I(a; b).

C. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP BIẾN HÌNH

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP BIẾN HÌNH.

►Phương pháp chung:

- Sử dụng định nghĩa phép biến hình.
- Sử dụng biểu thức tọa độ của phép biến hình.
- Sử dụng các tính chất của phép biến hình.

► Các ví dụ minh họa:

Bài toán 1.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho vecto $\vec{v} = (-2;3)$, đường thẳng d có phương trình là $3x - 5y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Chọn M(–1; 0) thuộc d, khi đó: $M' = T_{\vec{v}}(M) = (-3;3)$. M' thuộc d' vì d'//d nên d' có phương trình $3x - 5y + m = 0 (m \neq 3)$. Do M' thuộc d' nên m = 24 (nhận).

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{3x - 5y + 24 = 0}$

Cách 2: Từ biểu thức toa độ của $T_{\vec{v}}$ ta có: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$ thay vào phương trình của d ta được:

$$3x - 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x'+2) - 5(y'-3) + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' + 24 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{3x - 5y + 24 = 0}$

Cách 3: Lấy hai điểm M, N bất kì thuộc d, tìm ảnh M', N' tương ứng của M và N qua phép tính tiến theo vecto $\vec{v}$. Khi đó đường thẳng d' là đường thẳng M'N'.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{3x - 5y + 24 = 0}$

Bài toán 1.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm M(1; 5), đường thẳng (C) có phương trình là $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, đường thẳng d có phương trình là $x - 2y + 4 = 0$. Tìm ảnh của điểm M, (C) và d qua phép đối xứng trục hoành Ox và tìm ảnh của M qua phép đối xứng trục d.

Hướng dẫn giải:

- Gọi M', (C') d' lần lượt là ảnh của M, (C), d qua phép đối xứng trục Ox.

Ta có M'(1; – 5).

- (C) có tâm I(1; –2), bán kính R = 3. Đường tròn (C') có tâm $I' = D_{Ox}(I) = (1;2)$ và bán kinh R' = R = 3.

Do đó phương trình đường tròn (C'): $\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9}$

- Gọi N'(x'; y') là ảnh của N(x; y) qua phép đối xứng trục Ox, ta có:

$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ thay vào phương trình d ta được: x' + 2y' + 4 = 0.

Vậy phương trình d' là: $\boxed{d': x + 2y + 4 = 0}$

- Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc d có phương trình là 2x + y – 7 = 0.

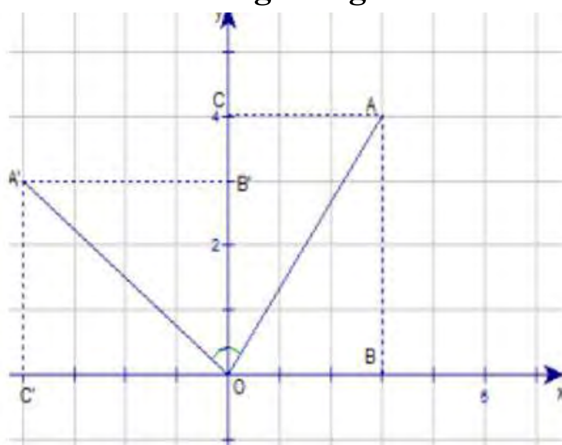
Gọi M_o là giao điểm của d và d_1 thì tọa độ của M_o là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_o(2;3)}$$

Gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng trục d thì M_o chính là trung điểm đoạn thẳng MM_1 nên tọa độ $\boxed{M_1(3;1)}$

Bài toán 1.3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho toa độ A(3; 4). Hãy tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 90^0.

Hướng dẫn giải:



- Gọi B(3; 0), C(0; 4) lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục tọa độ Ox, Oy.

Phép quay tâm O góc quay 90^0 $Q_{(O;90^0)}$ biến hình chữ nhật OBAC thành hình chữ nhật OB'A'C'

Ta thấy B'(0; 3) và C'(–4;0) suy ra **A'(–4; 3).**

- **Cách khác**: Gọi A'(x'; y') là ảnh của A(3; 4) qua phép quay tâm O góc quay $90^0 : Q_{(O;90^0)}$.

Ta có: $\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\varphi - (y-b)\sin\varphi \\ y' = b + (x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 + (3-0).\cos 90^0 - (4-0)\sin 90^0 = -4 \\ y' = 0 + (3-0).\sin 90^0 + (4-0)\cos 90^0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(-4;3)}$$

Bài toán 1.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Hướng dẫn giải:

- **Cách 1**: Ta có: $V_{(O;k)}(d) = d' \Rightarrow$ d'// d $\Rightarrow d': 3x + 2y + m = 0\ (m \neq -6)$.

Lấy điểm M(0; 3) thuộc d và gọi M'(x'; y') lả ảnh của M qua phép vị tự đã cho.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M'(0;-6)}$

Mặt khác M' thuộc d' nên thay vào phương trình d' ta suy ra **m = 12 (nhận)**

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{d': 3x + 2y + 12 = 0}$

- **Cách 2**: Gọi M'(x'; y') là ảnh của M(x; y) qua phép vị tự tâm O ti số k = – 2.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-x'}{2} \\ y = \dfrac{-y'}{2} \end{cases}$ thay vào phương trình d ta được:

$$\frac{-3}{2}x' - y' - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 12 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{d': 3x + 2y + 12 = 0}$

- **Cách 3**: Lấy hai điểm bất kì M, N trên d, tìm ảnh M', N' của M, N qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = –2. Khi đó d' là đường thẳng M'N' (viết phương trình đường thẳng qua hai điểm).

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{d': 3x + 2y + 12 = 0}$

DẠNG 2: DÙNG PHÉP BIẾN HÌNH ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

► **Phương pháp chung:**

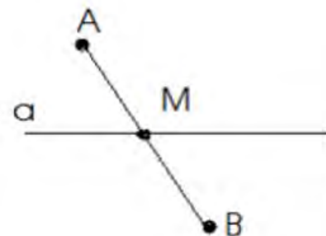
- Cách 1: Xác định tọa độ M như ảnh của một điểm đã biết qua một phép biến hình.
- Cách 2: Xem M như là giao điểm của một đường tròn cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép biến hình.

► **Các ví dụ minh họa:**

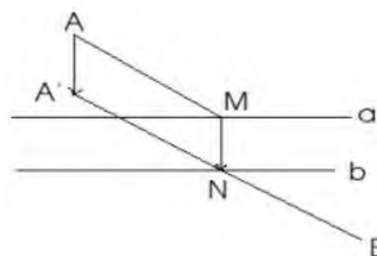
Bài toán 2.1. Hai thôn nằm ở vị trí A, B cách nhau một con sông (xem hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông (cầu vuông góc với bờ sông) và làm hai đoạn đường AM, NB (như hình vẽ). Hãy xác định vị trí cầu MN sao cho AM + NB ngắn nhất.

Hướng dẫn giải:

- **Trường hợp 1**: Xem con sông rất hẹp, bài toán trở thành: "*Cho hai điểm A, B nằm ở hai phía khác nhau so với đường thẳng a. Tìm vị trí điểm M trên A để AM + AN nhỏ nhất ?* "
  Khi đó M chính là giao điểm giữa AB với a.



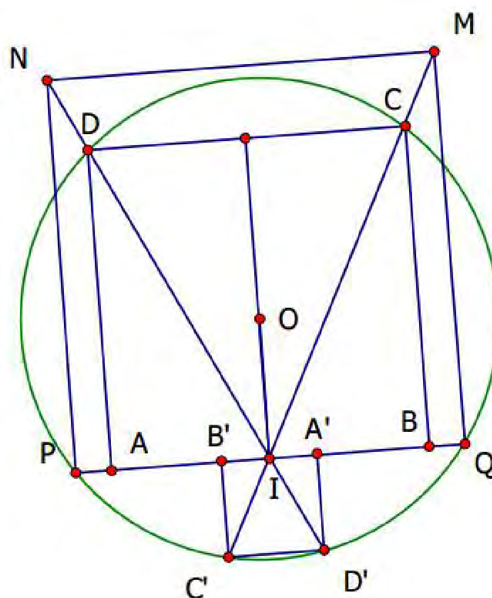
- **Trường hợp 2**: a // b. Nhận xét a, b cố định suy ra MN cố định.
  Khi đó: $T_{\overrightarrow{MN}}(A) = A' \Rightarrow A'N = AM$. Ta có AM + BN = A'N + NB = A'B
  Cách dựng: Dựng $A' = T_{\overrightarrow{MN}}(A)$.
  Nối A' với B cắt b tại N.
  Từ N hạ đường thẳng vuông góc với a tại M.
  Khi đó MN là vị trí xây cầu.



Bài toán 2.2. Cho đường tròn (O) với dây cung PQ. Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, B nằm trên đường thẳng PQ và hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn.

Hướng dẫn giải:

- Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thỏa mãn điều kiện của bài toán.
  Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ thì OI là đường trung trực của PQ nên cũng là đường trung trực của DC và do đó cũng là đường trung trực của AB.
  Từ đó suy ra, nếu dựng hình vuông PQMN thì có phép vị tự tâm I biến hình vuông PQMN thành hình vuông ABCD.
- **Cách dựng**: Dựng hình vuông PQMN. Lấy giao điểm C và C' của đường thẳng IM và đường tròn.
  Lấy giao điểm D và D' của IN và đường tròn (ta kí hiệu sao cho hai điểm C, D nằm về một phía đối với đường thẳng PQ).
  Gọi các điểm B, A, B', A' lần lượt là hình chiếu của các điểm C, D, C', D' trên đường thẳng PQ. Ta được các hình vuông ABCD và A'B'C'D' thỏa mãn điều kiện của bài toán.



DẠNG 3: DÙNG PHÉP BIẾN HÌNH ĐỂ GIẢI MỘT SỐ TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

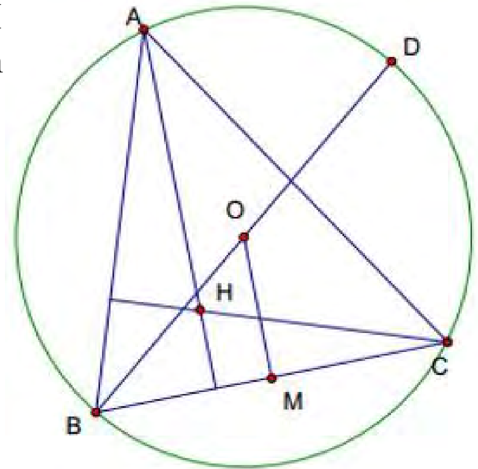
► **Phương pháp chung:** chứng minh tập hợp điểm cần tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép biến hình.

►**Các ví dụ minh họa:**

Bài toán 3.1. Cho hai điểm phân biệt B, C cố định (BC không phải là đường kính) trên đường tròn (O), điểm A di động trên (O). Chứng minh rằng khi A di động (O) thì trực tâm tam giác ABC di động trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải:

- **Cách 1**: Gọi H là trực tâm tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn (O) tại D.



  Ta có: $\angle BCD = 90^0$ nên DC // AH, AD // CH suy ra tứ giác ADCH là hình bình hành

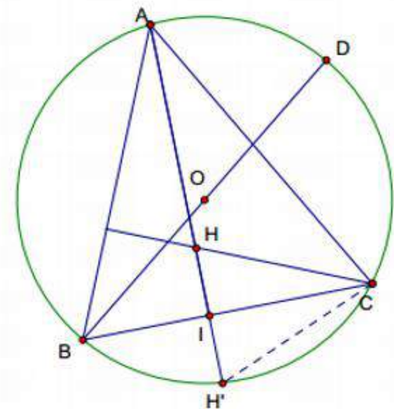
  Suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$.

  Vì $\overrightarrow{OM}$ không thay đổi suy ra $T_{2\overrightarrow{OM}}(A) = H$.

  Vậy khi A di động trên đường tròn (O) thì H di chuyển trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo $2\overrightarrow{OM}$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $d': 3x + 2y + 12 = 0$

- **Cách 2**: Gọi H là trực tâm tam giác ABC.



  Gọi I, H' lần lượt là giao điểm của tia AH với đoạn thẳng BC và đường tròn (O).

  Ta có: $\angle BAH = \angle HCB, \angle BAH = \angle BCH'$.

  Do đó tam giác HCH' cân tại C

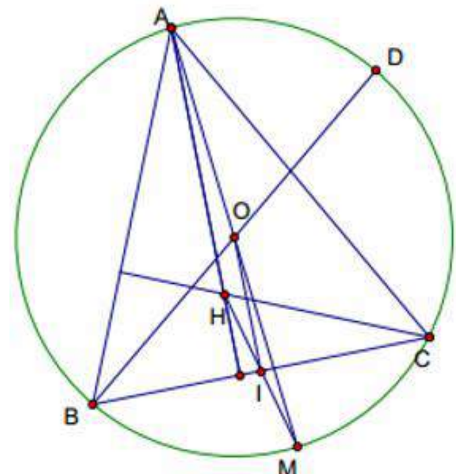
  Suy ra H và H' đối xứng nhau qua BC.

  Khi A di động trên đường tròn (O) thì H' cũng chạy trên đường tròn (O).

  Do đó khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm H di động trên đường tròn là ảnh của (O) qua phép đối xứng trục BC

- **Cách 3**: Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là trung điểm của BC

  Tia AO và BO cắt (O) lần lượt tại M và D.



  Theo ***chứng minh cách 1***, ta có:

  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$.

  Trong tam giác AHM có

  OI // AH và $OI = \dfrac{AH}{2}$

  $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của tam giác AHM.

Suy ra I là trung điểm của HM suy ra H và M đối xứng nhau qua I. Vì BC cố định nên I cố định.

Khi A di động trên đường tròn (O) thì M cũng di động trên (O).

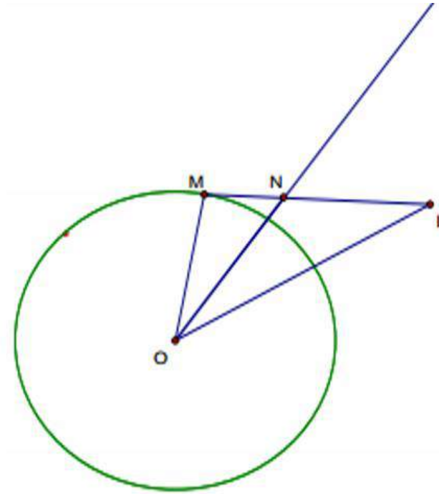
Khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm H tam giác ABC di động trên một đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I.

Bài toán 3.2. Cho đường tròn (O; R), I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên (O). Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích tập hợp điểm N khi M di động trên (O).

Hướng dẫn giải:

- Vì ON là tia phân giác của góc MOI nên:

$$\frac{MN}{NI}=\frac{OM}{OI} \; hay \; \frac{IM-IN}{IN}=\frac{OM}{OI}$$



Do (O) và I cố định nên $\frac{OM}{OI}=k$ (k là hằng số, $k\neq 0$).

Suy ra $\frac{IM-IN}{IN}=\frac{OM}{OI}=k$

$$\Leftrightarrow IN=\frac{1}{k+1}IM \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IN}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{IM}}$$

Vậy phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1}{k+1}$ biến điểm M thành điểm N.

Do đó khi M di động trên đường tròn (O) thì N di động trên đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1}{k+1}$

Bài toán 3.3. Cho điểm A cố định nằm trên đường tròn (O) và điểm C thay đổi trên đường tròn đó. Dựng hình vuông ABCD. Tìm quỹ tích điểm B và điểm D.

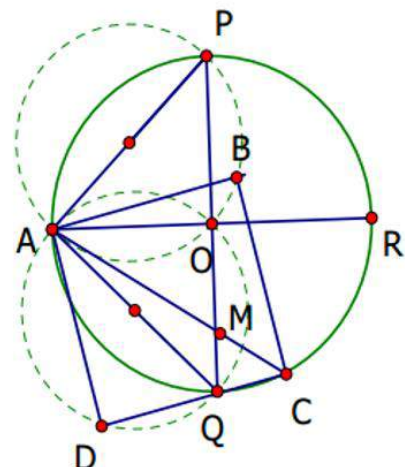
Hướng dẫn giải:

- Trên đoạn thẳng AC lấy điểm M sao cho:

AM = AB = AD. Khi đó, ta có: $\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ngoài ra $(AM,AB)=45^0$ và $\left(AM,AD\right)=45^0$.

Suy ra phép vị tự V tâm A, tỉ số $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ biến điểm C thành điểm M



Và phép quay Q tâm A góc quay 45^0 biến điểm M thành điểm B.

Vậy nếu gọi F là phép hợp thành của V và Q tì F biến C thành B.

Vì quỹ tích của C là đường tròn (O) nên quỹ tích B là ảnh của đường tròn đó qua phép đồng dạng F.

- Đường tròn quỹ tích B có thể xác định như sau:

  Gọi AR là đường kinh đường tròn (O) và PQ là đường kinh của (O) vuông góc với AR (ta kí hiệu các điểm P, Q sao cho $(AR, AP) = 45^0$.

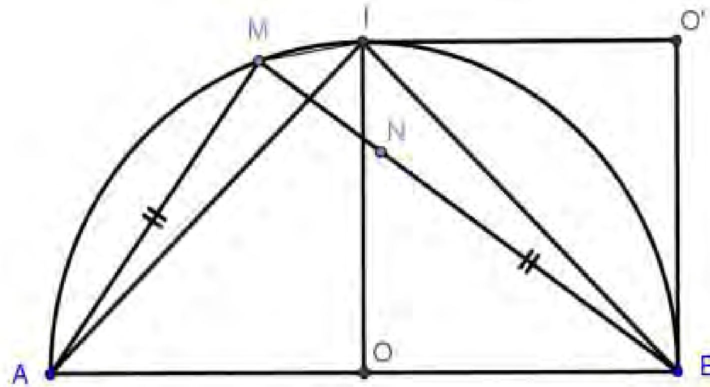
  Khi đó ta thấy phép đồng dạng F biến AR thành AP. Vậy quỹ tích điểm B là đường tròn đường kinh AP. Tương tự ta có quỹ tích điểm D là đường tròn đường kinh AQ.

DẠNG 4: DÙNG PHÉP BIẾN HÌNH ĐỂ CHỨNG MINH BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG.

►Các ví dụ minh họa:

Bài toán 4.1. Cho điểm M thay đổi trên nửa đường tròn đường kinh AB. Trên tia BM lấy điểm N sao cho BN = AM. Xác định tâm phép quay biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{BN}$ và chứng minh N thuộc một nửa đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải:



- Gọi I là điểm chính giữa cung AB $\Rightarrow \begin{cases} IA = IB \\ (IA; IB) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Ta cần chứng minh I là tâm quay M biến thành N.

Do đó ta xét $\Delta AMI, \Delta BNI$ có: $\begin{cases} \angle MAI = \angle IBN \\ AM = BN \\ AI = BI \end{cases} \Rightarrow \Delta MAI = \Delta IBN\,(c - g - c)$

Suy ra MI = NI. Ta có:

$$(IM;IN)=(IM;IA)+(IA,IN)$$
$$=(IN;IB)+(IA,IN)\quad (\text{do } \Delta MAI=\Delta IBN)$$
$$=(IA;IB)=\frac{\pi}{2}$$

Xét phép quay $Q_I^{\frac{\pi}{2}}$, ta có: $\begin{cases} A\xrightarrow{Q_I^{\frac{\pi}{2}}}B \\ M\xrightarrow{Q_I^{\frac{\pi}{2}}}N \end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AM}\xrightarrow{Q_I^{\frac{\pi}{2}}}\overrightarrow{BN}$

Vậy I là tâm phép quay biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{BN}$.

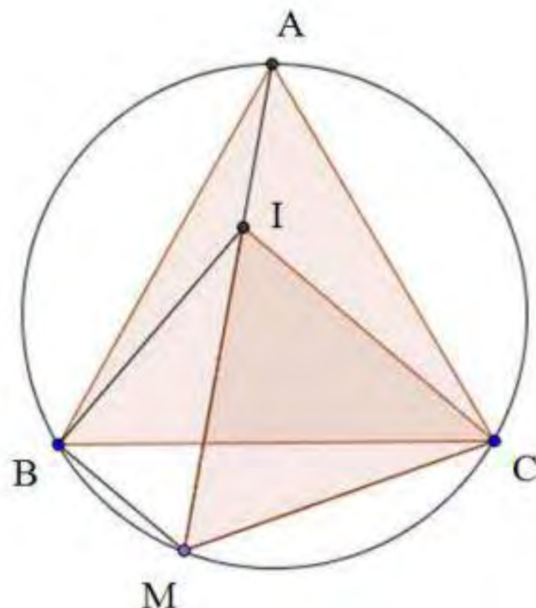
- Gọi O’ là ảnh của O qua phép $Q_I^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases} IO=IO' \\ (IO;IO')=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} IO=OB=R \\ (OI;OB)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$. Vậy IOBO’ là hình vuông. Suy ra O’ là đỉnh hình vuông.

Mặt khác, M thuộc (O) cố định và O’ là ảnh của O qua phép quay $Q_I^{\frac{\pi}{2}}$ nên N thuộc (O’) cố định.

Bài toán 4.2. Cho tam giác đều ABC và điểm M nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng MA = MB + MC.

Hướng



- Gọi I là giao điểm của đường tròn (C; CM) và AM. Xét tam giác ABC có: CM = CI (do cách dựng điểm I) (1)

(MC; MI) = (BC; BA) = $\frac{\pi}{3}$ (cùng chắn cung AC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác ABC đều.

suy ra $(CI;CM)=\frac{\pi}{3}$

- Xét phép quay $Q_{(C;\frac{-\pi}{3})}$,

ta có: $\begin{cases} CI=CM \\ (CM;CI)=\frac{-\pi}{3} \end{cases}\Rightarrow Q_{(C;\frac{-\pi}{3})}(M)=I$

Đồng thời $\begin{cases} CB = CA \\ (CB;CA) = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow Q_{(C;\frac{-\pi}{3})}(B) = A$.

Như vậy $Q_{(C;\frac{-\pi}{3})}(MB) = IA$. Do tính bảo toàn khoảng cách của phép quay nên ta có MB = IA

Mặt khác: IM = MC (Do tam giác ABC đều) suy ra **AM = AI + IM = MB + MC (đpcm)**

Nhận xét: *ta có thể mở rộng tính chất như sau:*

" Cho tam giác đều ABC và điểm M bất kì thuộc góc BAC. Khi đó, ta có: $MB + MC \geq MA$.

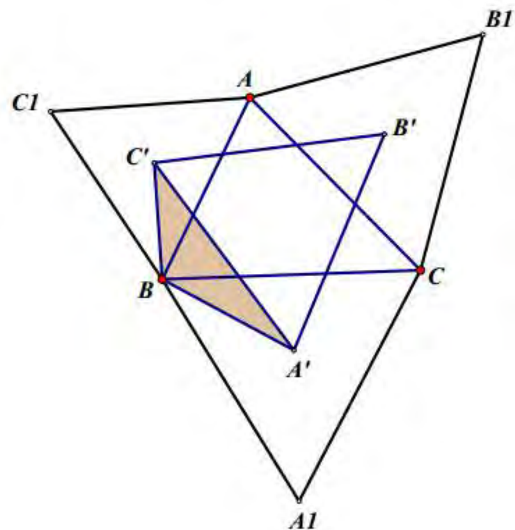
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M nằm trên cung nhỏ BC của đường tòn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài toán 4.3. Cho tam giác đều ABC và vẽ về phía ngoài các tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1 có tâm lần lượt là A', B', C'. Chứng minh rằng tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều. (***Bài toán Napolenon***)

Hướng dẫn giải:

- Trước tiên ta có nhận xét: bài toán trên vẫn đung trong trường hợp các tam giác đều vẽ về phía trong.

- **Cách 1**: *Ý tưởng dùng tích phép quay.*



Xét: $F = Q_{\left(C';\frac{-2\pi}{3}\right)} . Q_{\left(A';\frac{-2\pi}{3}\right)}$ với

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-2\pi}{3} + \frac{-2\pi}{3} = \frac{-4\pi}{3} \neq k2\pi$$

Suy ra $F = Q_{\left(I;\frac{-4\pi}{3}\right)} = Q_{\left(I;\frac{-\pi}{3}\right)}$.

Do $\begin{cases} A \xrightarrow{Q_{\left(C';\frac{-2\pi}{3}\right)}} B \xrightarrow{Q_{\left(A';\frac{-2\pi}{3}\right)}} C \\ A \xrightarrow{Q_{\left(B';\frac{2\pi}{3}\right)}} C \end{cases} \Rightarrow I \equiv B'$

Theo cách dựng tâm B', ta có: $\begin{cases} (C'B', C'A') = \dfrac{\alpha_1}{2} = \dfrac{-\pi}{3} \\ (A'C', A'B') = \dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \Delta A'B'C'$ đều (đpcm)

- **Cách 2**: *Ý tưởng chứng minh A'B' = B'C' = A'C'.*

Trong tam giác A'BC', áp dụng địng lý hàm số cosin ta có:

$$A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2 - 2A'B.BC'.\cos\widehat{A'BC'}$$
$$= \frac{1}{3}(a^2+c^2) - 2\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{c\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}+B\right)$$
$$= \frac{1}{3}(a^2+c^2) - \frac{2ac}{3}\left(\frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)$$
$$= \frac{1}{3}(a^2+c^2) - \frac{ac}{3}\cos B - \frac{ac\sqrt{3}}{3}\sin B$$

Áp dụng các định lý về hệ thức lượng trong tam giác ABC:

$$\begin{cases} ac.\cos B = a^2+c^2-b^2 \\ ac\sin B = 2S_{\Delta ABC} \end{cases}.$$

Vậy $A'C'^2 = \frac{1}{3}(a^2+c^2) - \frac{1}{6}(a^2+c^2-b^2) - \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{\Delta ABC}$

$$= \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{\Delta ABC}$$

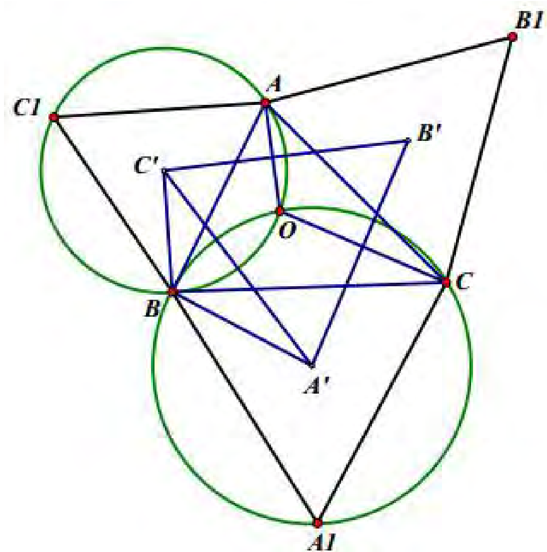
Tương tự ta tính được: $A'C'^2 = B'C'^2 = \frac{1}{3}(a^2+c^2) - \frac{1}{6}(a^2+c^2-b^2) - \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{\Delta ABC}$

$$= \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{\Delta ABC}$$

Từ đó suy ra tam giác A'B'C' đều (đpcm)

- **Cách 3:** *Ý tưởng chứng minh tam giác A'B'C' có 2 góc* 60^0

Dựng các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC_1, BCA_1. Gọi O là giao điểm thứ hai của hai tam giác.



Ta có: $\widehat{AOB} = 120^0$ (do $AOBC_1$ nội tiếp có góc $\widehat{AC_1B} = 60^0$)

Mặt khác, $\widehat{BOC} = 120^0$ (do $BOCA_1$ nội tiếp có góc $\widehat{BA_1C} = 60^0$)

Suy ra $\widehat{AOC} = 120^0$, từ đó suy ra tứ giác $AOCB_1$ hay cắt đường tròn (ABC_1), (BCA_1), (ACB_1) cắt nhau tại O.

Ta có: OB vuông góc A'C' do OB là trục đẳng phương của (ABC_1), (BCA_1).

OC vuông góc A'B' do OC là trục đẳng phương của $(BCA_1), (\mathrm{ACB_1}))$ và góc $\angle BOC = 120^0$ (cmt)

Suy ra $\angle C'A'B' = 60^0$. Tương tự ta cũng có $\angle A'B'C' = \angle A'C'B' = 60^0$

Từ đó suy ra tam giác A'B'C' đều (đpcm)

Bài toán 4.4. Cho tam giác ABC vuông cân tai C. Một đường thẳng song song AB cắt các cạnh BC, AC lần lượt tại E và D. Các đường thẳng vuông góc với AE hạ từ C và D lần lượt cắt AB tại K và H. Chứng minh rằng K là trung điểm đoạn BH.

Hướng dẫn giải:

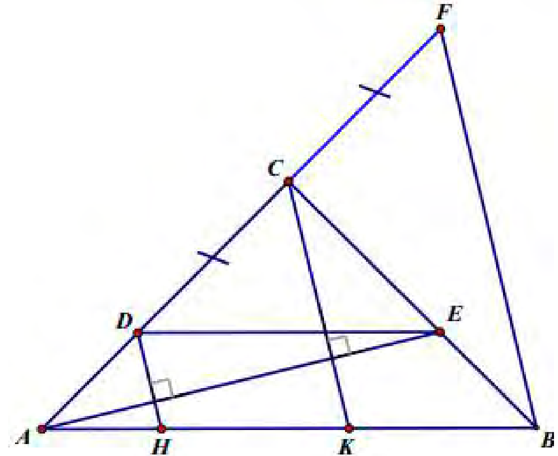
- Trên đường thẳng AC, lấy điểm F sao cho C là trung điểm DF. Ta có:

$Q_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}(E) = F,\ Q_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}(\mathrm{A}) = B$

Do đó AE vuông góc BF.

Suy ra BF // KC // HD.

Áp dụng định lý đường trung bình trong hình thang, do C là trung điểm DF nên ta có điều phải chứng minh.



- **Nhận xét**: *E, D không nhất hiết phải thuộc cạnh BC, AC.*

Bài toán 4.5. Cho đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin A.\overrightarrow{OA} + \sin B.\overrightarrow{OB} + \sin C.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Hướng dẫn giải:

- Gọi I, J, K tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CA.

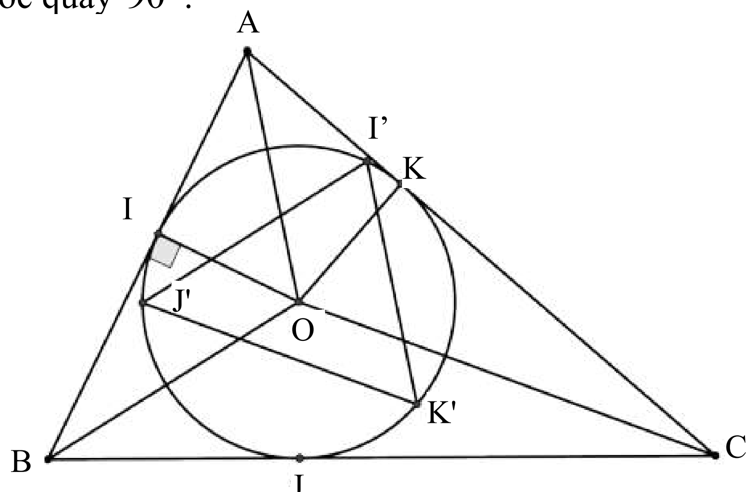
Theo tính chất của 2 tiếp tuyến xuất phát từ 1 điểm ta có: $\boxed{AO \perp IK}$.

Tứ giác AIOK nội tiếp trong đường tròn đường kinh OA. Đây cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác AIK. Vì thế theo định lý hàm số sin trong tam giác này ta có: $\boxed{IK = OA.\sin A}$

- Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0.

Giả sử trong phép quay này:

$$\begin{cases} I \xrightarrow{Q_O^{90^o}} I' \\ J \xrightarrow{Q_O^{90^o}} J' \\ K \xrightarrow{Q_O^{90^o}} K' \end{cases}$$



Theo tính chất của phép quay suy ra:

$$IK \xrightarrow{Q_O^{90^o}} I'K' \Rightarrow \begin{cases} IK = I'K' \\ IK \perp I'K' \end{cases}$$

$\boxed{AO \perp IK} \Rightarrow I'K' // OA$

Ngoài ra do các lập luận trên ta suy ra: $\overrightarrow{K'I'} = \sin A.\overrightarrow{OA}$ (1).

Lập luận tương tự ta có: .

Cộng từng vế theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$\sin A.\overrightarrow{OA} + \sin B.\overrightarrow{OB} + \sin C.\overrightarrow{OC} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{K'I'} + \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'K'} = \vec{0}.)$$

- **Nhận xét**: theo định lý hàm số sin suy ra: $a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC} = 0$. Vậy O là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo bộ số (a; b; c).

Bài toán 4.6. Chứng minh rằng: trong một tam giác, ba trung điểm của ba cạnh, ba chân đường cao và ba trung điểm của ba đoạn nối từ đỉnh đến trực tâm nằm trên một đường tròn (***đường tròn Euler***).

Hướng dẫn giải:

- Trong tam giác ABC, gọi:

G là trọng tâm.

H là trực tâm.

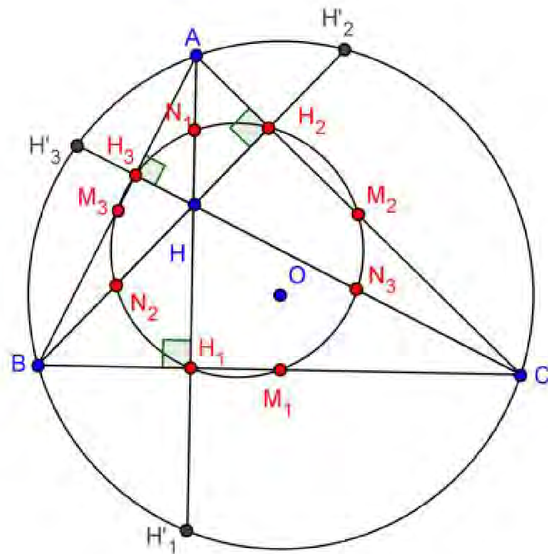
O là tâm đường tròn ngoại tiếp

O' là tâm đường tròn Euler.

M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB.

H_1, H_2, H_3 lần lượt là chân đường cao từ các đỉnh A, B, C.

- Ta có: $\begin{cases} A \xrightarrow{V_G^{\frac{-1}{2}}} M_1 \\ B \xrightarrow{V_G^{\frac{-1}{2}}} M_2 \\ C \xrightarrow{V_G^{\frac{-1}{2}}} M_3 \end{cases}$.



Do đó: $\Delta ABC \xrightarrow{V_G^{\frac{-1}{2}}} \Delta M_1M_2M_3$

- Ta thấy O là trực tâm tam giác $\Delta M_1M_2M_3$

Suy ra $H \xrightarrow{V_G^{\frac{-1}{2}}} O \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{GO} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GH}\ (1)}$.

- Ta có: O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\Delta M_1M_2M_3$

Suy ra $O \xrightarrow{V_G^{\frac{-1}{2}}} O' \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{GO'} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GO}\ (2)}$.

Từ (1) và (2) suy ra ***O' là trung điểm của đoạn OH***

- Đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác $\Delta M_1M_2M_3$ lần lượt cắt AH, BH, CH tại N_1, N_2, N_3 .

Ta chứng minh N_1, N_2, N_3 là trung điểm AH, BH, CH.

Thật vậy, ta có: $(ABC) \xrightarrow{V_H^{\frac{1}{2}}} (M_1M_2M_3)$.

Mà A thuộc (ABC) và $N_1 \in (M_1M_2M_3) \Rightarrow \overrightarrow{HN_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \Rightarrow N_1$ ***là trung điểm HA***.

Tương tự ta có N_2, N_3 ***lần lượt là trung điểm HB, HC***.

- Gọi H_1', H_2', H_3' lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với HA, HB, HC.

Ta có: $\overrightarrow{HH_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HH_1'} \Rightarrow H_1' \xrightarrow{V_H^{\frac{1}{2}}} H_1$. Mà $H_1' \in (ABC) \Rightarrow H_1 \in (M_1M_2M_3)$

Vậy đường tròn Euler đi qua 9 điểm $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, N_1, N_2, N_3$

■ *CHỦ ĐỀ 1.9:*

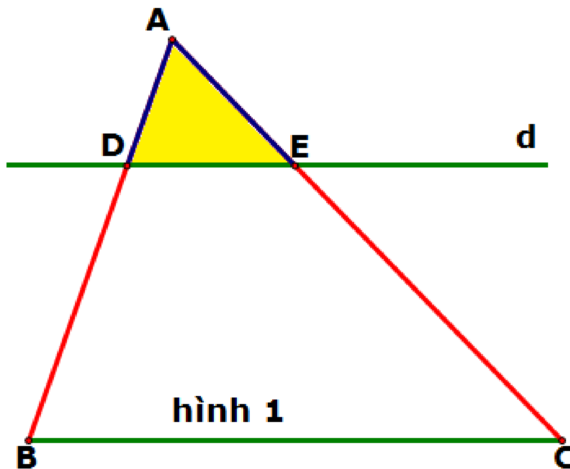
CÁC ĐỊNH LÝ– BỔ ĐỀ – TÍNH CHẤT

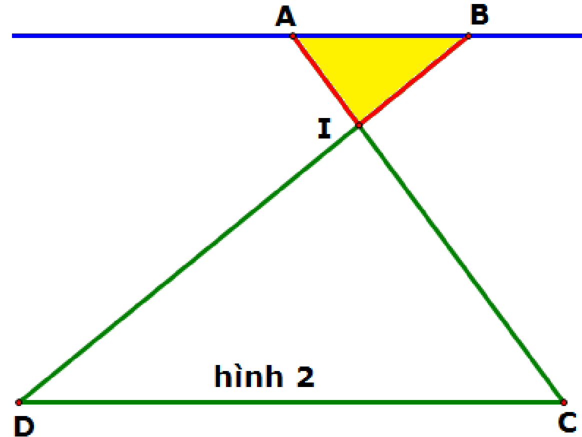
BÀI TOÁN TIÊU BIỂU TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

1. ĐỊNH LÝ THALES THUẬN: *Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

Với tam giác ABC, nếu có đường thẳng d song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm D,E thì:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \text{ và } \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{DB} \text{ và } \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$





Lưu ý: định lý trên cũng đúng trong với trường hợp hình 2 (giống "***đồng hồ cát***"):

$$\boxed{\frac{IA}{IC}=\frac{IC}{ID}=\frac{AB}{CD}}$$

2. ĐỊNH LÝ THALES ĐẢO: *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.*

Với tam giác ABC nếu có đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại D, E và thỏa mãn:

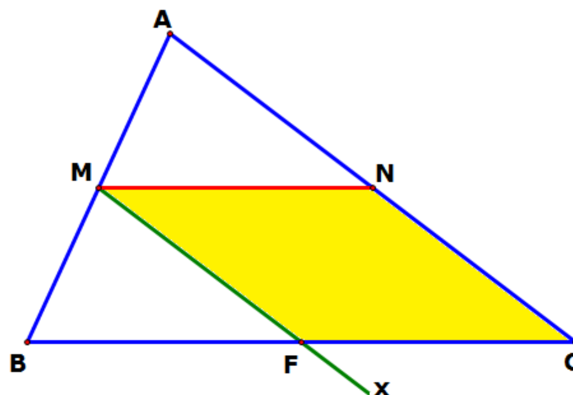
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ và $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{DB}$ và $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ thì ***khi đó DE // BC hay d // BC***

3. ĐỊNG LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG BÌNH TRONG TAM GIÁC:

3.1 Định lý: "***Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba***"

Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AB. Đường thẳng đi qua M song song với cạnh BC và cắt cạnh AC tại điểm N. Chứng minh rằng NA = NC.

☺**Chứng minh định lý**:



Từ M vẽ tia song song AC, cắt BC tại F.

Ta có tứ giác MNCF có và MN // CF (MN // BC) và MF // NC (MF // AC)

Suy ra tứ giác MNCF là *hình bình hành* $\Rightarrow \boxed{MF = NC}$ (1) .

Mặt khác, xét hai tam giác BMF và MAN có:

$$\begin{cases} \widehat{MBF} = \widehat{AMN}\ (dong\,vi) \\ BM = MA\,(gt) \\ \widehat{BMF} = \widehat{MAN}\,(dong\,vi) \end{cases} \Rightarrow \Delta BMF = \Delta MAN\,(g-c-g)$$

Suy ra $MF = AN$ (2) (*hai cạnh tương ứng bằng nhau*)

Từ (1) và (2) ta suy ra **NA = NC** (*định lý được chứng minh*)

3.2 Định lý: "***Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và dài bằng một nửa cạnh ấy***"

Xét tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AB và N là trung điểm cạnh AC. Chứng minh rằng MN song song BC và BC = 2MN.

☺**Chứng minh định lý**:

Kéo dài đoạn MN về phía N một đoạn NF có độ dài bằng MN. Nhận thấy tam giác ANM bằng tam giác CNF (trường hợp cạnh – góc – cạnh).

Suy ra $\widehat{MAN} = \widehat{NCF}$ (so le trong) suy ra **CF // MA hay CF // BA**

Mặt khác vì hai tam giác này bằng nhau nên **CF = MA suy ra CF = MB (**do M là trung điểm AB).

Tứ giác BMFC có hai cạnh đối BM và FC vừa song song và bằng nhau nên BMFC là *hình bình hành*

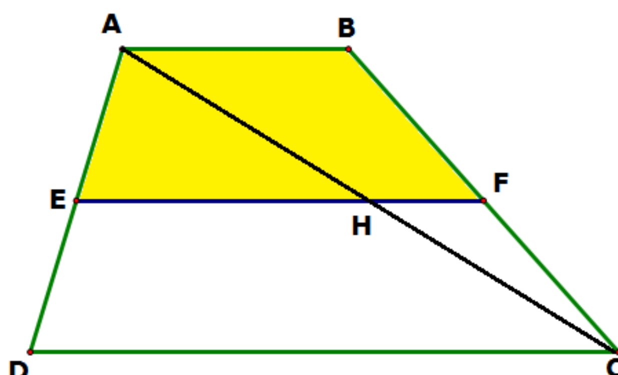
Suy ra **MF // BC hay MN // BC.**

Mặt khác $MN = NF = \dfrac{MF}{2} = \dfrac{BC}{2}$ (tính chất hình bình hành) (*định lý được chứng minh*)

4. ĐỊNH LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG BÌNH TRONG HÌNH THANG:

4.1 Định lý: "***Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.***"

Xét hình thang ABCD, E là trung điểm cạnh AD. Qua E kẻ đường thẳng song song với hai đáy, cắt cạnh BC tại F. Chứng minh rằng F là trung điểm BC.



☺**Chứng minh định lý**:

Gọi H là giao điểm AC và EF.

Theo *định lý 1 về đường trung bình trong tam giác,* vì EH đi qua trung điểm AD và song song CD nên H là trung điểm cạnh AC.

Xét tương tự trong tam giác ABC vì HF đi qua trung điểm AC và song song AB nên F là trung điểm BC (*định lý được chứng minh*).

4.2. Định lý: "***Đường trung bình của hình thang thì song song hai đáy và dài bằng một nửa tổng độ dài hai đáy.***"

Xét hình thang ABCD, E là trung điểm cạnh AD, F là trung điểm BC. Chứng minh rằng EF song song AB và $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

☺ **Chứng minh định lý**:

Gọi H là trung điểm AC. Áp dụng định lý 2 về đường trung bình EH trong tam giác ACD và đường HF (tam giác CAB) ta có:

$$\begin{cases} EH\,//\,CD,\ EH = \dfrac{CD}{2} \\ HF\,//\,AB,\ HF = \dfrac{AB}{2} \end{cases}.$$

Do AB // CD nên E, H, F thẳng hàng suy ra EF / / AB // CD

Và khi đó $EF = EH + HF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ (*định lý được chứng minh*).

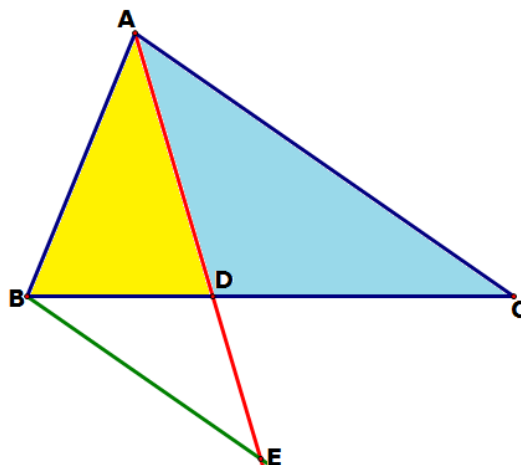
5. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC: "*trong một tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn đó*".

Xét tam giác ABC có AD là đường phân giác trong góc A, D là chân phân giác trong. Chứng minh rằng

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

☺ **Chứng minh định lý**:

■**Cách 1**:



Từ đỉnh B kẻ đường thẳng qua B và song song với cạnh AC, cắt AD tại E.

Theo giả thiết AD là đường phân giác trong góc A nên ta có:

$\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (1).

Mặt khác BE // AC nên chúng ta có:

$\widehat{CAE} = \widehat{BEA}$ (2).

Từ (1) và (2) chúng ta có: $\boxed{\widehat{BAE} = \widehat{BEA}}$

nên tam giác ABE cân ở B suy ra **BA = BE.**

Trong tam giác DAC, theo hệ qua của định lí Thales ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC} = \frac{BA}{AC}$

Thay $\begin{cases} BC = AB - AC \\ BD = AD - AB \end{cases}$, chúng ta có $\dfrac{AB - AC}{AD - AB} = \dfrac{AC}{AD}$.

■**Cách 2**: Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD và ACD, chúng ta có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\widehat{BDA}}{\sin\widehat{BAD}} \text{ và } \frac{AC}{CD} = \frac{\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{DAC}} \ (3)$$

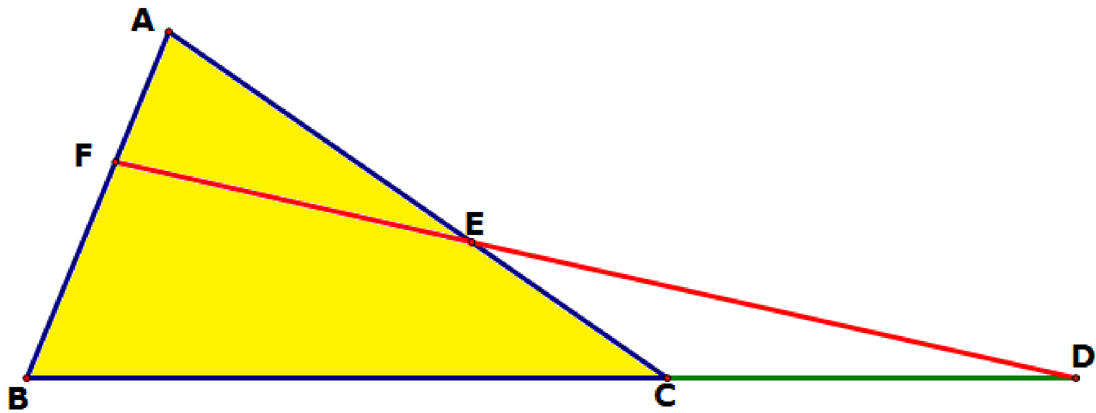
Do AD là đường phân giác trong góc A nên ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (4)

Lại có: $\sin\widehat{BDA} = \sin\widehat{ADC}$ (5).

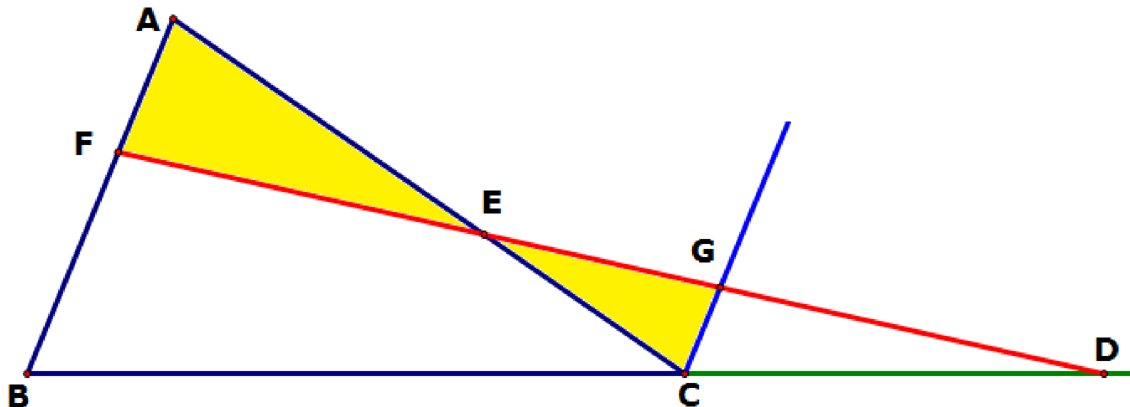
Từ (3), (4), (5) suy ra $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (*định lý được chứng minh*)

6. ĐỊNH LÝ MÉNÉLAUS: “ *cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi* $\dfrac{FA}{FB}.\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA} = 1$ ”.

☺ **Chứng minh định lý**:



■ **Chiều thuận**: Giả sử D, E, F thẳng hàng. Vẽ đường thẳng qua C và song song với AB cắt đường thẳng DE tại G. Theo *định lý Thales thuận*, ta có:



$$\frac{DB}{DC} = \frac{FB}{CG} \ (1), \quad \frac{EC}{EA} = \frac{CG}{FA} \ (2).$$

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được: $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}=\frac{FB}{FA}\Rightarrow\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$ (*điều phải chứng minh*).

■ **Chiều đảo**: Giả sử $\frac{FA}{FB}.\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}=1$***, ta chứng minh D, E, F thẳng hàng.***

Giả sử F' là giao điểm giữa ED và AB. Theo chứng minh trên ta có:

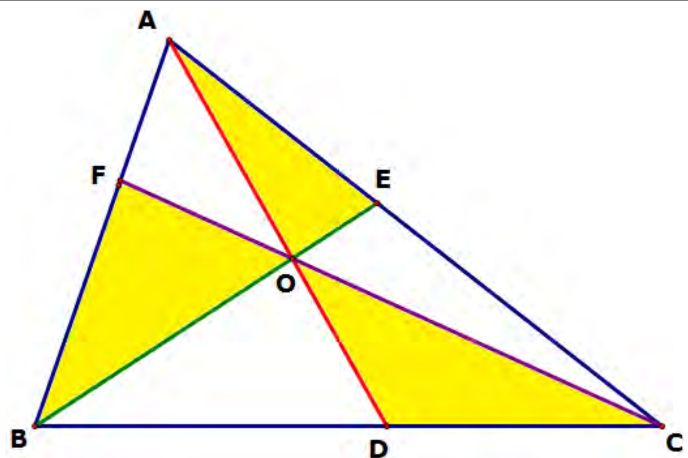
$\frac{F'A}{F'B}.\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}=1$.

Kết hợp giả thiết ta có

$$\frac{FA}{FB}=\frac{F'A}{F'B}\Leftrightarrow\frac{FA}{F'A}=\frac{FB}{F'B}=\frac{FA-FB}{F'A-F'B}=\frac{AB}{AB}=1$$

$\Rightarrow FA=F'A\Rightarrow F'\equiv F$ ***(đpcm)***

7. ĐỊNH LÝ CEVA: " *cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó AD, BE, CF đồng qui khi và chỉ khi* $\frac{FA}{FB}.\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}=-1$ **".**



Ngoài ra định lý còn được biểu một cách tương tự trong lượng giác:

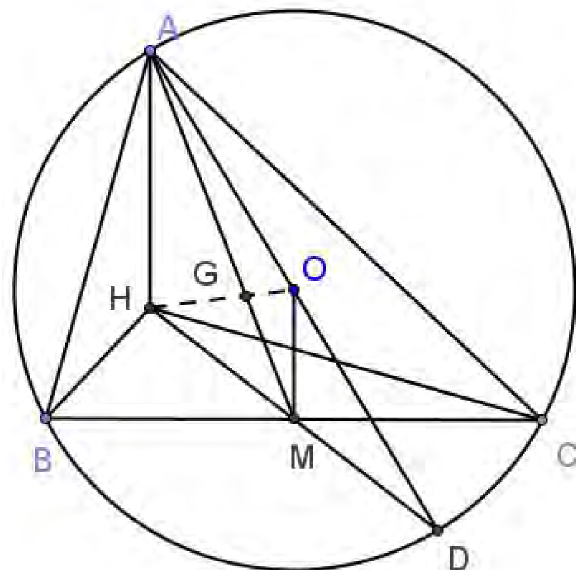
"Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB . Các cạnh AD, BE, CF đồng qui khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}.\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle BCF}.\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE}=1$$

8. CÁC TÍNH CHẤT VỀ ĐƯỜNG THẲNG EULER

►**Tính chất 8.1.** ***Trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên một đường thẳng. (Đường thẳng này được gọi là đường thẳng Euler của tam giác.)***

☺ **Chứng minh** Cho tam giác ABC, gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó BHCD là hình bình hành, suy ra trung điểm M của BC cũng là

trung điểm của HD. Tam giác AHD có OM là đường trung bình, suy ra

$OM = \frac{1}{2} AH$.

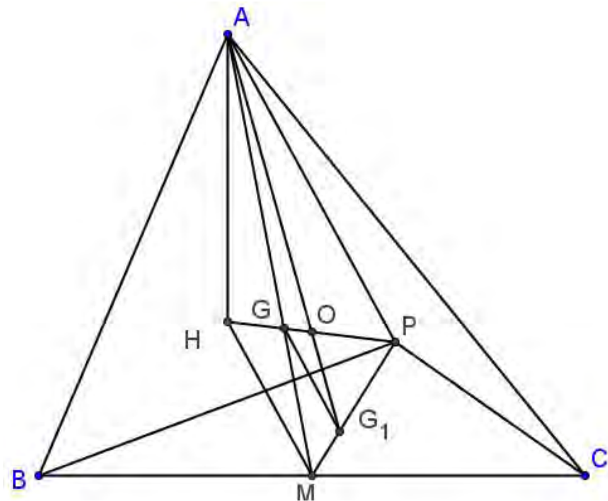
Suy ra GM/GA = OM/AH = $\frac{1}{2}$. Suy ra ΔAHG ~ΔMOG (c.g.c)

Suy ra H,G, O thẳng hàng và GH = 2GO.

Nhận xét. Khi nói đến đường thẳng Euler thì ta chỉ cần cho đường thẳng đi qua hai trong 3 điểm trên.

►**Tính chất 8.2.** ***Cho tam giác ABC có trọng tâm G, trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Gọi P là điểm đối xứng của H qua O. Gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm của các tam giác PBC, PAC và PAB. Chứng minh rằng $G_1A = G_2B = G_3C$ và G_1A, G_2B, G_3C đồng quy.***

☺ **Chứng minh**



Chứng minh GG_1 song song với AP và $GG_1 = \frac{AP}{3}$.

Hơn nữa $GO = \frac{OP}{3}$. Suy ra A, O, G_1 thẳng hàng và $AG_1 = \frac{4AO}{3}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có BG_2, CG_3 cùng đi qua O và $BG_1 = \frac{4BO}{3}, CG_1 = \frac{4CO}{3}$

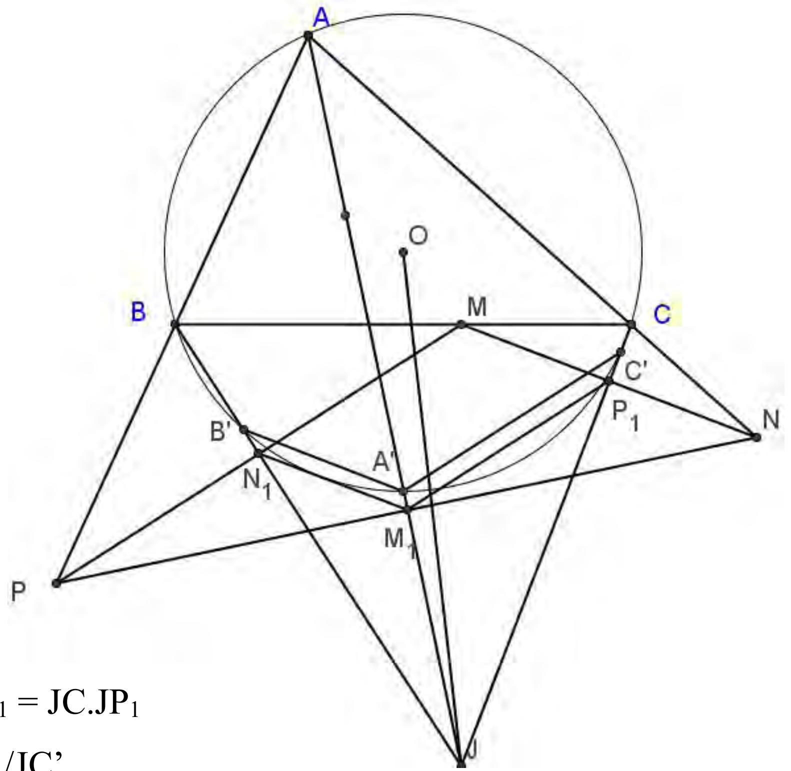
►**Tính chất 8.3.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). (J) là đường tròn bàng tiếp thuộc góc A của tam giác ABC.*

(J) tiếp xúc BC, AB, AC tai. M. N. P.

Chứng minh rằng OJ là đường thẳng Euler của tam giác MNP

☺ **Chứng minh**: Gọi M_1, N_1, P_1 là giao điểm của JA, JB, JC với PN, PM và MN. Khi đó

M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm của PN, PM, MN. Do đó đường tròn Euler của tam giác MNP là đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$.



Gọi A', B', C' là giao điểm của JA, JB và JC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có JB'.JB = JA'.JA = JC'.JC

Hơn nữa ta có $JB.JN_1 = JA.JM_1 = JC.JP_1$

Do đó $JN_1/JB' = JM_1/JA' = JP_1/JC'$

Suy ra M_1N_1 //A'B',

P_1M_1 //A'C' và N_1P_1//B'C'

Từ đó ta có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' và J thẳng hàng. Suy ra tâm ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$ thuộc JO.

Mặt khác J là tâm ngoại tiếp của tam giác MNP.

Vậy JO là đường thẳng Euler của tam giác MPN.

►**Tính chất 8.4.** ***Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), với các đường cao AA', BB' và CC'. Gọi d_a, d_b, d_c là các đường thẳng Euler của các tam giác AB'C', BA'C' và CA'B'. Gọi d'_a, d'_b, d'_c là các đường thẳng đối xứng với d_a, d_b, d_c qua AI, BI và CI. Chứng minh d'_a, d'_b, d'_c đôi một song song.***

☺ **Chứng minh**: Gọi B_1, C_1 đối xứng với B', C' qua AI, khi đó d'_a là đường thẳng Euler của tam giác AB_1C_1, mà B_1C_1 //BC, suy ra d'_a song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Chứng minh tương tự thì d'_b, d'_c song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

►**Tính chất 8.5.** ***Cho tam giác ABC có trực tâm H. Khi đó đường thẳng Euler của các tam giác HAB, HAC và HBC đồng quy.***

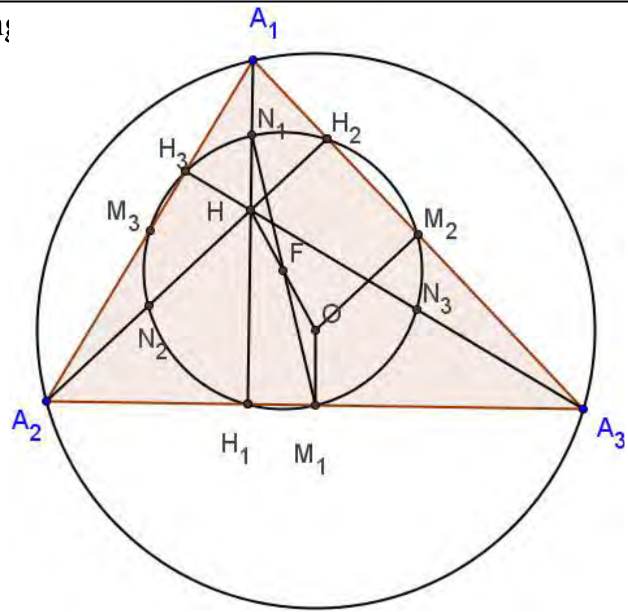
☺ **Chứng minh**: Đồng quy tại trung điểm của OH.

Đến nay người ta vẫn còn tìm ra những tính chất thú vị liên qua đến đường thẳng Euler, và năm 2006 thì kiến trúc sư người Hy Lạp Rostas Vittasko có đưa ra bài toán sau:

►**Tính chất 8.6.** ***Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các đường chéo cắt nhau tại P. Khi đó đường thẳng Euler của các tam giác PAB, PBC, PCD, PAD đồng quy.***

9. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG TRÒN EULER: ***Trong một tam giác thì 9 điểm gồm: trung điểm của 3 cạnh, trung điểm của các đoạn thẳng nối từ trực tâm đến đỉnh, chân các đường cao thì cùng thuộc một đường tròn. (Người ta gọi là đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler)***

Sau đây là một số tính chất của đường



Bài toán 9.1. *Tâm đường tròn Euler là trung điểm của đọan thẳng nối trực tâm và tâm ngoại tiếp.*

Bài toán 9.2. *Cho tam giác ABC trực tâm H. Tia Hx cắt đường tròn Euler tại M và đường tròn ngoại tiếp tại N. Khi đó M là trung điểm của HN.*

Bài toán 9.3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Khi đó đường tròn Euler của tam giác ABC cũng là đường tròn Euler của các tam giác HAB, HAC và HBC. (Từ bài toán 2.3 suy ra bài toán 1.4)*

Sau đây là một định lý rất hay và đẹp của hình học tam giác.

Bài toán 9.4.(Định lý Feuerbach)*Trong một tam giác đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp.*

Chứng minh định lý Feuerbach dựa trên những công cụ mạnh, phép nghịch đảo, tuy nhiên vẫn có cách làm sơ cấp hơn. Sau đây là các bổ đề dùng để chứng minh định lý Feuerbach. Xem như bài tập. Ta sử dụng các ký hiệu trong bài toán 2.

Bài toán 9.4.1.*Giả sử $A_1A_3 > A_2A_3$. Khi đó đường thẳng M_1T tiếp xúc với đường tròn Euler tại M_1 thì tạo với A_2A_3 một góc là $\alpha_2 - \alpha_3$.*

Bài toán 9.4.2.*Gọi D_1 là giao điểm của phân giác trong góc A_1 với A_2A_3. Gọi X_1P là tiếp tuyến đến đường tròn nội tiếp (I), X_1P' là tiếp tuyến của đường*

tròn bàng tiếp góc A (P, P' là các tiếp điểm). Khi đó PX_1P' song song với M_1T.

Bài toán 9.4.3.*Gọi Q là giao điểm của M_1P với (I), khi đó Q cũng thuộc đường tròn Euler.*

Bài toán 9.4.4.*Hai đường tròn Euler và đường tròn nội tiếp giao nhau tại Q. Chứng minh rằng chúng có chung tiếp tuyến.*

Một số bài toán liên quan đến đường tròn Euler.

Bài toán 9.5.*(VMO 2009) Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B (A khỏc B). Một điểm C di động trờn mặt phẳng sao cho $\angle ACB = \alpha = const$ ($0^0<\alpha<$ 1800). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lươt tại D, E, F. AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N.*

a)Chứng minh rằng: MN cú độ dài khụng đổi.

b)Chứng minh rằng: (DMN) luôn đi qua một điểm cố định khi C lưu động.

Bài toán 9.6. *Cho tam giác ABC trung tuyến AM, O là tâm ngoại tiếp. Khi đó đường thẳng qua M vuông góc với AO tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Bài toán 9.7. *Chứng minh rằng các đường thẳng d_a, d_b, d_c trong bài toán 1.3 đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn Euler.*

Bài toán 9.8. *Tam giác ABC có các đường cao lần lượt là AD, BE và CF đồng quy tại trực tâm H. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác HBC. Chứng minh $OA \perp MN$.*

10.CÁC TÍNH CHẤT ĐẶC BIỆT TRONG ĐƯỜNG TRÒN – TAM GIÁC:

►**Tính chất 10.1.***Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm I, G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi D là trung điểm AB, E là trọng tâm tam giác ACD $\Rightarrow I$ là trực tâm tam giác DEG và suy ra IE vuông góc DG.*

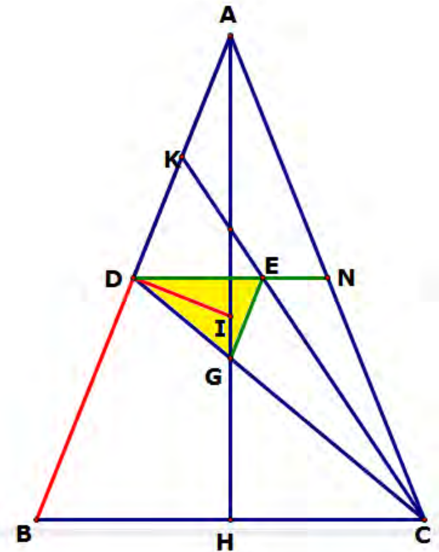
☺ **Chứng minh**:

Gọi H, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AD và E là giao điểm KC và DH.

Ta có $G = DC \cap AH \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC suy ra

$\frac{CG}{CD} = \frac{CE}{CK} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{GE // AB}$ (theo định lý Thales đảo).

Lại có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow DI \perp AB$ nên $\boxed{GE \perp DI}$



Lại có $\begin{cases} DE // BC \\ GI \perp BC \end{cases} \Rightarrow GI \perp DE$.

Ta có $\begin{cases} GE \perp DI \\ GI \perp DE \\ I = ID \cap IG \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác DEG

Trong tâm giác DEG, EI qua I nên $\boxed{EI \perp DG}$ (đpcm).

►**Tính chất 10.2.** *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, AH . Chứng minh rằng Q là trực tâm tam giác ACP và suy ra $AP \perp CQ$.*

☺ **Chứng minh**:

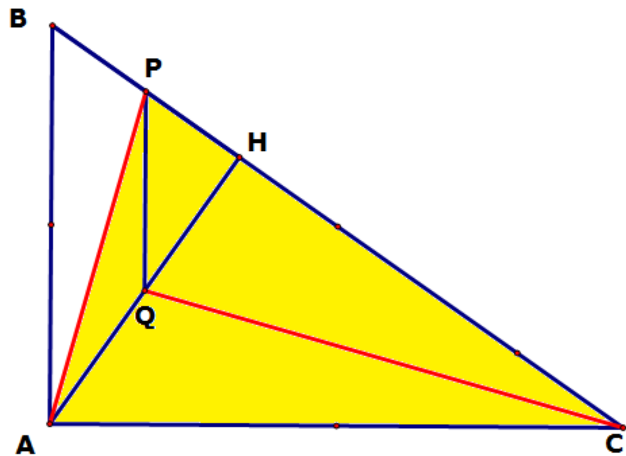
Do P, Q lần lượt là trung điểm BH, AH nên ta suy ra PQ là đường trung bình tam giác ABH

Suy ra PQ // AB.

Mà $AB \perp AC$ (gt)

Suy ra $PQ \perp AC$.

Mặt khác AH vuông góc PC có Q là giao điểm AQ và QC



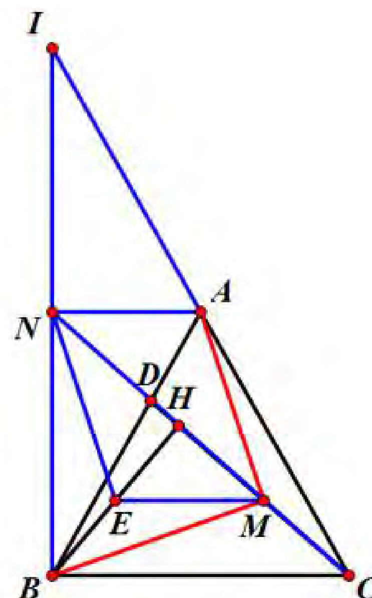
Suy ra H là trực tâm tam giác ACP $\Rightarrow AP \perp QC$ (đpcm).

►**Tính chất 10.3.** *Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là điểm nằm trên cạnh AB sao cho AB = 3AD và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD, M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng $AM \perp BM$.*

☺**Gợi ý chứng minh**:

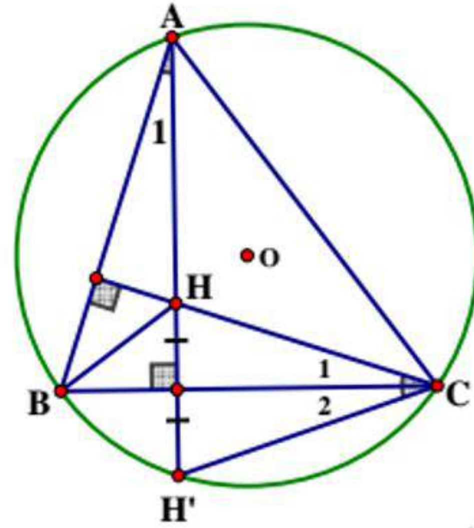
Gọi N, I là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với BC với các đường thẳng CD và CA.

Ta chứng minh tứ giác NAME là hình bình hành và E là trực tâm tam giác NBM



Từ đó, ta suy ra BM vuông góc AM.

►**Tính chất 10.4.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có H là trực tâm. Gọi H’ là giao điểm của AH với đường tròn (O) suy ra H’ đối xứng với H qua BC.*



☺**Chứng minh**:

Ta có góc $\angle A_1 = \angle C_1$ (do cùng phụ với góc $\angle ABC$)

Lại có góc $\angle A_1 = \angle C_2$ (góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ BH’ nên bằng nhau).

Suy ra góc $\angle C_1 = \angle C_2$ suy ra $\Delta HCH'$ cân tại C suy ra BC là trung trực của HH’

Do đó H’ đối xứng với H qua BC.

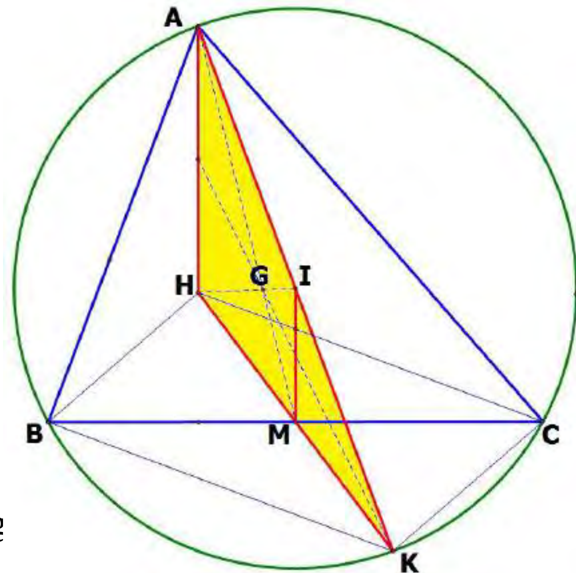
(đpcm).

►**Tính chất 10.5.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có tâm I và có H là trực tâm, G là trọng tâm. Kẻ đường kính AK, M là trung điểm BC. Chứng minh rằng:*

a. *Tứ giác BHCK là hình bình hành.*

b. *G cũng là trọng tâm tam giác AHK suy ra H, G, I thẳng hàng.*

c. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ *và* $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HI}$.



☺**Chứng minh**:

Ta có: góc $\angle ACK = 90^0$ (do nhìn đường kinh AK) suy ra KC vuông góc AC.

Mà BH vuông góc AC nên ta có **BH // KC (1).**

Tương tự ta có góc $\angle ABK = 90^0$ (do nhìn đường kinh AK) suy ra KB vuông góc AB.

Mà CH vuông góc AB nên ta có: **CH // KB (2).**

Từ (1) và (2) suy ra *tứ giác BHCK là hình bình hành*.

Lại có M là trung điểm BC suy ra M cũng là trung điểm HK và I là trung điểm AK

Nên ta suy ra IM là đường trung bình tam giác AHK suy ra ***IM // AH*** *và AH = 2IM*.

Gọi $G' = AM \cap HI$ ta có G’ là trọng tâm tam giác AHK $\Rightarrow \frac{AG'}{AM} = \frac{HG'}{HI} = \frac{2}{3}$

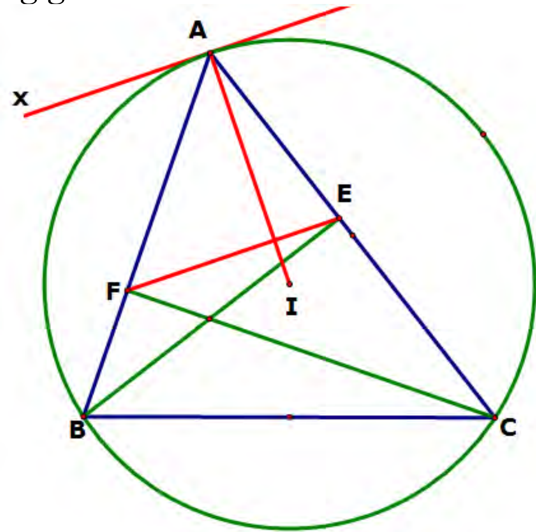
Mặt khác do G là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow AG = AG' \Rightarrow G \equiv G'$

Nên *G cũng là trọng tâm tam giác ABC suy ra H, G, I thẳng hàng.*

►**Tính chất 10.6.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I, có BE và CF là 2 đường cao. Chứng minh rằng IA vuông góc EF.*

☺**Chứng minhcách 1**:



Kẻ tiếp tuyến Ax ta có: $\angle xAB = \angle ACB$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp vì cùng chắn cung AB).

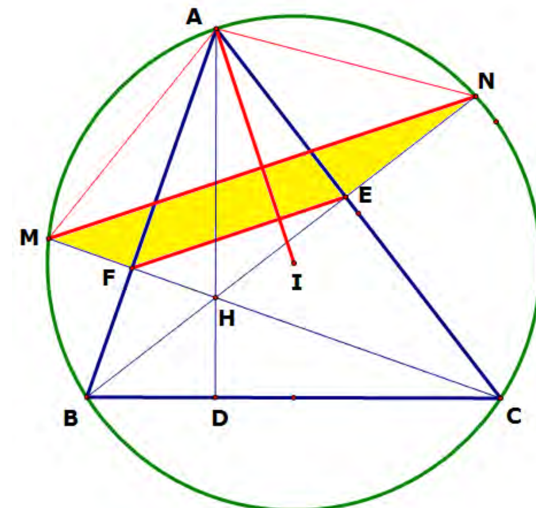
Mặt khác ta có: $\angle BEC = \angle CFB = 90^0$ (2 góc liên tiếp cùng chắn cung BC) suy ra EFBC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ACB = \angle AFE$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Do đó ta có $\angle xAB = \angle EAF$ (theo vị trí so le trong) suy ra Ax // EF.

Mà $IA \perp Ax$

Suy ra $\boxed{IA \perp EF}$ (***đpcm***)

☺**Chứng minhcách 2**:



CF cắt (I) tại M, BE cắt (I) tại N.

Ta có: $\angle MBA = \angle MCA$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

Mặt khác, $\angle ABN = \angle MCA$ (2 góc cùng phụ với góc BAC).

Do đó $\angle MBA = \angle ABN \Rightarrow AM = AN$

$\Rightarrow \boxed{IA \perp MN}$

Ta có tam giác BMH có BF vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên cân tại đỉnh B

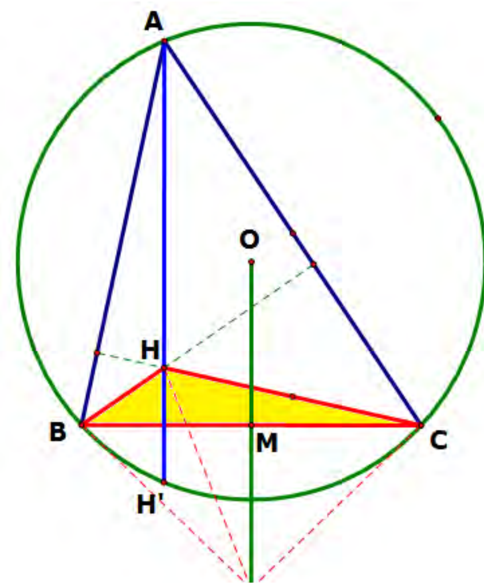
Suy ra F là trung điểm MH.

Chứng minh tương tự ta có E là trung điểm HN.

Do đó EF là đường trung bình tam giác HMN suy ra **EF // MN**

Vì vậy ***IA vuông góc EF. (đpcm)***

►**Tính chất 10.7.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có H là trực tâm. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC suy ra O đối xứng với I qua BC.*



☺**Chứng minh**:

Gọi H' là giao điểm của AH với đường tròn (O) suy ra tức giác ACH'B nội tiếp

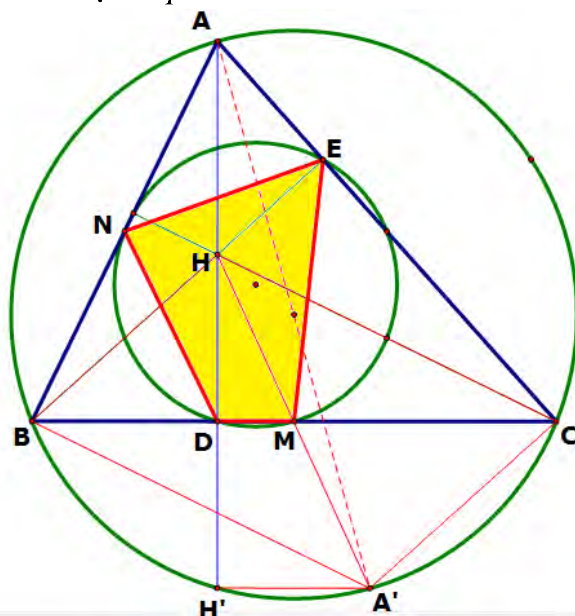
đường tròn (O) suy ra O đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BH'C.

Mặt khác H và H' đối xứng nhau qua BC (*xem lại tính chất 10.4*) suy ra tam giác HBC đối xứng với tam giác H'BC qua BC. Mà O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp H'BC và HBC

Suy ra I và O đối xứng nhau qua BC.

►**Tính chất 10.8.***Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường cao từ A, B. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm BC và AB. Chứng minh rằng tứ giác MEND nội tiếp.*

☺**Chứng minh**:



Trước hết ta có thể vận dung bổ đề về đường tròn 9 điểm (đường tròn Euler) để chứng minh tính chất này. (*bạn đọc có thể tham khảo cách chứng minh tính chất trên qua bài toán 4.6, chủ đề 8 chương 1: phép biến hình và các ứng dụng của phép biến hình)*

Ta có D là trung điểm HH' (*theo tính chất 10.4*), M là trung điểm HA' (*do tính chất 10.5*)

Như vậy ta có phép vị tự: $\begin{cases} A' \xrightarrow{V_H} M \\ H' \xrightarrow{V_H^{\frac{1}{2}}} D \end{cases}$.

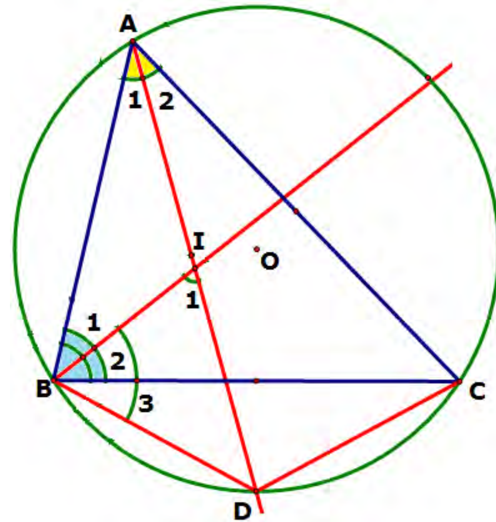
Mà A', H' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC suy ra 2 điểm M, D thuộc đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm O qua phép vị tự tâm H tỉ số k = $\frac{1}{2}$

Chứng minh tương tự ta cũng có: N, E thuộc đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm O qua phép vị tự tâm H tỉ số k = $\frac{1}{2}$.

Do đó ta có D, M, E, N cũng thuộc đường tròn (C') nên tứ giác DMEN là tứ giác nội tiếp.

►**Tính chất 10.9.***Cho tam giác ABC , gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, AI cắt đường tròn (O) tại D. CMR: DB = DI = DC.*

☺**Chứng minh**:



Ta có góc $\angle I_1 = \angle A_1 + \angle B_1$ do góc $\angle I_1$ là góc ngoài của tam giác ABI.

Mà góc $\angle B_1 = \angle B_2$ (do BI là phân giác của tam giác ABC) và $\angle A_1 = \angle A_2$ (do AI là phân giác tam giác ABC)

Kết hợp với $\angle A_2 = \angle B_3$

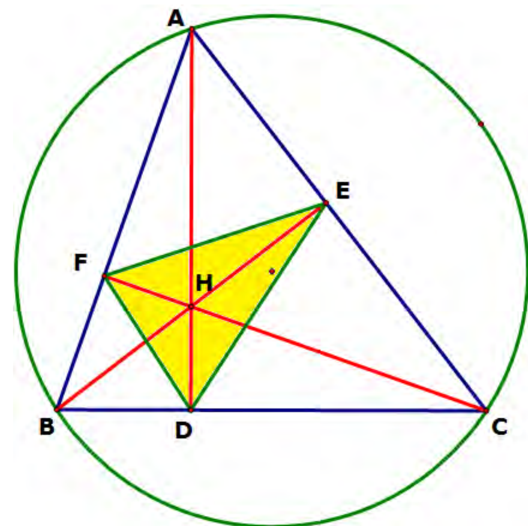
$\Rightarrow \angle I_1 = \angle B_2 + \angle B_3 = \angle IBD$

$\Rightarrow \Delta IBD$ cân tại D suy ra DI = DB **(1)**

Do AI là phân giác cắt đường tròn (O) tai D nên cung BD bằng cung CD suy ra **DC = DB (2)**

Từ (1), (2) ta suy ra **DI = DB = DC (đpcm).**

►**Tính chất 10.10.***Cho tam giác ABC , gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.*



☺**Chứng minh**:

Tứ giác ECDH nội tiếp (do có $\angle HEC + \angle HDC = 90^0 + 90^0 = 180^0$)

suy ra $\angle HDE = \angle HCE$ (1)

Mà góc $\angle FBH = \angle HCE$ (2).

Tứ giác FHDB nội tiếp (do có $\angle HFB + \angle HDB = 90^0 + 90^0 = 180^0$) suy ra $\angle FBH = \angle FDH$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $\angle HDE = \angle FDH$ suy ra DH là tia phân giác của tam giác DEF.

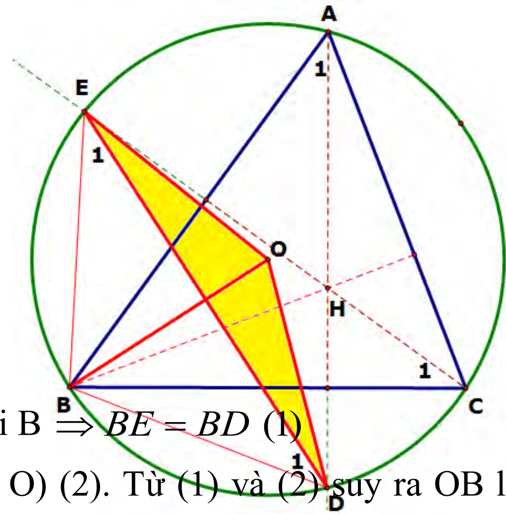
Chứng minh tương tự ta có: EH, FH là tia phân giác của tam giác DEF.

Lại có H là giao điểm của EH, FH, DH nên ***H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC*** (đpcm)

►**Tính chất 10.11.***Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi D, E là giao điểm của đường tròn (O) với các đường cao qua A và C. Chứng minh rằng OB là trung trực của ED.*

☺**Chứng minh**:

Ta có góc $\begin{cases} \angle E_1 = \angle A_1 = \dfrac{sd\,BD}{2} \\ \angle D_1 = \angle C_1 = \dfrac{sd\,BE}{2} \\ \angle C_1 = \angle A_1 \end{cases}$

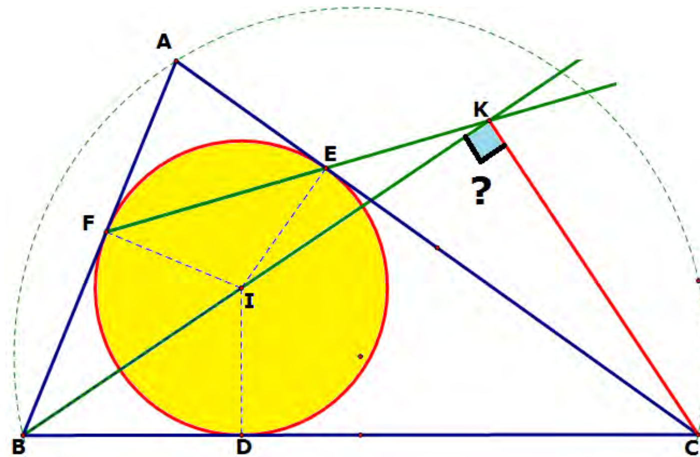


$\Rightarrow \angle E_1 = \angle D_1$ suy ra tam giác EBD cân tại B $\Rightarrow BE = BD$ (1)

Mà OE = OD (bán kính đường tròn tâm O) (2). Từ (1) và (2) suy ra OB là trung trực của ED.

►**Tính chất 10.12.** *Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Gọi K là giao điểm Của EF và BI. Chứng minh rằng* $CK \perp BK$

☺**Chứng minh**:



Ta có: $\angle BIC = 90^0 + \angle BAC \Rightarrow \angle CIK = 90^0 - \angle BAC$.

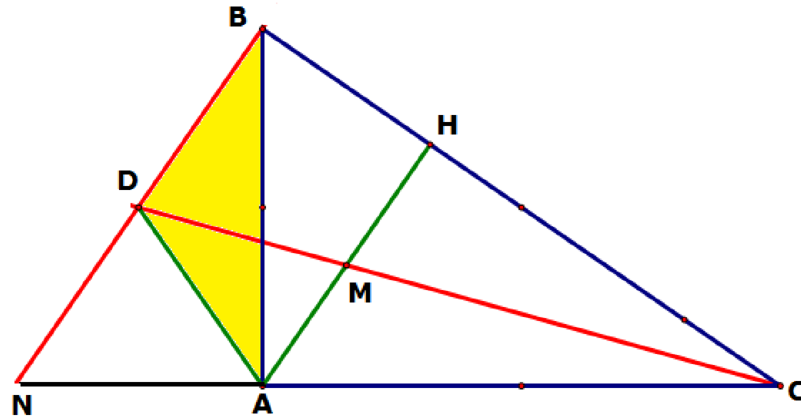
Lại có: $\angle CEK = \angle AEF = 90^0 - \angle BAC$ (vì tam giác AEF cân tại A)

Do đó tứ giác IEKC là tứ giác nội tiếp suy ra

$\angle IKC = \angle IEC = 90^0 \Rightarrow \angle BKC = 90^0$

►**Tính chất 10.13.** *Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. M là trung điểm AH. Đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt cắt CM tại D. Chứng minh rằng tam giác DAB cân.*

☺**Chứng minh**:



Gọi N là giao điểm giữa BD và AC. Ta có $\angle BAN = 90^0$.

Vì BN vuông góc BC (gt), AH vuông góc BC (gt) nên **AH // BN**

Xét tam giác BDC có BD // HM suy ra $\frac{MH}{BD} = \frac{CM}{CD}$ (hệ quả của định lý Thales)

Tương tự ta có: $\frac{AM}{DN} = \frac{CM}{CD}$. Do đó $\frac{MH}{BD} = \frac{AM}{DN}$, mà MH = AM (do M là trung điểm)

Suy ra BD = DN.

Lại có tam giác ABN vuông tại A, AD là trung tuyến nên AD = DB

Suy ra tam giác DAB cân tại D.

►**Tính chất 10.14.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I có AD là đường phân giác trong góc A.(D là chân phân giác trong). Gọi d là tiếp tuyến tại A của đường tròn (C) cắt BC tại E. Chứng minh rằng tam giác AED cân tại E.*

☺**Chứng minh**:

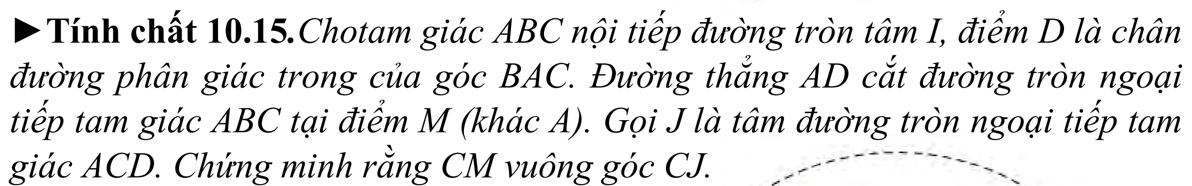
Gọi d là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

E là giao điểm của d và đường thẳng BC (do AD không vuông góc d nên E luôn tồn tại)

Và ta có thể giả sử $EB < EC$ .Ta có $\angle EAB = \angle ACB$ và $\angle BAD = \angle DAC$,

Suy ra $\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle ACB + \angle DAC = \angle ADE$

Suy ra ΔADE cân tại E.



►**Tính chất 10.15.** *Chotam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I, điểm D là chân đường phân giác trong của góc BAC. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm M (khác A). Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Chứng minh rằng CM vuông góc CJ.*

☺**Chứng minh**:

Ta có: $\widehat{AJD} = 2\widehat{CAD}$ (do tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I).

Mà $\widehat{CAD} = \widehat{BAD} = \widehat{BCM}$

$\Rightarrow \widehat{CJD} = 2\widehat{BCM}$

Ta lại có: ΔCJD cân tại J nên

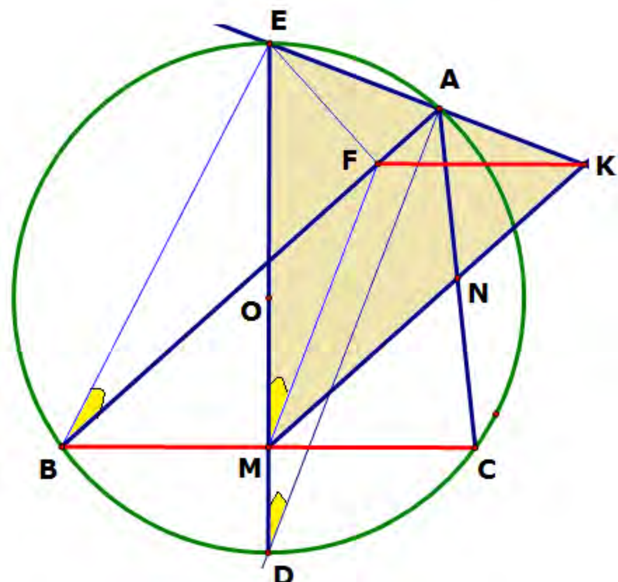
$\widehat{CJD} + 2\widehat{CJD} = 180^o$

$\Rightarrow 2\widehat{BCM} + 2CJD = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{BCM} + CJD = 90^o$

Do đó **CM vuông góc CJ.**

►**Tính chất 10.16.** *Cho tam giác ABC (AB > AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc BAC cắt đường tròn (O) tại điểm E. M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA. F là hình chiếu vuông góc của E trên AB, K là giao điểm MN và AE. Chứng minh rằng KF // BC.*



☺**Chứng minh**:

Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A, ta thấy $AD \perp AE$ (1).

Mặt khác, dễ thấy ED là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với dây cung BC tại M.

Từ đó bốn điểm B, E, F, M cùng nằm trên một đường tròn, suy ra

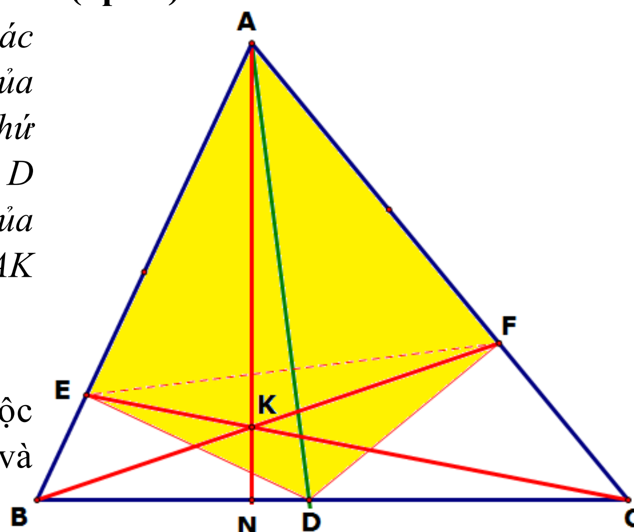
$$\angle FME = \angle FBE = \angle ABE = \angle ADE \Rightarrow MF // AD \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MF \perp AE$ (3) . Lại có MN // AB. EF vuông góc AB nên EF // MN (4).

Từ (3) và (4) ta thấy F là trực tâm tam giác EKM suy ra KF vuông góc EM

Mà EM vuông góc BC suy ra **FK // BC (đpcm).**

►**Tính chất 10.17.** *Cho tam giác nhọn ABC , tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC. K là giao điểm của CE và BF. Chứng minh rằng AK vuông góc BC.*



☺**Chứng minh**:

Kẻ AN vuông góc BC (N thuộc BC), suy ra các tứ giác AEND và AFDN nội tiếp.

Từ đó suy ra BD.BN = BE.BA và CN.CD = CF.CA.

Suy ra $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BE}{CF} \Rightarrow \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{BE}{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NC}.\dfrac{FC}{FA}.\dfrac{EA}{EB} = 1 \ (do\ AE = AF)$.

Theo *định lý Ceva đảo,* ta có AN, CE, BF đồng quy tại K suy ra AK vuông góc BC.

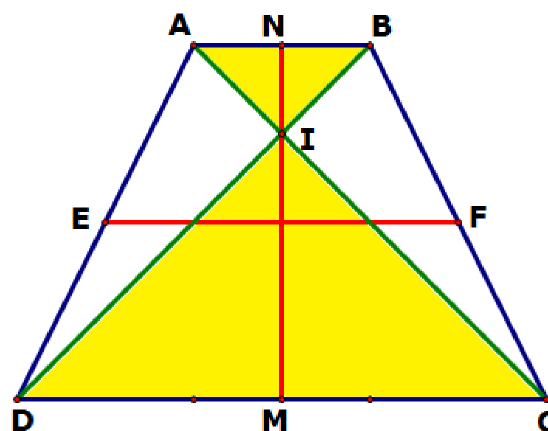
11. CÁC TÍNH CHẤT ĐẶC BIỆT TRONG TỨ GIÁC:

►**Tính chất 11.1.** *Trong một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc thì độ dài đường cao bằng độ dài đường trung bình*

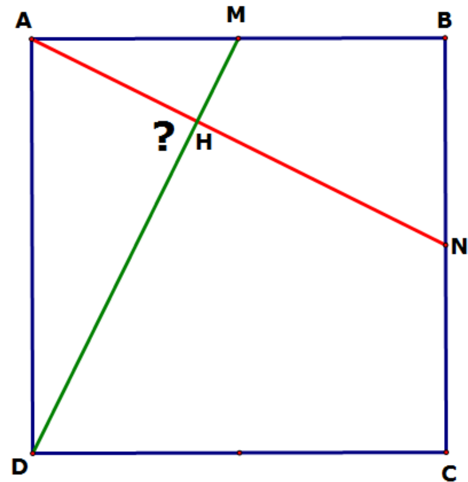
☺**Chứng minh**:

Do ABCD là hình thang cân, AC vuông BD tại I suy ra $\Delta AIB, \Delta CID$ vuông cân tại I

Suy ra IN, IM là các đường cao tương ứng đồng thời cũng là đường trung tuyến.



Suy ra $\begin{cases} NI = \dfrac{AB}{2} \\ MI = \dfrac{CD}{2} \end{cases} \Rightarrow NI + MI = \dfrac{AB + CD}{2} = EF = MN \Rightarrow \boxed{EF = MN}$ (đpcm)



►Tính chất 11.2. *Cho hình vuông ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC của hình vuông ABCD. Chứng minh: AN vuông góc DM.*

☺**Chứng minh**:

Ta có: $\Delta ABN = \Delta DAM\ (c - g - c)$

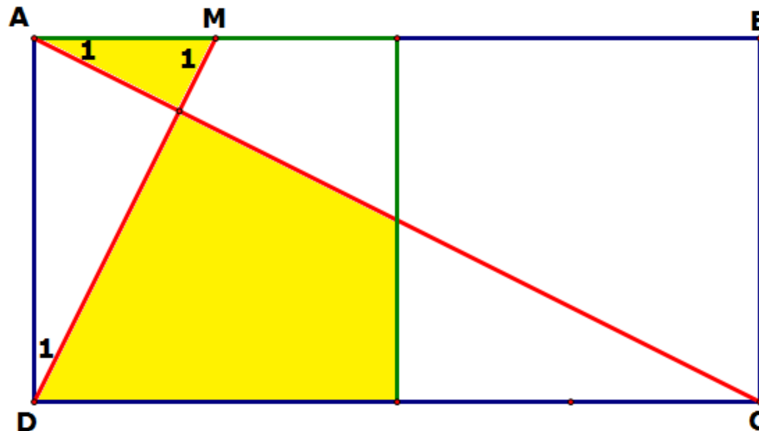
$\Rightarrow \angle A_1 = \angle D_1$.

Mà $\angle D_1 + \angle M_1 = 90^0 \Rightarrow \angle A_1 + \angle M_1 = 90^0$

$\Rightarrow \Delta AHM \perp H \Rightarrow AN \perp DM$ (đpcm)

►Tính chất 11.3. *Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD, M là một điểm trên AB = 2AD, M là một điểm trên AB sao cho AB = 4AM. Chứng minh DM vuông góc AC.*

☺**Chứng minh**:



Ta có: $\angle D_1 + \angle M_1 = 90^0 (1)$.

Mặt khác: $\begin{cases} \tan A_1 = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2} \\ \tan D_1 = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A_1 = D_1$ thay vào (1) ta được

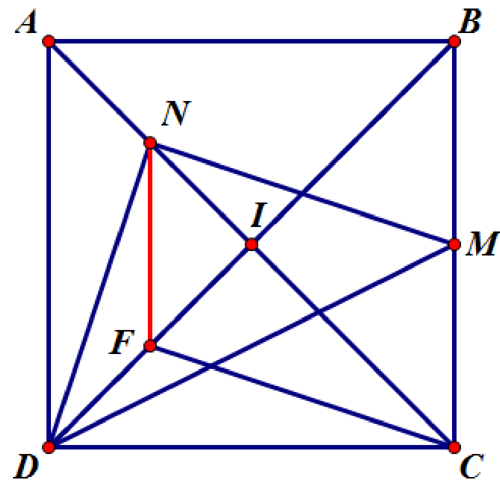
$\angle A_1 + \angle M_1 = 90^0 (1)$

Suy ra **DM vuông góc AC tại H**. (với H là giao điểm DM và AC) (đpcm).

Chú ý: ta cũng có thể E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. I là trung điểm DF và G là giao điểm AC và EF. Theo định lý thales thuận ta có G là trung điểm EF. Dựa vào tính chất 11.2 ta suy ra AC vuông góc EI. Như vậy ta chỉ cần chứng minh MEID là hình bình hành (*việc chứng minh xin dành cho bạn đọc*)

►**Tính chất 11.4.** *Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 4AN$. Chứng minh rằng tam giác DMN vuông tại N.*

☺**Chứng minh**:



Gọi F là trung điểm ID suy ra NF là đường trung bình tam giác IAD suy ra NF vuông góc CD.

Mặt khác DI vuông góc NC và F là giao điểm NF và DI

Suy ra F là trực tâm tam giác NCD suy ra FC vuông ND (1).

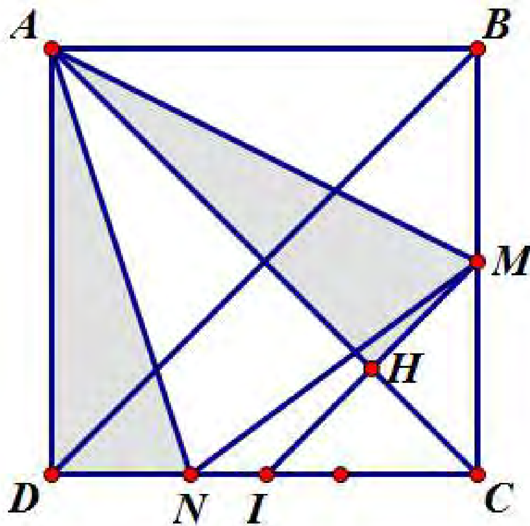
Mặt khác ta có NF = MC và NF // MC suy ra tứ giác NMCF là hình bình hành

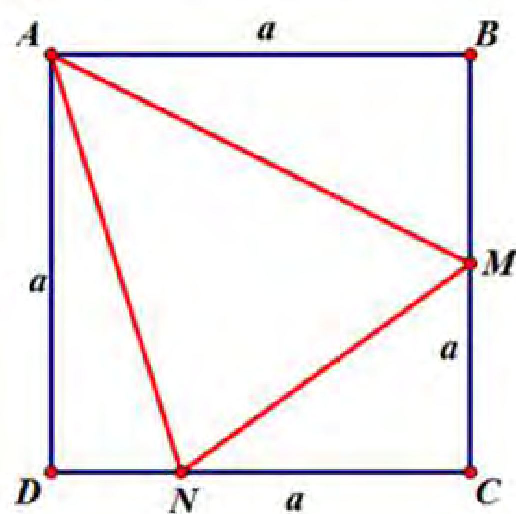
Do đó NM // FC.

Từ (1) ta suy ra MN vuông ND tại N

Nên **tam giác DMN vuông tại N** (đpcm).

►**Tính chất 11.5.** *Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm trên CD sao cho $CN = 2ND$. Chứng minh góc MAN bằng 45^0 .*





☺**Chứng minhcách 1**:

Gọi I là trung điểm CD và H là giao điểm IM và AC suy ra H là trung điểm IM.

Ta có: $\begin{cases} \tan\widehat{AND} = \dfrac{AD}{DN} = \dfrac{3DN}{DN} = 3 \\ \tan\widehat{AMH} = \dfrac{AH}{HM} = \dfrac{\frac{3AC}{4}}{\frac{AC}{4}} = 3 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AND} = \widehat{AMH}$.

Lại có $\widehat{ADN} = \widehat{AHM} = 90^0$

Suy ra tam giác ADN đồng dạng tam giác AHM (g–g) suy ra

$\angle NAD = \angle MAH$

Mà $\angle NAD + \angle HAN = 45^0 \Rightarrow \angle MAH + \angle HAN = 45^0 \Rightarrow \angle MAN = 45^0$ (đpcm).

☺**Chứng minhcách 2**: Đặt cạnh hình vuông AB = a > 0

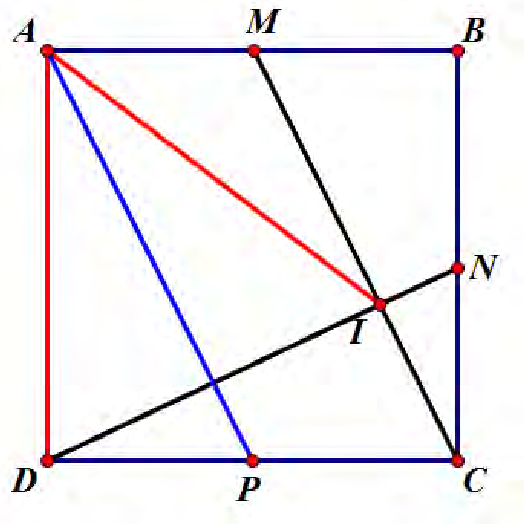
Ta có: $\begin{cases} AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{3} \\ AM = \sqrt{BM^2 + AB^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ MN = \sqrt{NC^2 + MC^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{5a}{6} \end{cases}$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác AMN ta có:

$\cos \angle MAN = \dfrac{MA^2 + NA^2 - MN^2}{2MA.NA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\angle MAN = 45^0}$ (đpcm).

►**Tính chất 11.6.** *Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC. Gọi I là giao điểm của CM và DN. Chứng minh AI = AD.*

☺**Chứng minh**:



Gọi P là trung điểm CD. Ta có CPMA là hình bình hành (do PC = AM và PC // AM)

Suy ra AP // MC. Mặt khác theo *tính chất 11.2*, ta có $MC \perp DN$.

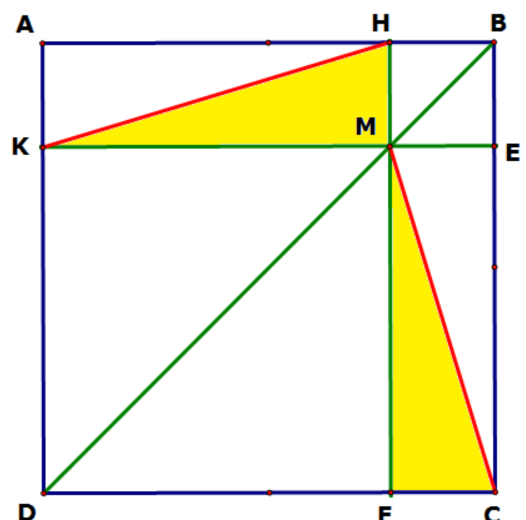
Do đó, AP vuông góc DI.

Lại có AP // MC có P là trung điểm CD

Suy ra AP đi qua trung điểm DI nên AP vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến.

Do đó ta có tam giác ADI cân tại A suy ra AD = AI. (đpcm)

►**Tính chất 11.7.** *Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường thẳng BD (M khác B, M khác D). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AD. Chứng minh CM vuông góc HK.*



☺**Chứng minh**:

Gọi $E = KM \cap BC$, $F = CD \cap MF$.

Xét: $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{KH} = \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AH}\right)$

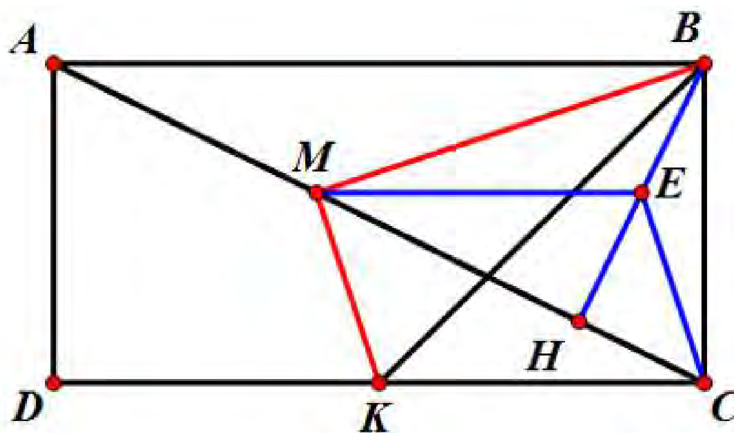
$= \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}$

Với $\begin{cases} \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{KA} = MD.KA\cos(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{KA}) = MD.KA.\cos 135^0 \\ \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AH} = MD.AH\cos(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{AH}) = MD.\text{AH}.\cos 135^0 \\ \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{KA} = 0 \\ \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH} = DC.AH\cos(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AH}) = DC.\text{AH}.\cos 0^0 \end{cases}$

Do đó:

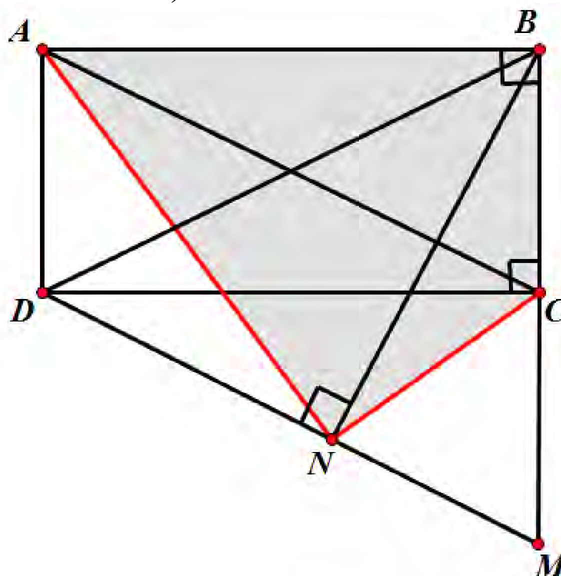
$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{KH} = \frac{-MD}{\sqrt{2}}.AD + CD.AH = -AH.\text{CD} + \text{CD}.\text{AH} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{MC} \perp \text{KH}}$$

►**Tính chất 11.8.** *Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường chéo AC. Các điểm M, K lần lượt là trung điểm của AH và CD. Chứng minh rằng BM vuông KM.*



☺**Gợi ý chứng minh**: (*xem cách chứng minh tính chất 11.4 – Lấy điểm phụ E là trung điểm BH ta sẽ được lời giải cho bài toán*).

►**Tính chất 11.9.** *Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Chứng minh rằng AN vuông góc CN.*



☺**Chứng minh**:

Ta có: $\angle DNB = \angle DCB = 90^0$ suy ra tứ giác BCND nội tiếp. (2 góc liên tiếp cùng nhìn cạnh BD)

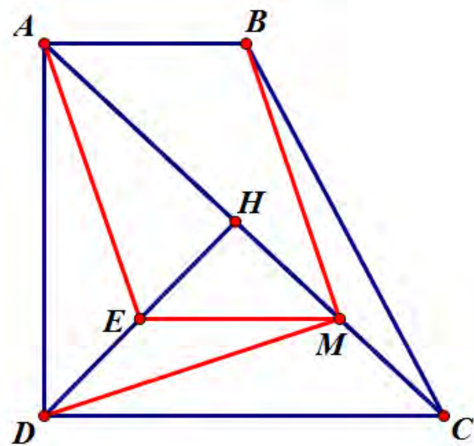
Do đó, $\angle BNC = \angle BDC$ (do cùng chắn cung BC)

Lại có $\angle CAB = \angle BDC$ (tính chất của hình chữ nhật ABCD)

Suy ra $\angle CAB = \angle BNC$ nên tứ giác ABCN nội tiếp (2 góc liên tiếp cùng nhìn cạnh BC)

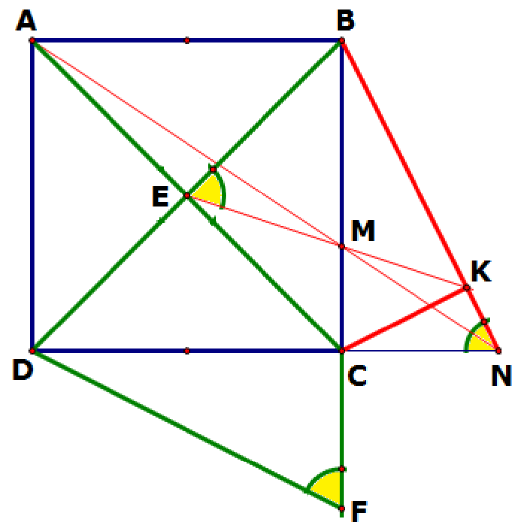
Do đó: $\angle ABC + \angle ANC = 180^0 \Rightarrow \angle ANC = 90^0 \Rightarrow \boxed{AN \perp NC}$ (đpcm)

►**Tính chất 11.10.** *Cho hình thang ABCD vuông tại A và D có CD = 2AB. Gọi H là hình chiếu của D trên đường chéo AC, M là trung điểm của đoạn thẳng HC. Chứng minh rằng BM vuông góc MD.*



☺**Gợi ý chứng minh**: Lấy điểm phụ E là trung điểm DH sẽ tìm được lời giải cho bài toán.

►**Tính chất 11.11.** *Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A cắt cạnh BC tại M, cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EM và BN. Chứng minh rằng CK vuông góc BN.*



☺**Chứng minh** :

Trên tia đối của tia BC, dựng điểm F sao cho CF = CN.

Xét tam giác DCF và BCN có :

$$\begin{cases} \angle DCF = \angle BCN = 90^0 \\ CF = CN\ (gt) \\ DC = BC\ (gt) \end{cases} \Rightarrow \Delta DCF = \Delta BCN\ (c-g-c) \Rightarrow \angle DFC = \angle BNC\ (1)$$

Tam giác DCB vuông tại C có CE vuông góc BD nên $BC^2 = BE.BD$ (2)

Mặt khác, do AB // CN nên

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{CN} = \frac{BC}{CF} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow BC^2 = BM.BF\ (3)$$

Từ (2) và (3) cho BE.BD = BM.BF

$$\Rightarrow \frac{BE}{BF} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \Delta BEM \backsim \Delta BFD\ (c-g-c) \Rightarrow \angle BEM = \angle BFD\ (4)$$

Từ (1) và (4) cho $\angle BNC = \angle BEM \Rightarrow$ tứ giác DEKN nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc đối trong) suy ra $\angle BKE = \angle BDC = 45^0$. Lại có: $\angle ECB = 45^0$ (tính chất hình vuông).

Suy ra $\angle ECB = \angle EKB = 45^0 \Rightarrow$ tứ giác BKCE nội tiếp

Suy ra $\angle BKC = \angle BEC = 90^0 \Rightarrow \boxed{CK \perp BN}$ (đpcm).

Chương 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN VÀ GIẢI NHANH MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG OXY

Trong chương 2 này, thầy sẽ tập trung giới thiệu cho các em các phương pháp tiếp cận một bài toán hình là như thế nào? Nhưng trước khi chúng ta bắt đầu vào từng chủ đề. Thầy mời các em xem bảng phân tích các câu hỏi hình học Oxy đã xuất hiện trong đề thi Đại học – Cao đẳng từ 2002 đến 2014.

Các vấn đề liên quan đến **HÌNH HỌC PHẲNG OXY** (1 điểm)	**Số lần xuất hiện**			**Tỉ lệ % ra đề**
	Khối A A1	**Khối B**	**Khối D**	
* Bài Toán liên quan đến tìm Tọa độ điểm	9	12	8	***80,5%***
* Bài Toán liên quan đến viết PT Đường thẳng (d)	5	5	6	***40,0%***
* Bài Toán liên quan đến viết PT Đường Tròn (C)	4	6	4	***30,8%***
* Bài Toán liên quan đến Đường Elip (E)	3	2	2	*19,4%*
* Bài Toán liên quan đến Max – Min cực trị hình học	2	0	1	*8,3%*
* Bài Toán liên quan đến Hyperbol (H) (Nâng Cao)	1	1	0	*5,0 %*
* Bài Toán liên quan đến Parabol (Nâng Cao)	0	0	1	*2,7 %*

*Theo xu hướng giảm tải của **Bộ GD&ĐT** thì những năm gần đây các bài toán liên quan về Hyperbol, Parabol gần như không còn xuất hiện nữa mà thay vào đó là các dạng toán tổng hợp liên quan đến đường tròn, đường thẳng lồng vào trong các khối hình tam giác, tứ giác với các câu hỏi quen thuộc như tìm điểm? lập phương trình đường?... Chính vì lẽ đó, thầy sẽ trình bày các cách tiếp cận dựa trên các chủ đề trên.*

*Đối với **các cách tiếp cận** một bài toán hình học trong mặt phẳng Oxy, thầy thiết nghĩ chúng ta cần nắm vững một số nguyên tắc chung cho mọi chủ đề mà ta sẽ giải quyết sau đây. Cụ thể là:*

■ **NHỮNG NGUYÊN TẮC CHUNG:**

►***Nguyên tắc 1: "Đặt càng ít ẩn càng tốt!"***

Tại sao ta phải đặt càng ít ẩn càng tốt*? Để trả lời cho câu hỏi này, thì trước*

*tiên chúng ta cần hiểu việc đặt ẩn ở đây là nhằm mục đích « **đại số hóa hình học** », nghĩa là chuyển bài toán theo « ngôn ngữ hình học » về bài toán theo « ngôn ngữ đại số » được ẩn dưới dạng các phương trình (PT), hệ phương trình (HPT) mà ta đã được học. Việc này sẽ được ta cân nhắc rất kỹ trong quá trình **« tham số hóa »** các điểm khi biết được quan hệ của chúng với các yếu tố hình học đã cho như đường thẳng, các đường conic. Bởi lẽ, nếu đặt quá nhiều ẩn, thì tương ứng với số ẩn chính là số phương trình mà ta phải giải? Việc này không làm cho vấn đề ta gặp phải được giải quyết gọn gàng mà đôi khi còn vô tình gây khó khăn, trở ngại cho ta. Theo kinh nghiệm, số ẩn tối đa nên đặt cho 1 bài toán hình chỉ nên là 2 ẩn. Vạn bất đắc dĩ ta mới đặt nhiều hơn các em nhé.*

►Nguyên tắc 2: " Đặt bao nhiêu ẩn? → cần lập bấy nhiều phương trình?".

*Các yếu tố trong một bài hình tựa như những giả thiết để ta thiết lập phương trình. Nếu trong khả năng chỉ có thể lập được 2 phương trình nhưng các em lại đặt đến 4 ẩn thì việc giải là **không khả thi**. Cho nên nếu đặt hai ẩn thì dứt khoát phải lập cho bằng được **ít nhất hai phương trình**. Khi đi sâu vào phương pháp, thầy sẽ phân tích kỹ hơn.*

►Nguyên tắc 3: "Hiểu và biết cách vận dụng các tính chất hình học".

Nếu bạn vẫn chưa nắm vững các khái niệm, tính chất, định lý có được trong quá trình học hình học ở các lớp dưới thì thật khó để ta khai thác triệt để trọn vẹn một bài toán hình. Vì vậy hãy xem kỹ chương 1 trước khi bước vào chương 2 nhé!

►Nguyên tắc 4: "Sau mỗi kết quả (KQ) tìm được phải biết cách kiểm tra lại KQ đó ".

*Công việc này giống như chúng ta đang kiểm tra lại đáp số vậy. Nhưng kiểm tra bằng cách nào? Hãy đưa các kết quả đó lên **trên hệ trục tọa độ Oxy**hoặc dựa vào **vị trí tương đối** giữa các yếu tố hình học như điểm, đường thẳng, đường tròn, các đường Conic để suy ra việc nhận, loại.*

CHỦ ĐỀ 2.1:

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM?

■ NHỮNG KỸ THUẬT CẦN NHỚ:

► Nếu điểm thuộc đường thì biểu diễn tọa độ của điểm theo đường → giảm ẩn của điểm. (Kỹ thuật tham số hóa)

*Trong một bài toán hình, việc bắt gặp một điểm thuộc một đường thẳng là điều thường thấy. Việc tham số hóa chúng sẽ giúp chúng ta **giảm ẩn của điểm** đi.*

VD1: $M \in \Delta_1 : x + y - 4 = 0$ (chọn $x = m \Rightarrow y = 4 - m$) $\Rightarrow$ $M(m; 4-m)$

$A \in \Delta_2 : x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow A(2a+4; a)$

$B \in \Delta_3 : 3x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow B\left(b; \frac{3b+6}{2}\right)$ *hay* $B(2b; 3b+6)$.

$C \in \Delta_4 : x - 4 = 0$ *(x = 4, ta chọn y = c bất kỳ)* $\Rightarrow C(4; c)$

$D \in \Delta_5 : y + 1 = 0$ (y = –1, ta chọn x = d bất kỳ) $\Rightarrow D(d; -1)$

► ***Sử dụng sức mạnh của độ dài đoạn thẳng. (Kỹ thuật sử dụng độ dài)***

Khi biết được tọa độ của một điểm nào đó (ví dụ là A) và đã tham số hóa điểm cần tìm (ví dụ là B) thì ta tìm cách tính độ dài của chúng dựa trên công thức:

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

VD2: Cho A(0;2) Tìm M $\in \Delta 1$: x + y – 4 = 0 sao cho $MA = \sqrt{2}$

Ta có: $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(m; 4-m)$. Do $MA = \sqrt{2} \Leftrightarrow MA^2 = 2$

$\Leftrightarrow m^2 + (m-2)^2 = 2 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow$ M(1;3)

► ***Sử dụng sức mạnh của véctơ : Hai đoạn thẳng tỉ lệ nhau (thẳng hàng) thì chuyển đẳng thức độ dài → đẳng thức véctơ. (Kỹ thuật sử dụng véctơ)***

Trong một bài toán hình, quan hệ giữa các điểm nằm trên một đường thẳng (thẳng hàng) có rất nhiều yếu tố để ta khai thác như độ dài, phương và hướng của chúng. Việc chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ nhằm mục đích tăng số lượng phương trình trong bày toán của mình lên (Việc này ngược với việc đặt ẩn các em nhé!)

VD3:



AC = 3AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ hay BC = 2AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$

► ***Xét các điểm cần tìm trong sự tương giao giữa các tia, trục tọa độ, đường thẳng, đường tròn, đường conic... (Kỹ thuật sử dụng tính tương giao)***

Điều này có nghĩa là chúng ta sẽ phải viết phương trình các đường trên (nếu chưa có) để cùng với những đường đã cho → lập thành các hệ phương trình và giải nghiệm suy ra tọa độ của điểm cần tìm.

VD4: A là giao điểm của Δ: x + y – 6 = 0 và d: x – y – 2 = 0.

Ta có : $A = \Delta \cap d \Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ A(4; 2)

VD5: C($x_C > 0$) và D là hai giao điểm của trục hoành (y = 0) và đường tròn $(C_1): x^2 + (y-1)^2 = 1$.

$\Rightarrow$ Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 0 \\ x = -1; y = 0 \end{array}\right.$

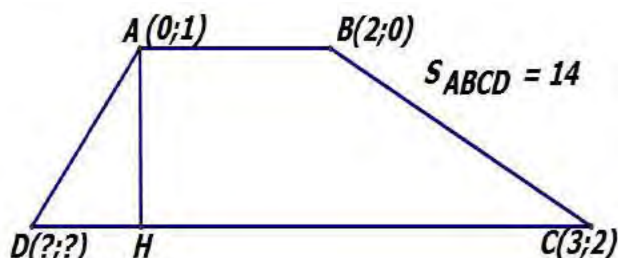
$\Leftrightarrow$ C(1; 0)

Thầy sẽ xét các bài toán sau đây làm ví dụ để minh họa cho các kỹ thuật trên. (Để các bạn tiện theo dõi, mỗi một ví dụ sẽ là một dạng hình quen thuộc mà đề thi hay đề cập).

BÀI TOÁN 1 (HÌNH THANG). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD (AB // CD) có diện tích $S_{ABCD} = 14$. Biết tọa độ các đỉnh $A(0;1), B(2;0), C(3;2)$. Tìm tọa độ đỉnh D?***

■ **Đặt vấn đề :** *Do tọa độ của các điểm A, B, C khá là đẹp nên có một câu hỏi đặt ra là ta có nên « vẽ hình kèm hệ trục tọa độ « vào không? hay là chỉ cần vẽ phác thảo hình thang ABCD? Cuối bài này bạn sẽ có câu trả lời.*

■ **CÁCH 1:** *giải theo cách không gắn với hệ trục tọa độ (chỉ phác thảo hình)*



☺ **Nhận xét :** *Điểm D là điểm cần tìm, nếu đặt tọa độ $D(x_D; y_D) \to$ thiết lập 2 PT 2 ẩn và giải tìm $(x_D; y_D)$ thì có vội vàng không? Trong khi nguyên tắc chung là nếu có thể giảm được ẩn của điểm thì ta nên thực hiện trước.* ***Vậy câu hỏi đặt ra là điểm D có đang thuộc đường thẳng nào không để ta thực hiện tham số hóa theo đường thẳng đó?*** *⇒ Đó chính là đường thẳng CD (Vì nhận thấy CD qua C(3;2) và song song AB).*

Còn dữ kiện $S_{ABCD} = 14$ cho ta được điều gì? → $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD)$

☻ **Ý tưởng**: *Từ công thức diện tích ta thấy ngay* ***CD là độ dài cần tính → liên quan đến D****. Vậy trước hết ta* ***cần tính AH =?*** *→ Rõ ràng AH là đường cao của hình thang (nhưng ngoài ra AH cũng chính là khoảng cách từ A đến đường CD ⇔ AH = d(A; CD)). Từ đây ta có sơ đồ tư duy sau:*

$$D(?;?) \to \begin{cases} D \in CD \to pt\ CD\ ? \\ CD = ? \to S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD) \to \text{AH} = ? \to \text{d[A;CD]} \to pt\ CD\ ? \end{cases}$$

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có CD qua C(3 ; 2) và nhận $\overrightarrow{AB}$ = (2; –1) làm véctơ chỉ phương (VTCP) nên có dạng:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow CD: x + 2y - 7 = 0 \text{ **và** } D \in CD \Rightarrow D(7 - 2d;\ d)$$

* Vẽ AH ⊥ CD tại H, ta có $AH = d[A;CD] = \dfrac{|0+2-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$ và $AB = \sqrt{5}$

* Lại có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AH(AB+CD) \Leftrightarrow CD = \dfrac{23}{\sqrt{5}}$ và $\overrightarrow{CD} = (4-2d;d-2)$

* $CD = \dfrac{23}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow CD^2 = \dfrac{529}{25} \Leftrightarrow (4-2d)^2 + (d-2)^2 = \dfrac{529}{5} \Leftrightarrow (d-2)^2 = \dfrac{529}{25}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d-2 = \dfrac{23}{5} \\ d-2 = \dfrac{-23}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = \dfrac{33}{5} \Rightarrow D_1\left(\dfrac{-31}{5};\dfrac{33}{5}\right) \\ d = \dfrac{-13}{5} \Rightarrow D_2\left(\dfrac{61}{5};\dfrac{-13}{5}\right) \end{array}\right.$$

* Xét $\overrightarrow{CD_2} = \left(\dfrac{46}{5};\dfrac{-23}{5}\right)$ và $\overrightarrow{AB} = (2;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD_2} = \dfrac{23}{5}\overrightarrow{AB}$ **(vô lý vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD_2}$ cùng phương, ngược hướng)**

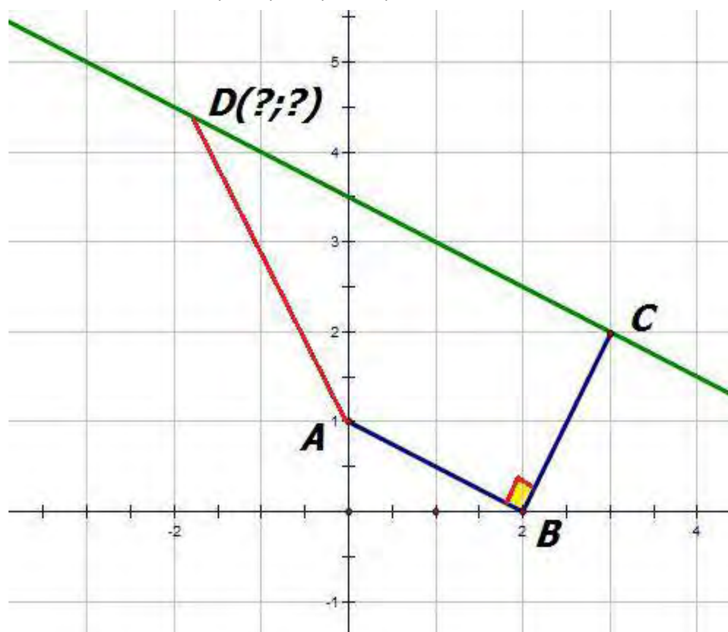
⇒Loại điểm D_2

* Xét $\overrightarrow{CD_1} = \left(\dfrac{-46}{5};\dfrac{23}{5}\right)$ và $\overrightarrow{AB} = (2;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD_1} = -\dfrac{23}{5}\overrightarrow{AB}$ (thỏa yêu cầu bài toán) ⇒**Nhận điểm D_1**

Vậy điểm D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\mathbf{D}\left(\dfrac{-31}{5};\dfrac{33}{5}\right)}$

■ **CÁCH 2:** *Ta vẽ hình kèm hệ trục tọa độ:*



☺ **Nhận xét:** *Khi vừa vẽ hình xong, ta thấy ngay* ***AB ⊥ BC*** *(việc chứng minh không quá khó, ta chỉ cần xét* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ → 0). *Nếu vậy lúc này công thức tính diện tích ABCD sẽ là:*

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BC(AB + CD) \Rightarrow$ *và khi đó ta dễ dàng suy ra được* ***CD =*** $\frac{23}{\sqrt{5}}$

☻ **Ý tưởng**: *Tuy vậy vấn đề đặt ra là ta có nên quay lại cách 1 với nhận xét này? Câu trả lời là ta đã phát hiện AB // CD nên ta có:* $\frac{CD}{AB} = \frac{23}{5} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{-23}{5}\overrightarrow{AB}$

→ *Đến đây là mọi chuyện xem như được giải quyết. Mời các em xem lời giải!*

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (2; –1) và $\overrightarrow{BC}$ = (1; –2). Xét $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ = 2 – 2 = 0 ⇒ AB ⊥ BC

⇒ Hình thang ABCD vuông tại B và C. Và ta có $AB = BC = \sqrt{5}$.

* Mặt khác, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BC(AB + CD) \Rightarrow$ CD = $\frac{23}{\sqrt{5}}$

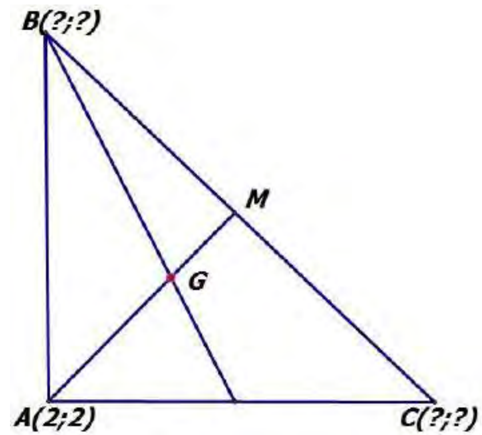
* Xét $\frac{CD}{AB} = \frac{23}{5} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{-23}{5}\overrightarrow{AB}$ (Do $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nhau)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 3 = \frac{-23}{5}.(2) \\ y_D - 2 = \frac{-23}{5}.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{-31}{5} \\ y_D = \frac{33}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{-31}{5}; \frac{33}{5}\right)$$

Vậy điểm D thỏa yêu cầu bài toán là **D**$\left(\frac{-31}{5}; \frac{33}{5}\right)$

■ **Lời bình**: *thông qua việc giải bài toán trên ta thấy được một số ưu điểm của kỹ thuật "****chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ****" điển hình như lời giải gọn nhẹ và không phải thử lại để loại một số trường hợp phát sinh. Đặc biệt việc biết kết hợp* ***lồng hệ trục tọa độ vào trong hình vẽ*** *đôi khi cho ta những nhận xét hữu ích. Và nếu giả sử bài toán trên với cách giải 2, một số em không chuyển đẳng thức* CD = $\frac{23}{5}$AB⇔$\overrightarrow{CD} = -\frac{23}{5}\overrightarrow{AB}$ *thì cũng rất may mắn vì đã có hệ tọa độ ở trên, bạn có thể đưa hai điểm* D_1 & D_2 *lên hệ tọa độ để kiểm tra và sẽ mau chóng phát hiện điểm* D_2 *là điểm không thỏa yêu cầu bài toán và phải ngay lập tức tìm cách loại nó đi.*

BÀI TOÁN 2 (TAM GIÁC CÂN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông cân tại A(2; 2), trọng tâm*** $G\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$. ***Tìm tọa độ điểm B và C?***



■ **Đặt vấn đề:** *Đề bài rất ngắn gọn nhưng chứa đựng rất nhiều thông tin như yếu tố "vuông", "cân" giữa các cạnh và "trọng tâm" của tam giác. Nếu gặp các yếu tố đó thì ta nên khai thác như thế nào? Mời các bạn cùng xem các cách giải sau.*

■ **CÁCH 1:** *Đặt* $B(x_B;y_B);C(x_C;y_C)$

☺ **Ý tưởng** *:với yêu cầu tìm điểm B và C, ta đặt ngay tọa độ cần tìm là* $B(x_B;y_B);C(x_C;y_C)$

→ 4 ẩn → Chúng ta cần đến 4 PT → vậy đó là những phương trình nào?

+ ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ *2PT.*

+ G là trọng tâm ΔABC ⇒ 2PT.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G = 4 \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 - x_C \\ y_B = 8 - y_C \end{cases}$$

* Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_B - 2; y_B - 2) = (-x_C; 6 - y_C) \\ \overrightarrow{AC} = (x_C - 2; y_C - 2) \end{cases}$ *(chúng ta xem như chỉ phải lập thêm 2 Pt nữa)*

* ΔABCvuông cân tại A $\begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_C(x_C - 2) + (6 - y_C)(y_C - 2) = 0 \\ {x_C}^2 + (6 - y_C)^2 = (x_C - 2)^2 + (y_C - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_C}^2 + {y_C}^2 - 2x_C - 8y_C + 12 = 0 \\ x_C = 2y_C - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5{y_C}^2 - 40y_C + 75 = 0 \\ x_C = 2y_C - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_C = 5 \Rightarrow x_C = 3 \\ y_C = 3 \Rightarrow x_C = -1 \end{array}\right.$$

* Với C(5; 3) ⇒ B(–1;3)

* Với C(–1; 3) ⇒ B(5;3)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{C(5;3)\,\&\,B(-1;3)\ hay\ B(5;3)\,\&\,C(-1;3)}$$

■ **CÁCH 2:** *Gọi M là trung điểm BC ⇒ AM ⊥ BC (do ΔABC vuông cân tại A)*

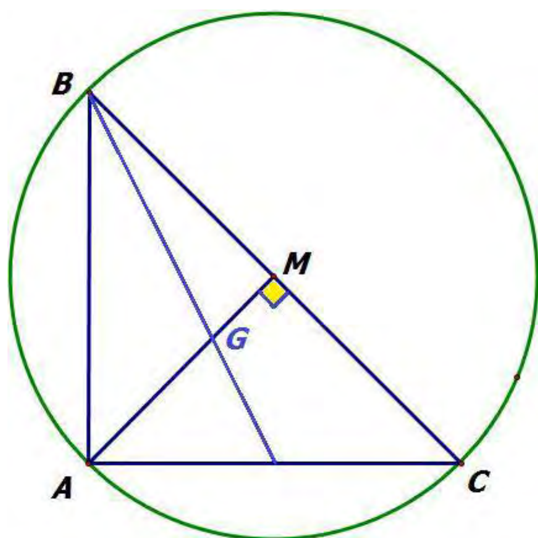
☺ **Ý tưởng :**

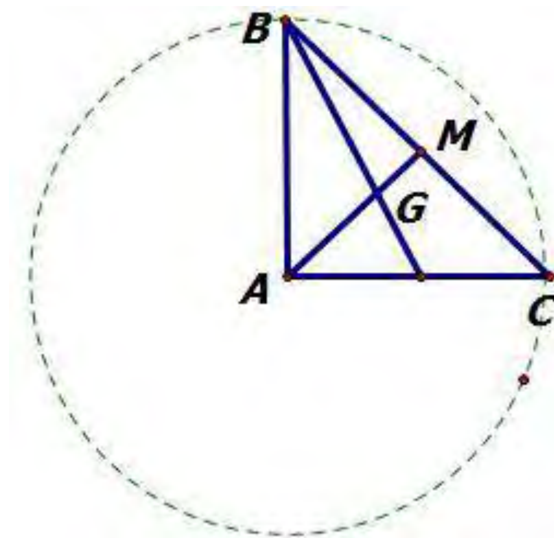
– Để tìm một điểm bất kỳ, ta xét xem điểm ấy có đang thuộc đường thẳng nào không? Dĩ nhiên đó chính là đường BC (Làm sao viết phương trình đường BC

→ Xét thấy BC⊥AG nên ta có ý tưởng tìm điểm M∈BC bằng cách $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

– Đến đây bạn sẽ nghĩ là chúng ta nên "tham số hóa" 2 điểm B và C theo đường BC và sau đó trở lại cách làm của cách 1. Nhưng nếu bạn chú ý một chút thì có một đường tròn (C) tâm (M; bán kính = AM) đang ngoại tiếpΔABC.B và C chính là tương giao của (C) và BC. Mời các em xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**





* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-2=\frac{3}{2}(\frac{4}{3}-2)\\ y_M-2=\frac{3}{2}(2-\frac{10}{3})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=1\\ y_M=4\end{cases}\Rightarrow M(1;4)$$

* Phương trình đường BC qua M(1;4) nhận $\overrightarrow{AM}=(-1;2)$ làm VTPT có dạng là:

$$-1(x-1)+2(y-4)=0\Leftrightarrow x-2y+7=0$$

* Phương trình đường tròn (C)với tâm M(1; 4), bán kính $AM=\sqrt{5}$ có dạng là:

$$(C):(x-1)^2+(y-4)^2=5$$

* Ta có B và C là giao điểm giữa (C) và đường BC nên tọa độ của B và C là nghiệm của hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases}$$ *(Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc !)*

⇒ C(5; 3) và B(–1;3) hay C(–1; 3) và B(5;3)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{C(5;3)\,\&\,B(-1;3)\ hay\ B(5;3)\,\&\,C(-1;3)}$$

■ **CÁCH 3**: ***Sử dụng phép biến hình (Phép quay)***

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 2 = \frac{3}{2}(\frac{4}{3} - 2) \\ y_M - 2 = \frac{3}{2}(2 - \frac{10}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 4 \end{cases} \Rightarrow M(1;\,4)$$

* Ta có phép quay $Q_{(M;-90^o)}: A \rightarrow B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = (x_A - x_M).\cos(-90^o) - (y_A - y_M).\sin(-90^o) + x_M \\ y_B = (x_A - x_M).\sin(-90^o) + (y_A - y_M).\cos(-90^o) + y_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-1;3)}$$

* Do M là trung điểm BC ⇒ C(5; 3). Do vai trò B và C là như nhau nên ta có B(5;3) và C(–1;3)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{C(5;3)\,\&\,B(-1;3)\ hay\ B(5;3)\,\&\,C(-1;3)}$$

■ **Lời bình**: *thông qua việc giải bài toán trên ta thấy được sự sâu sắc trong nguyên tắc đặt ẩn.*

Với cách 1, *do* ***tính khả thi*** *trong việc đặt ẩn (4 ẩn) vì đã thiết lập được 4PT nhưng cũng đòi hỏi ở các bạn một số kỹ năng giải hệ đại số (chủ yếu là rút thế, cộng trừ vế). Điều này có thể một số bạn chưa làm tốt. Trong tư duy, ta luôn chọn con đường ngắn nhất, tính toán ít cồng kềnh nhất để thực hiện. Nếu chỉ giải một mình câu này thì không có gì để bàn cãi, bạn hoàn toàn có đủ thời gian, sự minh mẫn. Nhưng nếu xét trong thời điểm, làm cùng với các câu còn lại trong đề thi Quốc gia thì việc bạn chọn cách giải như vậy chưa hợp lý.*

Với cách 2, *giải quyết được một số nhược điểm của cách 1, đồng thời cung cấp cho bạn thêm một số kinh nghiệm như khi gặp trọng tâm G thì sử dụng chúng*

như thế nào? Hay việc tìm thấy sự tương giao củamột đường tròn với một đường thẳng. Đặc biệt, nếu bài toán này bạn chú ý thêm: $AM=\dfrac{3AG}{2}\ \&\ AM=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ *độ dài AC. Ta cũng có thể viết PT đường tròn tâm A bán kính AC.*

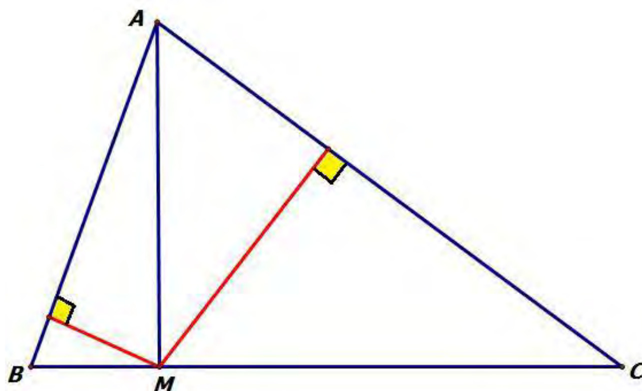
Với cách 3, *phép biến hình mà cụ thể chính là phép quay đã giúp ta giải quyết bài toán này một cách rất đặc biệt, bạn gần như không phải thiết lập thêm bất kì giả thiết nào khác, nhược điểm của cách làm này là công thức tương đối cồng kềnh và khó nhớ. Và chương phép biến hình học lớp 11 cũng chỉ dừng ở mức giới thiệu chứ chưa thấy được những ứng dụng rõ nét của chúng vào việc giải bài toán hình học phẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy.*

BÀI TOÁN 3 (TAM GIÁC THƯỜNG). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(0;5);B(-2;-1),C(4;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường BC sao cho diện tích tam giác ABM gấp hai lần diện tích tam giác ACM và chứng minh rằng AM vuông góc BC.***

■ **Đặt vấn đề:** *bài toán này có một điểm khá thuận lợi là* ***tọa độ của các đỉnh tam giác đã biết****. Việc biết hết tất cả tọa độ các đỉnh có thể giúp ta được gì?*

$\rightarrow$ *chúng ta có thể* ***khai thác các yếu độ dài, góc, diện tích cũng như tính toán tìm các điểm đặc biệt, viết các phương trình các cạnh tam giác dễ dàng****. Sau đây chúng ta sẽ xem thử các cách làm dưới đây khai thác yếu tố đó như thế nào?*

■ **CÁCH 1:***Tận dụng yêu cầu CMR:* $AM\perp BC \Rightarrow AM$ *là đường cao của* ΔABC *(chú ý chỉ dùng để vẽ hình, đây chưa phải là giả thiết)*



☺ **Ý tưởng :***Bài toán yêu cầu ta tìm điểm M* $\rightarrow$ *do* $M\in BC$ *nên ta sẽ viết PT đường BC*$\rightarrow$ *tham số hóa điểm M. Trong công thức* $S_{\Delta ABM}=2S_{\Delta ACM}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB..d\left[M;AB\right]=\frac{1}{2}AC.d\left[M;AC\right]$ $\rightarrow$ *phải viết thêm PT AB và AC và áp dụng công thức khoảng cách* $\Rightarrow$ *tọa độ M.*

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-2;-6)\Rightarrow AB=2\sqrt{10} \\ \overrightarrow{BC}=(6;3)\Rightarrow BC=3\sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC}=(4;-3)\Rightarrow AC=5 \end{cases}$

* Phương trình đường BC qua B(–2;–1) nhận $\overrightarrow{BC}=(6;3)$ làm VTCP có dạng là:

$\frac{x+2}{6}=\frac{y+1}{3}\Leftrightarrow (BC): x-2y=0$ *và* **do M ∈ BC ⇒ M(2m ; m)**

* Phương trình đường AB qua A(0;5) nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;-6)$ làm VTCP có dạng là:

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-5}{-6}\Leftrightarrow (AB): 3x-y+5=0$$

* Phương trình đường AC qua A(0;5) nhận $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$ làm VTCP có dạng là:

$$\frac{x}{4}=\frac{y-5}{-3}\Leftrightarrow (AC): 3x+4y-20=0$$

* Mặt khác, $S_{\Delta ABM}=2S_{\Delta ACM}\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB..d[M;AB]=2\frac{1}{2}AC.d[M;AC]$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{10}\frac{|6m-m+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=2.5\frac{|6m+4m-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\Leftrightarrow |m+1|=2|m-2|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\Rightarrow M_1(2;1) \\ m=5\Rightarrow M_2(10;5) \end{array}\right.$

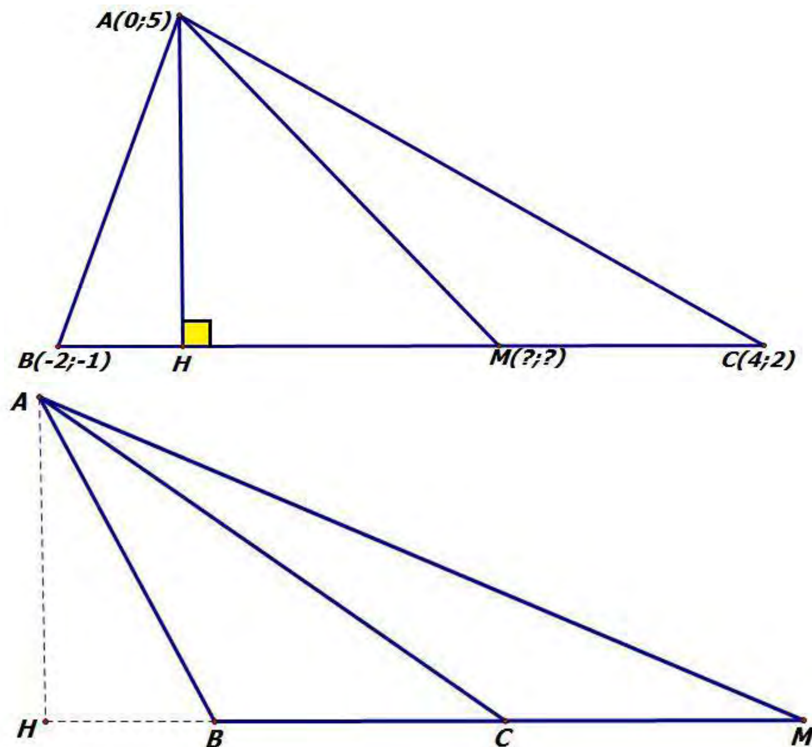
* Với $\overrightarrow{AM_1}=(2;-4)$ và $\overrightarrow{BC}=(6;3)$ ta xét: $\overrightarrow{AM_1}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow \overrightarrow{AM_1}\perp\overrightarrow{BC}$ (đpcm)

* Với $\overrightarrow{AM_2}=(10;0)$ và $\overrightarrow{BC}=(6;3)$ ta xét: $\overrightarrow{AM_2}.\overrightarrow{BC}=60\neq 0$ nên loại điểm M_2

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(2;1)}$

■ **CÁCH 2:** *Kẻ AH ⊥ BC tại H ("phớt lờ" yếu tố AM ⊥ BC và ta sẽ chứng minh M trùng H sau)*

☺ **Ý tưởng :***do hai tam giác ΔABM và ΔACM đều có chung đường cao AH nên nếu thiết lập công thức diện tích theo yêu cầu bài toán (YCBT) đã cho thì ta hoàn toàn có thể tìm được mối liên hệ giữa BM =?MC⇒*$\overrightarrow{BM}=?\overrightarrow{MC}$ *(chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ, do đã biết tọa độ B và C) nên ta dễ dàng suy ra tọa độ M. Sau khi giải được M, việc xét* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ *để suy ra AM⊥BC trở nên thuận lợi hơn. Mời các em xem lời giải.*



► Hướng dẫn giải cách 2:

* Gọi $M\left(x_M; y_M\right)$ là tọa độ của điểm cần tìm và vẽ AH⊥BC tại H.

* Ta có: $S_{\Delta ABM} = 2S_{\Delta ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH.BM = 2\frac{1}{2}AH.CM \Leftrightarrow BM = 2CM$

TH1: *M nằm trong đoạn BC.*

$\mathrm{BM} = 2\mathrm{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BM}} = -2\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ (*) (vì $\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ ***cùng phương, ngược hướng***)

(Bạn nên chọn $\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ để tiện cho việc tính toán)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M + 2 = -2(x_M - 4) \\ y_M + 1 = -2(y_M - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 1 \end{cases} \Rightarrow M_1(2;1)$$

* Với $\overrightarrow{\mathrm{AM}_1} = (2;-4)$ và $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (6;3)$ ta xét: $\overrightarrow{\mathrm{AM}_1}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}_1} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (đpcm) và M ≡ H

TH2: *M nằm ngoài đoạn BC.*

$\mathrm{BM} = 2\mathrm{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ (*) (vì $\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ ***cùng phương, cùng hướng***)

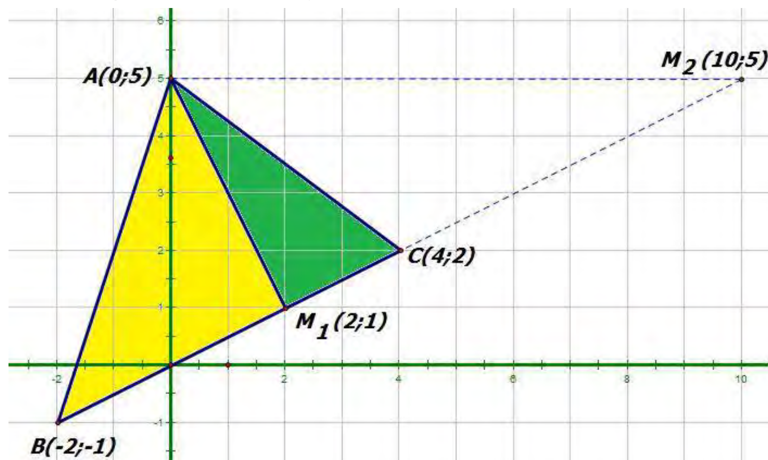
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M + 2 = 2(x_M - 4) \\ y_M + 1 = 2(y_M - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 10 \\ y_M = 5 \end{cases} \Rightarrow M_2(10;5)$$

* Với $\overrightarrow{\mathrm{AM}_2} = (10;0)$ và $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (6;3)$ ta xét: $\overrightarrow{\mathrm{AM}_2}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 60 \neq 0$ nên loại điểm M_2

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(2;1)}$

■ **Lời bình**: *thông qua việc giải bài toán trên, ta thấy được:*

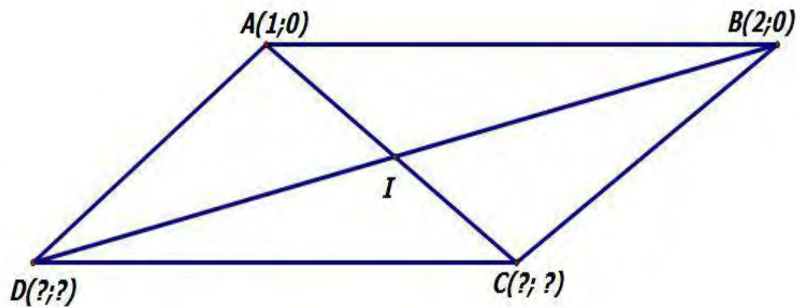
Với cách 1, *người làm sẽ vận dụng được khá nhiều công thức từ tính độ dài, viết PT đường, xét diện tích tam giác và công thức tính khoảng cách. Đó là* ***"một điểm +"*** *cho cách một vì nó giúp ta ôn tập lại những kiến thức đã học. Tuy vậy, nhược điểm nói chung là cách giải 1 khá dài, sử dụng tính toán nhiều. Và đặc biệt, dù ta có lợi thế vẽ hình biết M ở đâu? nhưng lại không dùng được $AM \perp BC$. Và vô tình đẩy công thức tính diện tích sang một hướng khác nặng nề. Sau đó chúng ta còn phải loại đi một trường hợp nhờ may mắn kiểm tra $AM \perp BC$.*



Với cách 2, *việc gọi thêm một đường cao AH vô tình giúp ta "giải phóng" điểm M và khai thác triệt để công thức tính diện tích tam giác. Đặc biệt, cách đưa đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ một lần nữa cho ta thấy sức mạch của nó với ưu điểm tính toán nhẹ nhàng, tuy nhiên trong một số trường hợp chúng ta cần chú ý đến vấn đề vẽ hình phác thảo. "****Con người chịu ảnh hưởng rất lớn bởi tư duy hình thức"****. Rất nhiều bạn sẽ vẽ hình theo TH1 và "quên mất để sót" TH2 mặc dù điểm M_2 ta không nhận. Để khắc phục điều này, bạn chỉ cần đưa tọa độ các điểm lên hệ trục Oxy và nhanh chóng nhận xét đó là* ***tam giác nhọn hay tam giác tù****, cùng với đó là lợi thế trong việc kiểm tra đáp số.*

BÀI TOÁN 4 (HÌNH BÌNH HÀNH). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $A(1;0); B(2;0)$. I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD và I thuộc đường thẳng $d: y = x$. Biết rằng diện tích hình bình hành ABCD bằng 4. Xác định tọa độ điểm C và D.***

- **Đặt vấn đề:** *Trong các bài toán liên quan đến tứ giác mà điển hình là hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông thì giao điểm của hai đường chéo có thể giúp ta khai thác được gì?*
- **CÁCH 1:** *Vẽ phác thảo hình bình hành ABCD (không đưa lên hệ tọa độ).*



☺ **Ý tưởng :***Do tính chất I là trung điểm của mỗi đường AC và BD→ việc tham số hóa I ∈ d → và nếu tìm được I thì qua công thức trung điểm ta tìm được C và D. Còn công thức diện tích hình bình hành thì ta phải làmnhư thế nào? → Ta xét* ***diện tích hình bình hành là tổng diện tích của những "tam giác con"*** *bên trong đó cụ thểtrong bài này* $S_{ABCD}=4S_{ABI}=4\frac{1}{2}AB.d\left[I;AB\right]$ *→ như vậy ta cần viết phương trình đường AB để dùng công thức khoảng cách ở đây.*

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có I ∈ d: y = x ⇒ I(m ; m) và $\overrightarrow{AB}=(1;0)\Rightarrow AB=1$

* Nhận xét: A và B đều thuộc trục hoành nên phương trình đường AB chính là y = 0.

* Ta có: $S_{ABCD}=4S_{ABI}=4\frac{1}{2}AB.d\left[I;AB\right]\Leftrightarrow 4=2.1.|m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$

* Với m = 2 ⇒ I(2; 2). Do I là trung điểm AC và BD nên ta có:

$$\begin{cases}x_A+x_C=2x_I=4\\ y_A+y_C=2y_I=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=3\\ y_C=4\end{cases}\Rightarrow C_1(3;4)\text{ tương tự ta có } D_1(2;4)$$

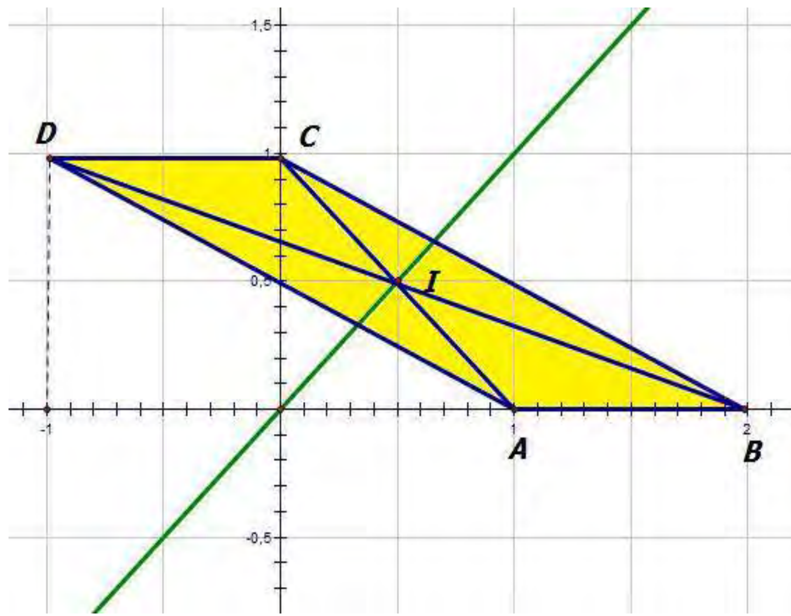
* Với m = –2 ⇒ I(–2; –2). Do I là trung điểm AC và BD nên ta có:

$$\begin{cases}x_A+x_C=2x_I=-4\\ y_A+y_C=2y_I=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=-5\\ y_C=-4\end{cases}\Rightarrow C_2(-5;-4)\text{ tương tự ta có } D_2(-6;-4)$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{C_1(3;4),\ D_1(2;4)\ hay\ C_2(-5;-4),\ D_2(-6;-4)}$$

■ **CÁCH 2:***Đưa tọa độ các điểm lên hệ tọa độ Oxy.*



☺ **Ý tưởng :***Như chúng ta đã biết, việc đưa điểm lên hệ tọa độ thể hiện ý đồ rất rõ ràng của mình trong việc tính toán và kiểm tra đáp số. Trong bài toán này, ưu điểm của cách làm này là có ngay độ dài AB = 1 và nếu ta xét* $S_{ABCD} = AB.d[D;AB]$ ***(công thức tính diện tích hình bình hành)***

$\rightarrow d[D;AB] = d[D;Ox] = |y_D|$ *.Mời các em xem lời giải.*

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có I ∈ d: y = x ⇒ I(m ; m)

và I là trung điểm BD và AC $\Rightarrow \begin{cases} C(2m-1;2m) \\ D(2m-2;2m) \end{cases}$

* Ta có: $S_{ABCD} = AB.d[D;AB] = 1.d[D;AB] = d[D;Ox] = |y_D| \Leftrightarrow m = \pm 2$

* Với m = 2 ⇒ $C_1(3;4)$ và $D_1(2;4)$

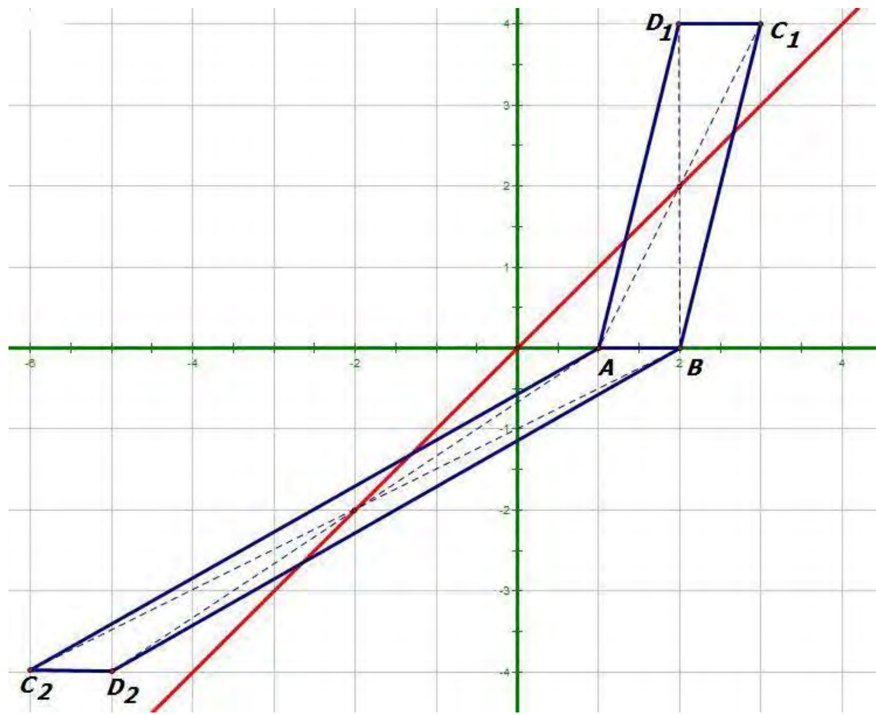
* Với m = –2 ⇒ $C_2(-5;-4)$ và $D_2(-6;-4)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{C_1(3;4),\ D_1(2;4)\ hay\ C_2(-5;-4),\ D_2(-6;-4)}$$

■ **Lời bình**: *Thông qua bài toán này ta thấy được sức mạnh của "**kỹ thuật sử dụng điểm đối xứng I**".Tuy chưa hình thành được một phương pháp nhưng đó chính là một trong những **"kỹ thuật giải"** mà bạn nên nhớ. Ngoài ra sau 4 bài toán trên bạn cũng có thêm trong mình **"kỹ thuật sử dụng diện tích"(Xem lại phần các kiến thức về tứ giác, chương 1)**. Cũng không thể không nói đến "**kỹ thuật sử dụng khoảng cách**" mà tiêu biểu là kỹ thuật xét khoảng cách từ 1 điểm M(x_M; y_M) đến hai trục tọa độ. Để dễ nhớ các em cần lưu ý:*

$$\boxed{d[M;Ox] = |y_M| \ \&\ d[M;Oy] = |x_M|}$$



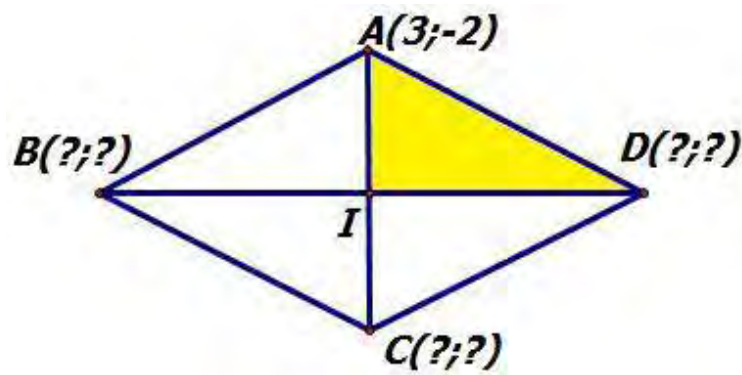
BÀI TOÁN5 (HÌNH THOI). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có $A(3;-2)$, hai đỉnh B và D cùng nằm trên đường thẳng $d: x-3y+1=0$ và B có tung độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết diện tích thoi bằng 60.***

- ***Đặt vấn đề:*** *Với số lượng điểm cần phải tìm như vậy thì câu hỏi đặt ra là ta* ***nên đặt bao nhiêu ẩn là thích hợp?***
- ***CÁCH 1:*** *Gọi I là giao điểm hai điểm đường chéo AC và BD. (**kỹ thuật sử dụng tâm đối xứng**)*

☺ ***Ý tưởng :***

● *Nhận thấy I mới chính là "nhận vật trung tâm" (yếu tố quyết định) đến bài toán này nên ta nghĩ cách tìm I (do khi có tọa độ I ⇒ tọa độ C ⇒ độ dài AC ⇒ độ dài BD qua $S_{ABCD}=60$).*

● *Vậy làm sao đểtìm I? Ta đã có I = AC ∩ BD và đã có PT BD → tìm cách viết PT AC → AC ⊥ BD và qua A(3; –2).*



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có AC ⊥ BD: x – 3y + 1 = 0 ⇒ (AC): 3x + y + m = 0.

Lại có AC qua A(3; –2) ⇒ 9 – 2 + m = 0 ⇒ m = –7. Vậy **(AC): 3x + y – 7 = 0**.

* Mặt khác, I = AC ∩ BD ⇒ tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{I(2;\ 1)}$$

* Do I là trung điểm AC $\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2x_I = 4 \\ y_A + y_C = 2y_I = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 4 \end{cases} \Rightarrow$ **C(1; 4)**

* Ta có B ∈ d ⇒ B(3b – 1; b) (**b > 0**), và $\overrightarrow{IB} = (3b-3; b-1)$ và $\overrightarrow{IA} = (1;-3)$

$\Rightarrow IA = \sqrt{10}$

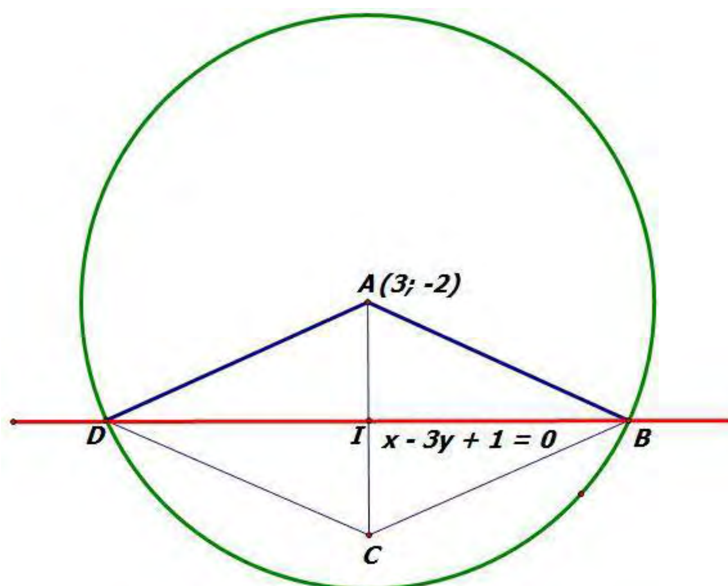
* $S_{ABCD} = 4S_{ABI} = 4\frac{1}{2}AI.BI \Rightarrow IB^2 = 30^2$

$\Leftrightarrow (3b-3)^2 + (b-1)^2 = 30^2 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2\ (ktm) \\ b = 4\ (tm) \end{array}\right. \Leftrightarrow$ **B(11;4)**

* Do I cũng là trung điểm BD (dùng công thức trung điểm) ⇒**D(–7; –2)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(11;4),\ C(1;4),\ D(-7;-2)}$

■ ***CÁCH 2:****Xuất phát từ diện tích* ***(kỹ thuật sử dụng diện tích + kỹ thuật lập đường tròn ẩn mình)***



☺ ***Ý tưởng :****Ta có* $S_{ABCD} = 4IA.IB$, *nhưng* $IA = d[A;BD] = d[A;d]$ ⇒ *độ dài IB.*

Ta xét thấy có thể tính được $AB^2 = IA^2 + IB^2$ ⇒ *B, D chính là giao điểm giữa đường d và đường tròn (C) tâm A bán kính AB (do tính chất của hình thoi). Có tọa độ B và D ⇒ tọa độ I ⇒ tọa độ C.*

► **Hướng dẫn giải cách 2**

* Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có IA = d[A; BD] = d[A ; d] = $\dfrac{|3+6+1|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\Rightarrow IA=\sqrt{10}$

* Mặt khác, $S_{ABCD}=4S_{ABI}=4\dfrac{1}{2}AI.BI\Rightarrow IB^2=30^2$

Lại có $AB^2=IA^2+IB^2$ = 100 ⇒ AB = 10

* Nhận xét: B và C là giao điểm giữa đường thẳng d và đường tròn (C) tâm A(3; –2), R = AB = 10.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y+1=0\\(x-3)^2+(y+2)^2=100\end{cases}$ *(Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc !)*

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\Rightarrow x=-7\\y=4\Rightarrow x=11\end{array}\right.$ ($y_B>0$) nên ta nhận **B(11 ; 4) và D(–7 ; –2)**

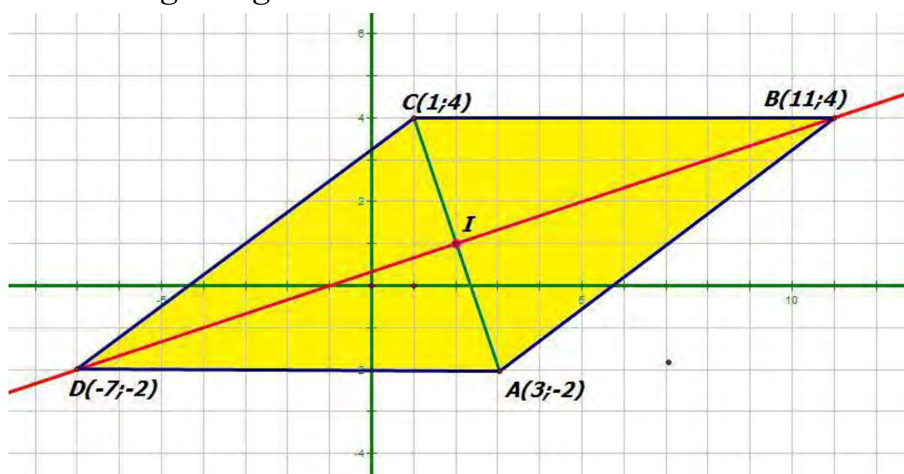
* Do I là trung điểm BD⇒I(2;1)

* Lại có I là trung điểm AC $\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=2x_I=4\\y_A+y_C=2y_I=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=1\\y_C=4\end{cases}$ ⇒**C(1; 4)**

***Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là* C (1; 4), B (11; 4), D (–7; –2)**

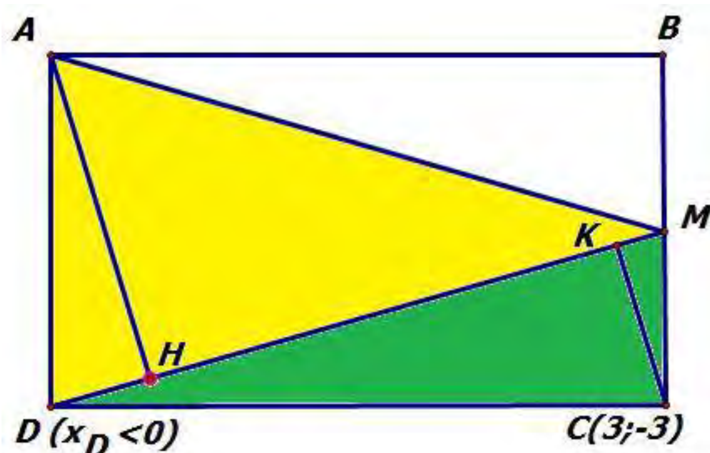
Đưa tọa độ của điểm lên trục tọa độ Oxy để kiểm tra, ta được:

■ **Lời bình**:*Trả lời cho câu hỏi "đặt vấn đề"về việc nên đặt bao nhiêu ẩn thì như các bạn thấy nếu thực hiện ở cách 1, bạn chỉ phải đặt 1 ẩn duy nhất cho B hoặc D. Với cách 2, thì chúng ta không cần phải đặt ẩn mà chỉ phải* ***xét sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn****. Đó cũng là một trong những kỹ thuật đã nhắc trong phần đầu của chủ đề. Hãy xem đây là một* ***"dấu hiệu"****. Ngoài ra cũng phải bàn đến yếu tố khoảng cách trong bài này,* ***"Có một điểm và một đường thẳng*** *thì ta có thể* ***lập thêm được 1 PT*** *đường thẳng* ***hoặc song song hoặc vuông góc*** *với đường thẳng đã cho hay cũng có thể* ***xét khoảng cách*** *từ điểm đó đến đường thẳng.*



BÀI TOÁN6 (HÌNH CHỮ NHẬT). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh $C(3;-3)$, đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x+y+2=0$. M là trung điểm cạnh BC và phương trình đường $DM: x-3y-6=0$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, D biết D có hoành độ âm?***

- **Đặt vấn đề:** *Khi các giả thiết trong đề không đủ để giúp ta giải quyết bài toán thì ta sẽ làm gì? Chắc chắn bạn sẽ nghĩ ngay đến việc tăng thêm giả thiết. Một trong những kỹ thuật hay nhất, thường dùng để giải quyết vấn đề này chính là "**kỹ thuật sử dụng đường phụ**". Cụ thể là như thế nào thì xin mời các bạn xem lời giải sau.*
- **CÁCH 1:** *Vẽ AH và CK lần lượt vuông góc DM tại H và K.(**kỹ thuật sử dụng đường phụ)***



☺ **Ý tưởng :** *Ta xét thấy điểm A $\in$ d thì đường d này chỉ có thể giúp ta « tham số hóa điểm A », ngoài ra giữa đường DM và điểm C là biết đầy đủ thông tin nhất. Nhưng kỹ thuật có thể xét đến ở đây nhất chính là "**kỹ thuật sử dụng khoảng cách**" $\rightarrow$ Vậy phải chăng d[A; DM] =?d[C;DM] $\rightarrow$ **kẻ thêm đường AM** $\rightarrow$ phát hiện $S_{\Delta ADM} = 2S_{CDM}$ $\rightarrow$ "**kỹ thuật sử dụng diện tích**" $\rightarrow$ để tìm điểm A. Sau khi tìm được A, ta sẽ dùng điều kiện tồn tại của hình chữ nhật (tính chất hình học) $\rightarrow$ AD $\perp$ CD $\Rightarrow$ tọa độ điểm D. Ta cũng không quên sử dụng "**kỹ thuật dùng tâm đối xứng**" cụ thể ta tính tọa độ I (dựa vào A và C) $\Rightarrow$ tọa độ B.*

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* A $\in$ d $\Rightarrow$ A(a; – a – 2). Xét $S_{ABCD} = S_{ADM} + 2S_{CDM} \Rightarrow S_{ADM} = 2S_{CDM}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AH.DM = \frac{1}{2}CK.DM \Leftrightarrow AH = 2CK$.

* Do AH = 2CK $\Leftrightarrow$ d[A;DM] = 2[C;DM] $\Leftrightarrow \frac{|a-3(-a-2)-6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = 2\frac{|3+9-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

$\Leftrightarrow |4a| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \Rightarrow A_1(3;-5) \\ a=-3 \Rightarrow A_2(-3;1) \end{array}\right.$

(Câu hỏi đặt ra: trong hai điểm trên, có điểm nào không thỏa yêu cầu bài toán (YCBT) không? Nếu có thì làm cách nào để loại điểm đó đi?

* Nhận xét:

TH1: $A_1(3;-5)$ và $C(3;-3)$ ta có: $\left(x_{A_1}-3y_{A_1}-6\right)\left(x_C-3y_C-6\right)=12.6=72>0$

(nằm cùng phía so với DM)

TH2: $A_2(-3;1)$ và $C(3;-3)$ ta có: $\left(x_{A_2}-3y_{A_2}-6\right)\left(x_C-3y_C-6\right)=-72<0$

(nằm trái phía so với DM)

Suy ra nhận điểm $\mathbf{A_2(-3;1)}$.

* Gọi $I = AC \cap BD \Rightarrow I$ là trung điểm $AC \Rightarrow$ tọa độ $\mathbf{I(0;-1)}$

Gọi $D \in DM: x-3y-6=0 \Rightarrow \mathbf{D(3d+6;\ d)}$ (do $x_D<0$ nên $3d+6<0 \Leftrightarrow \mathbf{d<-2}$)

* Ta có: ABCD là hình chữ nhật $\Rightarrow AD \perp CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0$ với $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(3d+9;d-1)\\ \overrightarrow{CD}=(3d+3;d+3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow (3d+9)(3d+3)+(d-1)(d+3)=0$

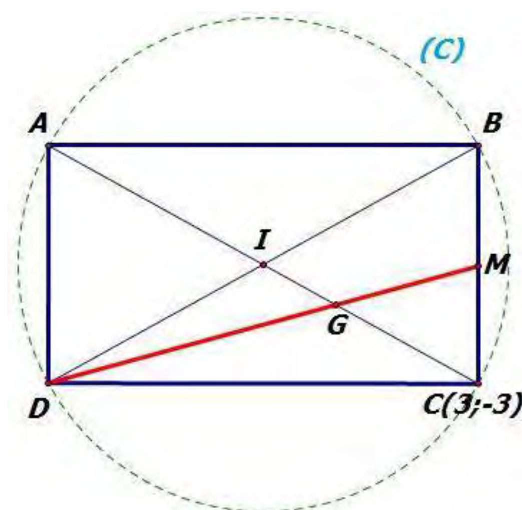
$\Leftrightarrow 5d^2+19d+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\dfrac{-4}{5}\ (ktm)\\ d=-3\ (tm)\end{array}\right. \Rightarrow \mathbf{D(-3;-3)}$

* Do I cũng là trung điểm BD nên ta có **B (3; 1)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là **A(–3; 1), B (3; 1), D (–3; –3)**

■ **CÁCH 2:** *Gọi $I = AC \cap BD$ và $G = DM \cap AC$.* ***(kỹ thuật sử dụng đường phụ)***

☺ **Ý tưởng :***Một phản xạ bất ngờ ta nối hai đường chéo của hình chữ nhật lại (thứ nhất việc này để về sau ta sẽ sử dụng "**kỹ thuật dùng tâm đối xứng**", thứ hai là để tìm thêm các yếu tố mới cho bài toán. Cụ thể ở đây chính là điểm G (trọng tâm ΔBCD). Ta cũng sẽ tham số hóa điểm A theo đường d. Tuy nhiên thay vì xét như cách 1 thì ta lại thấy **3 điểm A, G, C thẳng hàng** và $G \in DM$, vì vậy ta sẽ tìm cách sử dụng "**kỹ thuật chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ**" (ĐTDĐ→ĐTVT), ở đây $AG = 2GC \Rightarrow \overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{CG} \to$ tọa độ $A \Rightarrow$ tọa độ điểm I. Thay vì đi tiếp như cách 1, ta lại sử dụng "**kỹ thuật lập đường tròn (C) ẩn mình**" có tâm I , bán kính R = IC. $D = (C) \cap DM \to$ tọa độ $D \to$ tọa độ B. Mời các em xem lời giải.*



► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có G ∈ DM: x – 3y – 6 = 0 ⇒ G(3g + 6; g).

Do G là trọng tâm ΔBCD (Vì IC và DM là trung tuyến ΔBCD) ⇒ $GC = \frac{2IC}{3}$

Lại có $AG = AI + IG = IC + \frac{IC}{3} = \frac{4IC}{3} = 2GC \Rightarrow AG = 2GC$

* Do AG = 2GC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 3g - 6 = 2(3g + 6 - 3) \\ y_A - g = 2(g + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 9g + 12 \\ y_A = 3g + 6 \end{cases}$

Mặt khác A ∈ d: x + y + 2 = 0 ⇔ $g = \frac{-5}{3}$ ⇒**A(–3; 1)**

* Gọi I = AC ∩ BD ⇒ I là trung điểm AC ⇒ tọa độ **I(0; –1)** và $IC = \sqrt{13}$

* Ta có D là giao điểm giữa DM và đường tròn (C) tâm I, bán kính $IC = \sqrt{13}$ nên tọa độ D thỏa hệ:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 = 13 \end{cases}$ *(Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc !)*

Suy ra $D(-3;-3)\ hay\ D\left(\frac{18}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. Do D có hoành độ âm nên ta nhận **D(–3;–3)**

* Do I cũng là trung điểm BD nên ta có **B(3; 1)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là **A (–3; 1), B (3; 1), D (–3; –3)**

■ **Lời bình**: "***kỹ thuật vẽ đường phụ***" *rõ ràng đã giúp ích được cho chúng ta rất nhiều trong quá trình giải toán. Tuy vậy việc tiếp cận theo các hướng khác nhau sẽ khiến ta phải linh hoạt vận dụng các kỹ thuật khác nhau. Mỗi một kỹ thuật đều có cái hay riêng của nó. Quan trọng là chúng ta khai thác chúng như thế nào? Nói về cách 1, ưu điểm của nó là đã* ***vận dụng linh hoạt nhiều kỹ thuật*** *giải cùng một lúc nhưng gặp* ***nút thắt*** *trở ngại ở việc* ***"phát sinh nhiều điểm***

A", nếu không xử lý khéo vô tình sẽ làm bài toán dài thêm nữa do phải xét thêm 1 trường hợp. Với cách 2, giải quyết được những nhược điểm của cách 1, nhưng có lẽ nút thắt của bài là phát hiện điểm đặc biệt G và khai thác nó trong kỹ thuật chuyển ĐTĐD→ĐTVT. Qua đây ta cần lưu ý cách xét vị trí tương đối giữa điểm và đường.

Chú ý: Cho hai điểm $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ và $\Delta: ax+by+c=0$. Ta có:

☺ M và N nằm cùng phía với đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$$

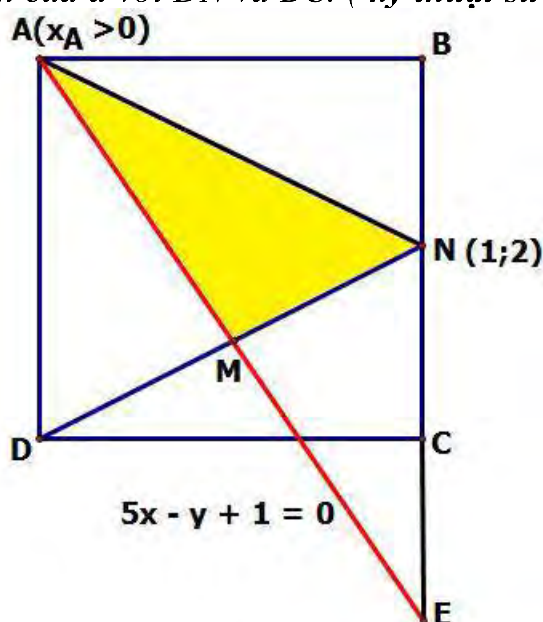
☻ M và N nằm khác phía với đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$$

BÀI TOÁN7 (HÌNH VUÔNG).*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tọa độ $N(1;2)$ là trung điểm cạnh BC, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ADN có phương trình là $d: 5x-y+1=0$. Xác định tọa độ của các đỉnh hình vuông đã cho biết A có hoành độ dương.*

■ **Đặt vấn đề:***Sau bài toán 6, chắc chắn bạn đã cảm thấy khá thích thú với việc kẻ thêm những đường phụ. Trong bài toán 7 này, ngoài việc sử dụng những đường phụ đó, cũng cần phải nói đến tính chất đặc biệt của hình vuông.Với những bài toán càng ít dữ kiện đi bấy nhiêu, thì lại luôn có một cách xử lý hoàn hảo cho nó?Đó là cách gì? Mời các bạn xem các cách giải sau.*

■ **CÁCH 1:***Gọi M và E lần lượt là giao điểm của d với DN và BC. (* ***kỹ thuật sử dụng đường phụ)***



☺ **Ý tưởng :**

● *Trong đề bài có một thông tin quan trọng chính là "**đường trung tuyến d kẻ từ đỉnh A của ΔADN**" ta sẽ thử kéo dài d cắt DN và BC để hy vọng phát hiện "**các tỉ lệ đặc biệt**", cụ thể rong bài này, ta có ANED là hình bình hành → M, C lần lượt là trung điểm AE, NE và* $BE=\dfrac{3BC}{2}$

● *Vậy câu hỏi đặt ra trong 4 điểm cần tìm, điểm nào có **nhiều thông tin nhất**?*

*→ điểm A ∈ d → xung quanh điểm A có thể **liên hệ với điểm nào**? → điểm N → tính độ dài AN =?(Ta có thể tính được d[N;AE] =? → AN =?d[N;AE]).***

● *Để tìm được mối liên hệ trên, ta có thể* ***"đặt cạnh hình vuông AB = a → tính tất cả các cạnh theo a → tìm quan hệ giữa chúng với d[N;AE]"***

● *Sau khi tìm được điểm A, thì ta nên tìm tiếp điểm nào? → điểm E (**vì khi có E ⇒ C ⇒ I và B ⇒ D**) → làm sao tìm E? → E ∈ AE (tham số hóa E) và **dùng độ dài** AE ⇒ E (hoặc xem E = AE và **đường tròn ẩn mình** (C) có tâm N bán kính NE)*

► Hướng dẫn giải cách 1:

* Ta có ADEN là hình bình hành (do NE // AD và M là trung điểm DN)

Suy ra M là trung điểm AE và NE = AD = 2NC

$\Rightarrow$ BE = BN + NE = 3BN = $\frac{3BC}{2}$

* Đặt AB = a > 0 ta có $\begin{cases} AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ và NE = AB = a

Mặt khác ΔANE có cosNAE = $\frac{AN^2 + AE^2 - NE^2}{2AN.AE} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\Rightarrow \sin NAE = \sqrt{1 - (\cos NAE)^2} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

* Ta có: $S_{ANE} = \frac{1}{2}AN.AE\sin\widehat{NAE} = \frac{1}{2}d[N;AE].AE$

$\Leftrightarrow$ d[N;AE] = AN.sinNAE = $\frac{a\sqrt{5}}{2}.\frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$

Do đó d[N;AE] = $\frac{2a}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \frac{|5-2+1|}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{2a}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow a = AB = \sqrt{2}$

$\Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}\ (*)$

* Gọi A ∈ AE: 5x – y + 1 = 0 ⇒ A(m; 5m + 1) (m >0) và $\overrightarrow{NA} = (m-1; 5m-1)$

Vậy (*) $\Leftrightarrow (m-1)^2 + (5m-1)^2 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow 26m^2 - 12m - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ **(nhận) hay** $m = \frac{-1}{26}$ **(loại)**

Suy ra $A\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$. Lại có E ∈ AE ⇒ E(e; 5e + 1) và $\overrightarrow{AE} = \left(e - \frac{1}{2}; 5e - \frac{5}{2}\right)$

* Do $AE = \frac{\sqrt{26}}{2} \Leftrightarrow AE^2 = \frac{26}{4} \Leftrightarrow \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(5e - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{26}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e = 1 \\ e = 0 \end{array}\right.$

* **TH1:** e = 1 $\Rightarrow E(1;7)$. Lại có C là trung điểm EN $\Rightarrow C\left(1;\frac{9}{2}\right)$.

Vì N là trung điểm BC $\Rightarrow B\left(1;\frac{-1}{2}\right)$ và M là trung điểm AE $\Rightarrow M\left(\frac{3}{4};\frac{21}{4}\right)$

M lại là trung điểm DN $\Rightarrow D\left(2;\frac{17}{2}\right)$

Xét : $(5x_D - y_D + 1)(5x_N - y_N + 1) = 10 > 0$

$\Rightarrow$ D và N cùng phía so với DN (loại)

* **TH2:** e = 0$\Rightarrow$ E(0;1). Tương tự ta giải ra $B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), D\left(\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right), B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), D\left(\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)}$$

■ **CÁCH 2:** *Gọi M và E lần lượt là giao điểm của d với DN và BC.* ***(kỹ thuật sử dụng đường phụ)***

☺ **Ý tưởng :**

● *Tương tự như cách 1, ta cũng kéo dài AM cắt DN và BC lần lượt tại M và E. Đồng thời ta cũng có được các kết quả chứng minh được của cách 1, chỉ có điều thay vì khai thác khoảng cách để chuyển về độ dài tìm liên hệ AN thì ở bài này, chúng ta nghĩ cách tìm thêm một đường nữa "viết PT đường thẳng"(**sẽ nói kỹ hơn ở chủ đề 2.2**)*

● *Cụ thể ở đây đó chính là đường BE qua N và tạo với AE một góc AEN→?(xét* $\cos\widehat{AEB} = \frac{BE}{AE}$*)*

● *Sau khi viết được PT BE*

$\xrightarrow{AE\cap BE} E \xrightarrow{N} C \xrightarrow{N} B \xrightarrow[\perp BC]{quaB} AB \xrightarrow{AE} A \xrightarrow{C} I \xrightarrow{B} D$ *(dùng liên tiếp công thức trung điểm)*

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có ADEN là hình bình hành (do NE // AD và M là trung điểm DN)

Suy ra M là trung điểm AE và NE = AD = 2NC

$\Rightarrow$ BE = BN + NE = 3BN = $\frac{3BC}{2}$

* Xét $\cos\widehat{AEB} = \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{3BC}{2}}{\sqrt{AB^2+BE^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ và đường thẳng BC qua N có dạng:

BC: a(x – 1) + b(y – 2) = 0 ($a^2+b^2>0$)

* Ta có:

cosAEB = cos(AE;EB) = cos(AE;BC) = |cos($\overrightarrow{n_{AE}},\overrightarrow{n_{BC}}$)| = $\frac{|\overrightarrow{n_{AE}}.\overrightarrow{n_{BC}}|}{|\overrightarrow{n_{AE}}|.|\overrightarrow{n_{BC}}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\frac{|5a-b|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow 7a^2-10ab-17b^2=0\ (*)$$

* Nhận xét b ≠ 0 (vì b = 0 thì (*) ⇔ a = 0 (loại vì $a^2+b^2>0$) nên ta chọn **b = 7**

* Với b = 7 thì (*) ⇔ $a^2-10a-119=0$ ⇔ a = 17 hay a = –7

TH1: a = 17; b = 7 ⇒ BC: 17x + 7y – 31 = 0.

Ta có E = AE∩ BC ⇒ tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}5x-y+1=0\\17x+7y-31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{6}{13}\\y=\frac{43}{13}\end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{6}{13};\frac{43}{13}\right)$$

Vì C là trung điểm EN ⇒ $C\left(\frac{19}{26};\frac{69}{26}\right)$ và N là trung điểm BC ⇒ $B\left(\frac{33}{26};\frac{35}{26}\right)$

PT AB ⊥ BC ⇒ AB: 7x – 17y + m = 0.

Do AB qua $B\left(\frac{33}{26};\frac{35}{26}\right)$ ⇒ m = 14 ⇒**AB: 7x – 17y + 14 = 0**

Ta có A = AB∩AE⇒ tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}5x-y+1=0\\7x-17y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-1}{26}\\y=\frac{21}{26}\end{cases}$$ (loại vì x_A>0)

TH2: a = –7; b = 7 ⇒ BC: x – y + 1 = 0.

Ta có E = AE∩ BC ⇒ tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}5x-y+1=0\\x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases} \Rightarrow E(0;1)$$

Vì C là trung điểm EN ⇒ $C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và N là trung điểm BC ⇒ $B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

PT AB ⊥ BC ⇒ AB: x + y + n = 0. Do AB qua $B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

⇒ m = –4 ⇒**AB: x + y – 4 = 0**

Ta có A = AB∩AE⇒ tọa độ E là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$

(nhận vì x_A>0)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$A\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right), B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), D\left(\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

- **Lời bình**:*tiếp tục vận dụng "**kỹ thuật vẽ đường phụ**" vào việc giải bài toán trên, với **cách 1,** nút thắt nằm ở chỗ tính được tất cả độ dài các cạnh hình vuông theo a và đặc biệt là sử dụng "**kỹ thuật dùng diện tích và khoảng cách**". Còn ở cách 2, thì tập trung viết phương trình đường BC với việc dùng "**kỹ thuật dùng góc**". Qua đây ta cũng thấy được hình vuông có nhiều yếu tố đặc biệt mà các hình khác không có được. Có lẽ vì vậy mà trong các đề thi những năm gần đây hay đưa hình vuông vào đề thi và việc xử lý chúng không dễ chút nào khi đề thi ngày càng cho ít dữ kiện đi.*

BÀI TOÁN 8 (HÌNH THANG VUÔNG).*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D(2;2), cạnh CD = 2AB. Gọi H là hình chiếu của D lên cạnh AC và M là trung điểm HC. Biết rằng phương trình đường thẳng $DH: 2x + y - 6 = 0$ và đường thẳng $BM: 4x + 7y - 61 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của hình thang ABCD.*

- **Đặt vấn đề:***mô típ trong đề thi đại học gần đây là sử dụng các bài chứng minh hình học thuần túy để áp vào bài toán hình học phẳng, nghĩa là trước khi bạn muốn sử dụng các dữ kiện trong bài, bạn phải chứng minh một số yếu tố như sự bằng nhau về cạnh, về góc, sự vuông góc, song song, v.v... Dấu hiệu nào giúp cho ta biết phải tiến hành các bước chứng minh đó trước khi vào giải bài toán. Mời các bạn xem lời giải sau:*

(DH): 2x + y - 6 = 0

D(2; 2), C, K, M, H, A, B

4x + 7y - 61 = 0

■ **CÁCH 1:***Gọi K là trung điểm DH. (**kỹ thuật sử dụng đường phụ)***

☺ **Ý tưởng :**

- *Khi chúng ta vừa vẽ hình ra đúng theo tỉ lệ đề cho thì ta "**phát hiện**" DM⊥BM→ tìm cách chứng minh?*
- *Nếu gọi K là trung điểm DH→AKMB là hình bình hành ⇒ AK // BM và AK ⊥ DM (do K trực tâm)*
- *Khi đã chứng minh được BM ⊥ DM → viết PT DM và DM ∩ BM = M*
- *Sau đó, viết PT AC ⊥ DH và qua M, AC ∩ DH = H là trung điểm AM ⇒ tọa độ H ⇒tọa độ C.*
- *Để tìm A ta viết PT AD ⊥ CD và qua D → A = AD ∩ AC **(Kỹ thuật tương giao)***
- *Để tìm điểm B ta dùng CD = 2AB⇒* $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ ***(Kỹ thuật ĐTĐD → ĐTVT)***

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi K là trung điểm DH ⇒ KM là đường trung bình trong ΔCHD⇒ KM // CD và $KM = \dfrac{CD}{2}$

Mặt khác AB // CD và $AB = \dfrac{CD}{2}$ ⇒ AKMB là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} KM \perp DA \ (do KM // AB \\ AL // BM \end{cases}$

* Xét ΔADM có ta có K = KM ∩ DH

⇒ K là trực tâm của ΔADM lại có AK qua K ⇒**AK ⊥ DM**

$\begin{cases} AK \perp DM \\ AK // BM \end{cases} \Rightarrow$ **BM ⊥ DM**

* DM ⊥ BM ⇒ (DM): 7x – 4y + m = 0, (DM) qua D(2; 2)

⇒ m = – 6 ⇒ (DM): 7x – 4y – 6 = 0

Ta có M = DM ∩ BM ⇒ tọa độ M thỏa hệ:

$$\begin{cases} 4x+7y-61=0 \\ 7x-4y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22}{5} \\ y=\dfrac{31}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{31}{5}\right)$$

Mặt khác AC ⊥ DH ⇒ (AC): x – 2y + n = 0, (AC) qua $M\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{31}{5}\right)$ ⇒ n = 8

⇒ (AC): x – 2y + 8 = 0

Ta có H = AC ∩ DH ⇒ tọa độ $H\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{22}{5}\right)$. Do M là trung điểm HC ⇒**C(8; 8)**

* AD qua D(2; 2) nhận $\overrightarrow{DC}=(6;6)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng :

6(x – 2) + 6(y – 2) = 0 ⇔ (AD): x + y – 4 = 0.

Tương tự ta có A = AD ∩ AC ⇒**A(0; 4)**

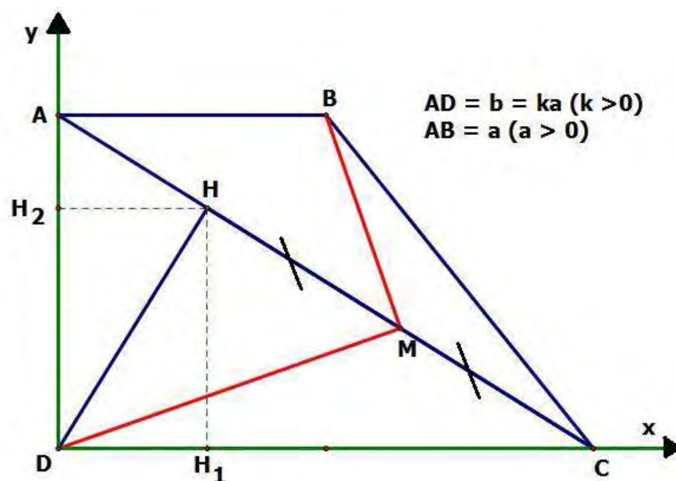
* Lại có CD = 2AB ⇔ $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ (*phần giải tiếp xin dành cho bạn đọc*)

⇒ B(3; 7)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là A(0; 4), B(3; 7) và C(8; 8)

■ **CÁCH 2:** ***(kỹ thuật "dùng tọa độ mới")***

☺ **Ý tưởng :** Sau khi vẽ hình ta cũng phát hiện DM⊥ BM, thay vì tìm cách chứng minh bằng hình học thuần túy, chúng ta sẽ vận dụng một trong những ứng dụng của hình tọa độ trong việc giải và chứng minh các bài toán hình học phẳng***(Các bạn có thể xem tiếp chương 3: "Một số ứng dụng của hình tọa độ Oxy vào việc giải bài toán hình học phẳng")***



- **Cách làm tổng quát**:

● Ta sẽ **"tạm quên đi"** các dữ kiện liên quan đến tọa độ, phương trình trong **hệ tọa độ Oxy** và chỉ **giữ lại các yếu tố đã có của hình phẳng.**

● Ta tiếp tục thay thế hệ tọa độ Oxy bằng một hệ tọa độ khác, để từ đó bằng cách giả thiết mới ta đi đến điều phải chứng minh.

● Để làm được điều này, các bạn nên chọn **áp hệ trục?xy vào nơi có <u>hai cạnh vuông góc</u>.**

► **Hướng dẫn giải:**

* Dựng hệ trục **Dxy** như hình vẽ (DC ⊥ AD).
Gọi H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu của H lên tia Dx, Dy.

* Đặt độ dài cạnh AB = a (a > 0) ⇒CD = 2AB = 2a.
Và độ dài cạnh AD = b = ka (k > 0).

* Ta có ΔADC ⊥ D có đường cao DH: $\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}$

$$\Rightarrow DH^2=\frac{DA^2.DC^2}{DA^2+DC^2}=\frac{4k^2a^2}{k^2+4}$$

* Trong ΔCHD ⊥ H có HH_1 là đường cao có $DH_1.CD=DH^2$ (hệ thức lượng trong Δ vuông)

$$\text{Suy ra } \boxed{DH_1{}^2=\frac{DH^2}{DC}=\frac{2k^2a}{k^2+4}}$$

* Tương tự với ΔAHD ⊥ H có HH_2 là đường cao ⇒ $\boxed{DH_2{}^2=\frac{DH^2}{DA}=\frac{4ka}{k^2+4}}$

* Ta có tọa độ của các điểm là D(0; 0), C(2a; 0), B(a; ka), $H\left(\frac{2k^2}{k^2+4}a;\frac{4k}{k^2+4}a\right)$.

Do M là trung điểm HC $\Rightarrow M\left(\frac{2k^2+4}{k^2+4}a;\frac{2k}{k^2+4}a\right)$

* Do đó, $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{2k^2+4}{k^2+4}a;\frac{2k}{k^2+4}a\right)$ và $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{k^2}{k^2+4}a;\frac{-k^3-2k}{k^2+4}a\right)$

Xét : $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{BM}=\frac{(2k^2+4)k^2+2k(-k^3-2k)}{k^2+4}a=0$ ⇒**DM ⊥BM (đpcm)**

(***Phần giải tiếp xin dành cho bạn đọc***)

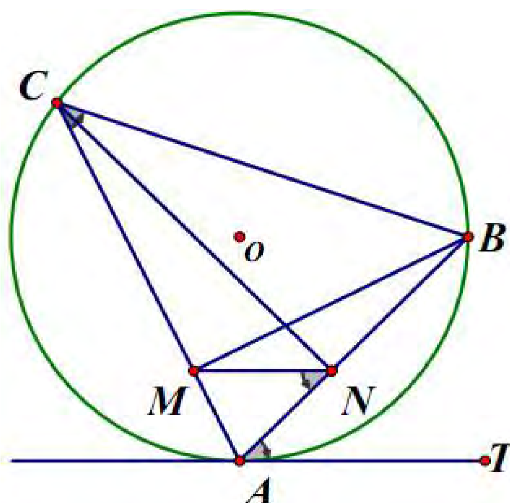
■ **Lời bình:***Có thể thấy, nếu như ở cách 1, bạn phải vận dụng rất nhiều tính chất của hình học phẳng để chứng minh kết quả của tính chất thì khi ứng dụng cách 2, ta thấy được triển vọng của cách làm này. Đó cũng là phương pháp mà thầy nghĩ các bạn nên theo đuổi. Các bạn có thể xem kỹ chương 3, nếu muốn vận dụng nó vào việc giải các bài tọa độ phẳng Oxy này. Cũng cần phải nói thêm, khi tọa độ hóa thành công theo hệ tọa độ mới thì các tính chất, công thức các bạn điều có thể vận dụng được. (Nó tựa như ứng dụng hệ trục tọa độ Oxyz vào việc giải bài toán bài toán hình không gian cổ điển).* ***Điểm mấu chốt của cách 2 chính là tìm được vị trí để dựng hệ trục và tính toán các tọa độ của các điểm trên hình.***

BÀI TOÁN9 (ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình tròn*** $(C): x^2 + y^2 = 25$ ***ngoại tiếp*** ΔABC ***có tọa độ các chân đường cao hạ từ B, C lần lượt là*** $M(-1;-3)$ ***và*** $N(2;-3)$ **.** ***Hãy tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết A có tung độ âm.***

■ **Đặt vấn đề:***với bài toán 8 vừa rồi, chúng ta có thể nhận xét việc vẽ thêm đường phụ,chứng minh thêm một số yếu tố đóng vai trò rất quan trọng trong việc giải quyết bài toán hình phẳng Oxy. Bài toán 9 này cũng là một ví dụ điển hình cho vấn đề trên.*

☺ **Ý tưởng :**

- *Thoạt nhìn bài toán rất mới mẻ với ta nhưng thật sự nếu bỏ qua các yếu tố về tọa độ thì đó chính bài toán chứng minh hình học trong phần hình tròn (lớp 9) mà ta đã học. bài toán khi đó đã yêu câu ta chứng minh OA ⊥ MN. Và một trong những cách giải mà các em HS lựa chọn là kẻ thêm tiếp tuyến từ A (đường phụ).*
- *Do OA ⊥ tiếp tuyến nên ta chỉ cần chứng minh Tiếp tuyến // MN.*
- *Việc chứng minh // có rất nhiều cách tiếp cận một trong những cách đó là* ***dùng góc****. Cụ thể trong bài này là ta sẽ chứng minh góc MNA = góc BAT. (dĩ nhiên cũng phải vận dụng CMNB là một tứ giác nội tiếp).*



► **Hướng dẫn giải:**

* (C) có tâm O(0;0) và bán kính R = 5.

Ta có tứ giác CMNB là **tứ giác nội tiếp** (do ∠CMB = ∠CNB, *2 góc liên tiếp cùng nhìn một cạnh bằng nhau*)

Suy ra: **∠BCM = ∠MNA (1)** (*góc ngoài = góc đối trong*)

* Gọi AT là tiếp tuyến của đường tròn (C) ⇒**AT ⊥ OA**. Khi đó:

$$\begin{cases} \angle \textbf{TAB} \text{ góc giữa tiếp tuyến AT và dây cung AB chắn cung AB} \\ \angle \textbf{ACB} \text{ góc nội tiếp chắn cung AB} \end{cases}$$

⇒∠TAB = ∠ACB (2)

Từ (1) và (2) ⇒**∠MNA = ∠TAB** (so le trong)**⇒MN // AT mà AT ⊥ OA**

⇒ OA ⊥ MN

* $\overrightarrow{MN} = (3;0)$ là vectơ pháp tuyến của OA, nên OA có phương trình là x = 0.

* Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 5 \end{cases}$

Vì $y_A < 0$ nên **A(0; –5).**

* $\overrightarrow{AM} = (-1;2), \overrightarrow{AN} = (2;2)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của AC, AB.

Nên AC có phương trình AC: 2x + y + 5 = 0, tương tự AB: x – y – 5 = 0

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=-5 \\ x=-4; y=3 \end{array}\right. \Rightarrow C(-4;3)$

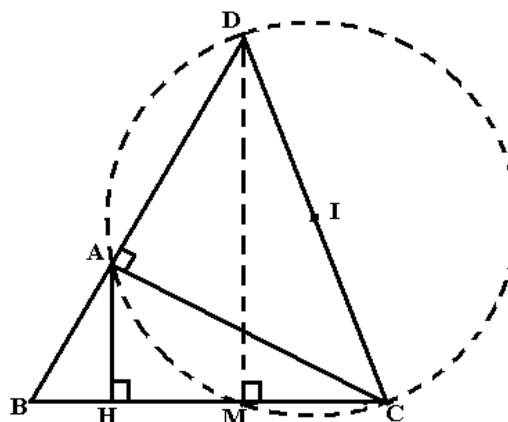
Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=-5 \\ x=5; y=0 \end{array}\right. \Rightarrow B(5;0)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là A(0; –5), B(5; 0) và C(–4; 3)

■ **Lời bình**:*Rõ ràng việc giải bài toán này cần phải gỡ cho được "nút thắt" OA⊥ MN, và nếu đề thi tiếp cận theo hướng có sử dụng chứng minh những tính chất hình học của lớp dưới thì sẽ là một điều vô cùng khó khăn cho các bạn. Quá trình đại số hóa hình học tuy mạnh nhưng cũng có một điểm giới hạn thật sự của nó. Một bài hình tọa độ mà được giải bằng cách hình học thuần túy bao giờ cũng mang đến những lời giải đẹp như mơ – ngắn gọn – súc tích. Trong tiến trình xây dựng các câu hỏi của chủ đề 1 này, thầy tập trung giới thiệu gần như là tất cả những đường hướng mà người ra đề có thể ra khi đặt vấn đề tìm tọa độ của một điểm thỏa mãn yêu cầu cho trước. Ngoài việc nắm vững một số nguyên tắc chung, hình thành cho mình một số kỹ thuật, song song đó, các em cũng cần rèn luyện lại việc chứng minh thêm các tính chất hình học.*

BÀI TOÁN10 (ĐƯỜNG TRÒN ẨN MÌNH). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có đỉnh B(1;1). Phương trình đường thẳng*** $AC: 4x+3y-32=0$***. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM.BC = 75. Tìm tọa độ đỉnh C, biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC là*** $5\sqrt{5}$ **.**

■ **Đặt vấn đề:***bài toán khá quen thuộc khi yêu cầu chúng ta tìm tọa độ của điểm C. Tuy vậy vướng mắc ở đây chính là chúng ta chưa thể xác định tọa độ của tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMC và chưa khai thác được BM.BC = 75. Trong tình huống này, ta nên giải quyết ra sao? Mời các bạn xem lời giải.*



☺ **Ý tưởng :**

● Do AB ⊥ AC và AB qua B → dễ dàng viêt được phương trình AB → $AB \cap AC = A$ ⇒ tọa độ A → độ dài AB (1).

● Để xác định được tâm I (tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC) ta cần xác định trước hết vị trí điểm M → dựa vào đẳng thức BM.BC = 75 (2).

● Đẳng thức BM.BC = 75 gợi cho ta liên tưởng đến một công thức khá quen thuộc trong hệ thức lượng của tam giác vuông ABC → Vẽ AH ⊥ BC tại H ⇒ BH.BC = AB^2 (3)

● Từ (1), (2), (3) → $\frac{BM}{BH}$ =? → vị trí M ∈ BC

● Để xác định tâm I là đường tròn ngoại tiếp ΔAMC ta có thể kẻ các đường trung trực các cạnh AM, MC, AC và giao lại thì tìm được I. Tuy vậy chúng ta chưa gắn kết thực sự các yếu tố đã có bên ΔABC với ΔAMC. Vì vậy ta sẽ vận dụng tính chất của tứ giác nội tiếp bằng cách vẽ thêm một điểm nữa → Đó chính là điểm D trên hình vẽ.

● Dễ thấy ADCM chính là tứ giác nội tiếp do có $\mathrm{DAC} = \mathrm{DMC} = 90^o \Rightarrow$ I chính là trung điểm CD.

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có AB ⊥ AC ⇒ AB: 3x – 4y + m = 0. AB qua B(1; 1) ⇒ m = 1

⇒**AB: 3x – 4y + 1 = 0**

A = AB ∩ AC ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 32 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(5;4)$$

* Ta có AB = 5. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AB^2 = BH.BC = 25.

Theo đề bài thì BM.BC = 75 ⇒**BM = 3BH**

Qua M, kẻ đường thẳng vuông góc BC cắt AB tại D.

* Ta có góc DAC = góc DMC = 90°⇒ đường tròn ngoại tiếp ΔAMC có tâm I là trung điểm của CD và bán kính ID

Xét ΔABC đồng dạng ΔMBD (g–g) $\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \mathbf{BD = \frac{BM.BC}{AB} = \frac{75}{5} = 15}$.

* Ta có góc DAC = góc DMC = 90°⇒ đường tròn ngoại tiếp ΔAMC có tâm I là trung điểm của CD và bán kính ID.

* Lại có C ∈ AC ⇒ C(8 – 3c; 4c) và $\overrightarrow{AC}$ = (3 – 3c; 4c – 4)

Vậy $AC^2 = 400 = (3 - 3c)^2 + (4c - 4)^2 \Leftrightarrow (c - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{c = 5 \Rightarrow C(-7; 20)} \\ \mathbf{c = -3 \Rightarrow C(17; -12)} \end{array}\right.$

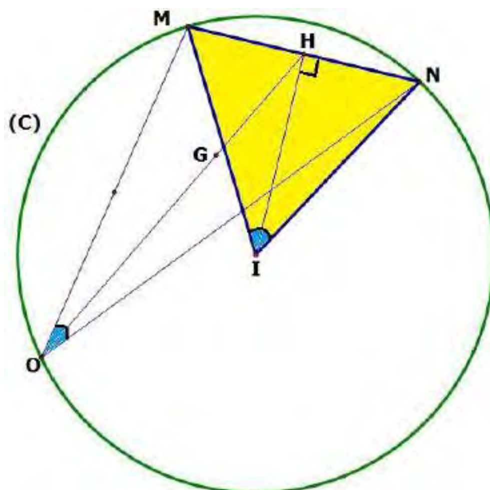
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là ***C_1 (–7; 20) hay C(17; –12)***

■ **Lời bình**:Có thể thấy, mấu chốt của việc giải bài toán này chính là việc xác định I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMC. Và một lần nữa ta lại thấy được "**kỹ thuật vẽ đường phụ**" hay đến mức nào. Tuy vậy, không phải ai cũng có thể nghĩ được. Điều quan trọng là ta xem việc **kẻ thêm đường, gọi thêm điểm**

là một việc hết sức tự nhiên trong quá trình chứng minh, lập luận, giải quyết một bài toán hình học.

BÀI TOÁN 11 (GÓC TRONG ĐƯỜNG TRÒN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình là*** $x^2+y^2+3x-6y=0$ ***. Gọi M, N là hai điểm thuộc (C) thỏa mãn góc*** $\widehat{MON}$ ***bằng*** 30^o ***(O là gốc tọa độ). Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔMON biết G thuộc đường thẳng*** $d: x+y-1=0$

■ **Đặt vấn đề:** *Trong bài toán đường tròn có liên hệ đến góc trong đường tròn thì ta nên khai thác như thế nào? Mời các bạn xem lời giải.*



☺ **Ý tưởng :**

- Để bài đã gợi mở G ∈ d →tham số hóa điểm G→cần một pt?
- Nhận xét O ∈ (C) → $\widehat{MON}$ chính là góc nội tiếp chắn cung MN của (C) và góc $\widehat{MIN}$ chính là góc ở tâm của (C)

  ⇒ số đo góc $\widehat{MIN} = 2\widehat{MON} = 60^o$.
- Dễ dàng chứng minh được ΔMIN đều → $IH = \dfrac{IM\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
- Để sử dụng độ dài IH ta biểu thị tọa độ H theo G qua công thức trọng tâm ⇒ tìm được tọa độ G.

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có (C) có tâm $I\left(\dfrac{-3}{2};3\right)$ và $R=\sqrt{\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

* Mặt khác G ∈ d: x + y – 1 = 0⇒ G(m ; 1 – m).

* Nhận xét O(0 ; 0) ∈ (C) ⇒ $\widehat{MON}$ chính là góc nội tiếp chắn cung MN của (C) và góc $\widehat{MIN}$ chính là góc ở tâm của (C) chắn cung MN

⇒ số đo góc $\widehat{MIN} = 2\widehat{MON} = 60^o$.

Lại có ΔIMN cân tại I (do IM = IN = R) ⇒ΔIMN là Δ đều.

* Gọi H là trung điểm MN ⇒ IH ⊥ MN ⇒ $IH = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

Do G là trọng tâm ΔMON

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OH} \Rightarrow H\left(\frac{3m}{2}; \frac{3-3m}{2}\right)$ và $\overrightarrow{IH} = \left(\frac{3m+3}{2}; \frac{-3m-3}{2}\right)$

* Ta có

$IH = \frac{3\sqrt{15}}{4} \Rightarrow IH^2 = \frac{135}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3m+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3m+3}{2}\right)^2 = \frac{135}{16} \Leftrightarrow (m+1)^2 = \frac{15}{8}$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m = \frac{\sqrt{30}-4}{4} \\ m = \frac{-\sqrt{30}-4}{4} \end{array}\right.$

Nên ta có $G_1\left(\frac{\sqrt{30}-4}{4}; \frac{-\sqrt{30}}{4}\right)$ hay $G_2\left(\frac{-\sqrt{30}-4}{4}; \frac{\sqrt{30}}{4}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$G_1\left(\frac{\sqrt{30}-4}{4}; \frac{-\sqrt{30}}{4}\right)$ hay $G_2\left(\frac{-\sqrt{30}-4}{4}; \frac{\sqrt{30}}{4}\right)$

■ **Lời bình**: Có một sự khó khăn nếu ta không phát hiện điểm O thuộc đường tròn (C). Bởi lẽ khi đó bạn không thể khai thác các góc đặc biệt trong đường tròn. Trong bài toán này, chúng ta đã nhắc lại một phần kiến thức đã học ở hình học lớp 9. Cũng cần phải nói thêm, các bài toán tọa độ có sử dụng các tính chất hình học lớp dưới mới thật sự trở ngại lớn nhất đối với các bạn. Chúng ta cũng không tránh né các vấn đề đó hoặc tìm một con đường khác để đi đến kết quả. Điều quan trọng là các kiến thức toán học được xây dựng từ những cơ sở sơ khai từ lớp dưới. ***Nếu bạn vẫn chưa nắm vững các kiến thức đó, các bạn có thể xem lại các kiến thức ở chương 1 trước khi tìm hiểu các bài toán tiếp theo liên quan đến đường tròn***.

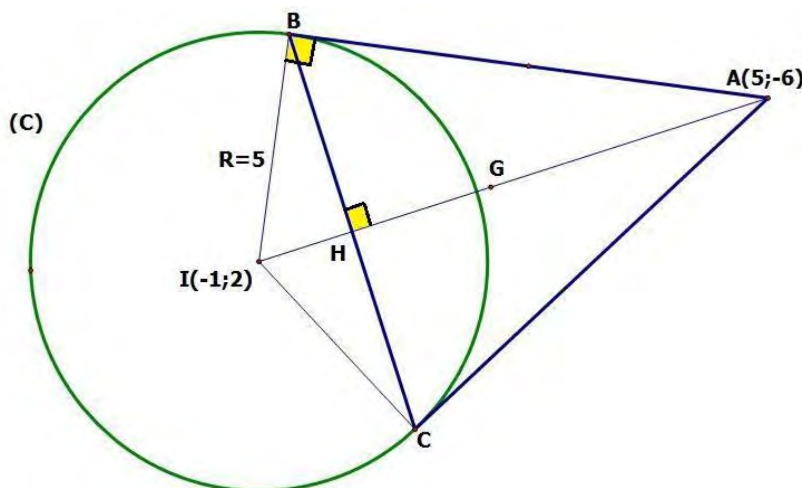
BÀI TOÁN 12 (ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn*** $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ ***và điểm*** $A(5;-6)$. ***Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (C) với B, C là các tiếp điểm. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.***

■ **Đặt vấn đề:** *Cũng là tâm của một đường tròn, nhưng tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp tam giác có một vị trí rất đặc biệt. Vậy làm sao để xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của một tam giác? Mời các bạn xem lời giải.*

■ **CÁCH 1:(Tìm tọa độ tiếp điểm B và C).**

☺ **Ý tưởng :**

- Để tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, có rất nhiều cách, một trong những cách giải nhanh nhất chính là áp dụng tính chất $\boxed{a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}}$ (với ΔABC có a = BC, b = AC, c = AB và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác). (*Xem lại phần chứng minh bổ đề ở chương 1)*
- Như vậy ta cần tìm tọa độ B và C? (Ở đây thầy nghĩ có hai hướng đi phù hợp hơn cả)



* **Hướng thứ 1,** Xét {B; C} = BC ∩ (C) → viết phương trình BC → BC ⊥ AI và qua H → tìm tọa độ điểm H → Do đã có AI và BI nên ta dễ dàng tính được HI ⇒ HI =?AI ⇒ $\overrightarrow{HI}=?\,\overrightarrow{AI}$ ⇒tọa độ H.

* **Hướng thứ 2,**Xét {B; C} = (C_1)∩ (C) (trong đó (C_1) chính là **đường tròn ẩn mình** có tâm A và bán kinh AB)→tính độ dài AB → dựa vào BI và AI.

- Sau khi tìm được tọa độ B và C, ta có thể áp dụng bổ đề trên để tìm nhanh tọa độ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(–1; 2) , bán kính R = 5 và IA = 10.

Mặt khác lại có AB = $\sqrt{AI^2+BI^2}=5\sqrt{3}$

* Ta có B và C là giao điểm giữa hai đường tròn (C) và (C_1) trong đó (C_1) có tâm A(5; –6) và bán kính là $AB=5\sqrt{3}$. Do đó tọa độ B và C thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-20=0 \\ (x-5)^2+(y+6)^2=75 \end{cases} \text{ Suy ra } \left[\begin{array}{l} B_1\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), C_1\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ B_2\left(\dfrac{1-4\sqrt{3}}{2};\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right), C_2\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$$

(*Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc*)

Do vai trò của BC là như nhau nên ta có thể chọn

$$B\left(\frac{1+4\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{1+4\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

* Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow$ BC = 2BH với $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BI^2}+\frac{1}{BA^2}$

$$\Rightarrow BH=\frac{5\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BC=5\sqrt{3}$$

(Đến đây ta lại phát hiện ΔABC đều do BC = BA = AC nên ta có thể kết luận luôn trọng tâm tam giác ABC chính là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Tuy vậy ta vẫn sẽ kiểm tra lại bằng cách áp dụng tính chất trên)

* Gọi G là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có: $\boxed{BC.\overrightarrow{GA}+AC.\overrightarrow{GB}+AB.\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$

Suy ra $\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$ là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow$**G(2; –2)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{G(2;-2)}$

■ **CÁCH 2:(Phát hiện tam giác ABC đều)**

► **Hướng dẫn giải cách 2**

* Gọi H là giao điểm của BC và IA, ta có: $IH.IA=IB^2\Rightarrow IH=\frac{IB^2}{IA}=\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};0\right)$$

* Xét ΔAIB có $\cos AIB=\frac{IB}{IA}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow AIB=60^\circ$ mà ΔABC cân tại A (do AB = AC) $\Rightarrow$ΔABC đều.

* Vậy tâm đường tròn nội tiếp ΔABC trùng với trọng tâm G của ΔABC.

* Gọi G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\Rightarrow G(2;-2)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{G(2;-2)}$

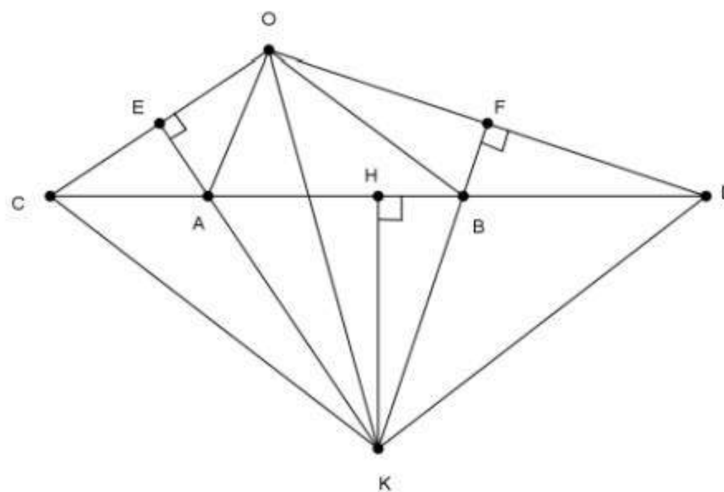
■ **Lời bình**: Nếu chú ý ở hai bài toán 11 vừa rồi và bài toán 12 này thì ta có một nhận xét rút ra được trong quá trình đi tìm lời giải, có rất nhiều yếu tố hình học quan trọng, đặc biệt đã bị người ra đề "làm mờ" đi. Nếu không khéo léo phát hiện ra có thể hoặc bạn sẽ dẫn dắt bài toán theo hướng giải dài hơn, hoặc cũng có thể bạn không tìm thấy hướng giải quyết của bài toán. Ngoài phương pháp tìm trên chúng ta cũng có thể viết phương trình đường phân giác trong (dựa vào đúng định nghĩa tâm đường tròn nội tiếp chính là giao điểm của các đường phân

giác, tuy nhiên việc thiết lập phương trình phân giác trước hết phải có được yếu tố của phương trình đường thẳng, các cạnh của tam giác và hướng giải tương đối cồng kềnh, trừ trường hợp vạn bất đắc dĩ ta mới nên làm theo hướng đó).

BÀI TOÁN13(ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A và B thuộc đường thẳng Δ: 4x + 3y – 12 = 0 và điểm K(6; 6) là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên đường Δ sao cho AC = AO và các điểm C, B nằm khác phía nhau so với điểm A. Biết điểm C có hoành độ bằng*** $\frac{24}{5}$ ***. Tìm tọa dộ các đỉnh A và B.***

(Trích đề minh họa kì thi THPT Quốc Gia 2015 – Bộ GD&ĐT)

■ **Đặt vấn đề:***Gần như trong tất cả các tài liệu, bài tập, đề thi, dạng đường tròn bàng tiếp tam giác rất khi được người ra đề đề cập đến. Đây cũng là đầu tiên, trong một đề thi với mục tiêu* ***thay đổi cách dạy và học ở Phổ Thông****, xét tốt nghiệp THPT và hướng đến sàng lọc, phân loại, lựa chọn những học sinh có năng lực tiếp tục học lên tiếp các cấp bậc Đại Học, Bộ GD&ĐT đã đưa ra bài toán này. Trở lại bài toán, có phải điểm mấu chốt, là nút thắt của bài toán chính là việc* ***xác định tâm đường tròn bàng tiếp tam giác?*** *Mời các bạn xem lời giải.*



■ **CÁCH 1:(Theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Trên Δ lấy điểm D sao cho BD = BO (D và D nằm khác phía nhau so với B).

* Gọi E = KA ∩ OC và F = KB ∩ OD. Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O và ΔOAB nên KE là phân giác của góc OAC. Mà ΔOAC cân A (do OA = AC) Suy ra KE là đường trung trực của OC. Do đó E là trung điểm OC và KC = KO.

* Xét tương tự đối với KF, ta cũng có F là trung điểm OD và KD = KO.

* Do đó ΔCKD cân tại K. Kẻ KH ⊥Δ tại H ⇒ H là trung điểm CD. Như vậy: A và B lần lượt là giao điểm của Δ và trung trực d_1 của đoạn OC, trung trực của đoạn OD (với D là điểm đối xứng của C qua H, H là hình chiếu vuông góc của K trên Δ.

* Vì C ∈Δ và có hoành độ $x_o = \dfrac{24}{5} \Rightarrow y_o = \dfrac{-1}{5}$

  Từ đó, trung điểm E của OC có tọa độ là $E\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{-6}{5}\right)$ và đường thẳng OC có phương trình x + 2y = 0.

  Suy ra phương trình của d_1 là: 2x – y – 6 = 0.

* $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3;\ 0).$$

* Gọi d là đường thẳng đi qua K(6; 6) và d ⊥Δ, ta có d: 3x – 4y + 6 = 0.

  Do $H = \Delta \cap d \Rightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right) \Rightarrow D\left(\frac{-12}{5};\frac{36}{5}\right)$$

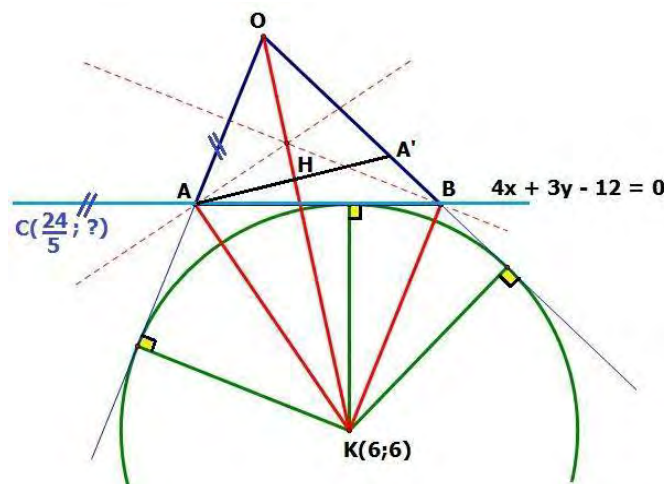
* Do đó, trung điểm F của OD có tọa độ là $D\left(\dfrac{-6}{5};\dfrac{18}{5}\right)$ và đường thẳng OD: 3x + y = 0. Suy ra d_2: x – 3y + 12 = 0.

* Mặt khác $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow$ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;4)$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là A(3;0) và B(0;4)

■ CÁCH 2:(Vận dụng tính chất của phân giác→ tìm thêm điểm mới)



☺ **Ý tưởng :**

● Do A thuộc Δ→ tham số hóa A.

● Do C ∈Δ→ tìm được tọa độ của C.

● Nhận xét OK chính là đường phân giác trong của ΔOAB (Do K là đường tròn bàng tiếp ΔOAB)

→ Viết phương trình OK.

● Vì OA = CA ⇒ tìm đươc tọa độ điểm A.

● Sử dụng tính đối xứng của phân giác → tìm được điểm A' là điểm đối xứng của A qua phân giác → Có điểm A' ta viết phương OA'

● B = OA' ∩ AB ⇒ tọa độ B

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Do C ∈Δ: 4x + 3y – 12 = 0 ⇒ $y_C = \frac{-12}{5}$ ⇒ $C\left(\frac{24}{5};\frac{-12}{5}\right)$.

Lại có **A ∈Δ⇒ A(3a; 4 – 4a)**

* Theo đề bài ta có OA = CA ⇒ $OA^2 = CA^2$ với $\begin{cases}\overrightarrow{CA} = \left(3a - \frac{24}{5}; \frac{32}{5} - 4a\right)\\ \overrightarrow{OA} = (3a; 4 - 4a)\end{cases}$

Suy ra $9a^2 + 16(1-a)^2 = \left(3a - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{32}{5} - 4a\right)^2$

$\Leftrightarrow 48a = 48 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow$ **A(3; 0)**

* Do K là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABC ⇒ OK là đường phân giác trong của góc AOB

Đường OK qua O(0; 0) nhận $\overrightarrow{OK} = (6;6)$ làm vtcp có dạng là:

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{6} \Leftrightarrow x - y = 0$$

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên OK và A' là điểm đối xứng của H qua OK (A' ∈ OK).

Đường AH ⊥ OK ⇒ x + y + m = 0, AH qua A(3; 0) ⇒ m = – 3.

Vậy **AH: x + y – 3 = 0**

Lại có, H = AH ∩ OK ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x + y - 3 = 0\\ x - y = 0\end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$$

Mặt khác, H là trung điểm AA' ⇒**A'(0; 3)**

* Đường thẳng OB qua O(0; 0) nhận $\overrightarrow{OA'} = (0;3)$ làm vtcp có dạng là OB:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Do B ∈ OB ⇒ B(0; 3t).

Mặt khác B ∈Δ: 4x + 3y – 12 = 0 ⇒ $t = \dfrac{4}{3}$ ⇒**B(0; 4)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là A(3;0) và B(0;4)

■ **CÁCH 3:(Vận dụng tính chất của tâm đường tròn bàng tiếp tam giác)**

☺ **Ý tưởng :** Tâm đường tròn bàng tiếp tam giác tiếp xúc với một cạnh của tam giác và phần kéo dài của hai cạnh còn lại (tương tự như tâm đường tròn nội tiếp → dùng định nghĩa tiếp xúc để chuyển sang khoảng cách) .

- Cụ thể trong bài này, chúng ta làm tương tự cách 2 khi tìm dễ dàng tọa độ A và C.
- Viết phương trình đường OA và gọi dạng đường thẳng OB:

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0,\ (a^2 + b^2 > 0)$$

- Ta có d[K; OA] = d[K;OB] → Tìm được phương trình OB.
- OB ∩ AB = B ⇒ Tọa độ điểm B.

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Do C ∈Δ: 4x + 3y – 12 = 0 ⇒ $y_C = \dfrac{-12}{5}$ ⇒ $C\left(\dfrac{24}{5}; \dfrac{-12}{5}\right)$.

Lại có **A ∈Δ⇒ A(3a; 4 – 4a)**

* Theo đề bài ta có OA = CA ⇒ $OA^2 = CA^2$ với $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = \left(3a - \dfrac{24}{5}; \dfrac{32}{5} - 4a\right) \\ \overrightarrow{OA} = (3a; 4 - 4a) \end{cases}$

Suy ra $9a^2 + 16(1 - a)^2 = \left(3a - \dfrac{24}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{32}{5} - 4a\right)^2 \Leftrightarrow 48a = 48 \Leftrightarrow a = 1$

⇒ **A(3; 0)**

* Ta có đường thẳng OA qua O(0;0) và nhận $\overrightarrow{OA} = (3; 0)$ làm vtcp có dạng: **y = 0**

Gọi pt đường thẳng OB qua O(0; 0) nhận $\vec{n} = (a; b)$ $(a^2 + b^2 > 0)$ làm vtpt có dạng là: $a(x - 0) + b(y - 0) = 0 \Leftrightarrow OB: ax + by = 0$

* Do K là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ⇒ d[K; OA] = d[K; OB]

$$\Leftrightarrow \frac{|0.6 + 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|6a + 6b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

* Với a = 0, ta chọn b = 1 ⇒ OB: y = 0 (loại vì trùng đường OA)

* Với b = 0, ta chọn a = 1 ⇒ OB: x = 0. Lại có B = OB ∩ AB ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;4)$$

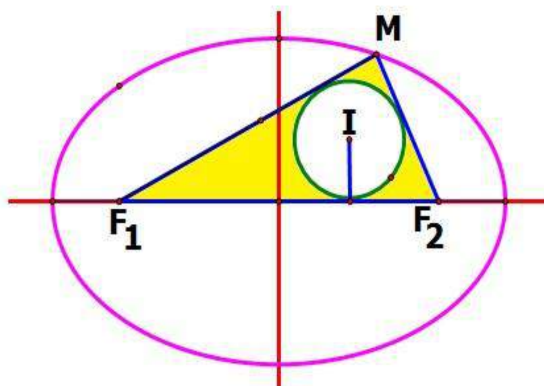
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là A(3;0) và B(0;4)

■ **Lời bình:** Có thể thấy khó khăn lớn nhất của bài toán này của học sinh là không nắm và không hiểu hết được định nghĩa, tính chất của **tâm đường tròn bàng tiếp tam giác**. Tuy vậy ta vẫn thấy cách giải của Bộ GD&ĐT tương đối khó hiểu khi chú ý việc vận dụng **"sử dụng kỹ thuật vẽ đường phụ"** mà không khai thác triệt để tính chất của "**tâm đường tròn bàng tiếp tam giác**" (Các bạn có thể xem kỹ ở phần lý thuyết chương 1 nhé).

BÀI TOÁN 14 (ĐƯỜNG ELIP). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.***

■ **Đặt vấn đề:** *trải qua 13 bài toán với các dạng hình khác nhau từ tam giác đến tứ giác, đường tròn, giờ đây chúng ta tiếp tục đi tiếp đến đường elip (nằm trong bộ ba đường conic: Elip – Hypebol – Parabol). Bài toán tìm điểm M thuộc (E) thì ta nên khai thác theo những yếu tố nào? Mời các bạn cùng theo dõi.*

☺ **Ý tưởng :**



- *Khi M ∈ (E) ta chắc chắn có được 1 pt 2 ẩn → tìm thêm 1PT nữa.*
- *Từ PT (E) ta khai thác các yếu tố a, b, c của (E)*
- *Do M ∈ (E) nên theo định nghĩa ta có $MF_1 + MF_2 = 2a$.*
- *Bài toán đề cập đến bán kính đường tròn nội tiếp ΔMF_1F_2 ta có thể đi theo hướng phân giác hoặc khoảng cách từ tâm I đến các cạnh (cụ thể là Ox) bằng r = 4/3. Hoặc cũng có thể khai thác nó theo công thức*

$$S = pr = \frac{1}{2} d\left[M;Ox\right].F_1F_2 = \frac{1}{2}\left|y_M\right|.2c$$

► **Hướng dẫn giải:**

* Từ (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$ (do a, b, c > 0)

Gọi M(x_M; y_M) là điểm cần tìm. Do M ∈ (E) nên ta có $\frac{x_M{}^2}{25} + \frac{y_M{}^2}{9} = 1$ **(1)** và $MF_1 + MF_2 = 2a = 10$

* Xét ΔMF_1F_2 có nửa chu vi $p = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = \frac{10 + 2c}{2} = 9$

Lại có $S_{\Delta MF_1F_2} = pr = 9.\frac{4}{3} = 12$ **(r là bán kính đường tròn nội tiếp** ΔMF_1F_2**)**

* Mặt khác, $S = pr = \frac{1}{2} d\left[M;Ox\right].F_1F_2 = 9 \Leftrightarrow = \frac{1}{2}\left|y_M\right|.2c = 12 \Leftrightarrow \left|y_M\right| = 3$ **(2)**

* Từ (1), (2) ta suy ra **M(0; 3) hay M(0; –3)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là M(0 ;3) hay M(0 ;–3)

■ **Lời bình**:*Với bài toán tìm điểm liên quan đến Elip ngoài việc liên hệ các kiến thức đã học, bạn còn phải biết vận dụng các kỹ thuật ở những bài toán đã giới thiệu trước đó như kỹ thuật tham số hóa, kỹ thuật dùng diện tích, kỹ thuật vẽ đường phụ, v.v...*

BÀI TOÁN15(ĐƯỜNGHYPEBOL).*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol* $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ *và tọa độ điểm A(–2; 0). Tìm tọa độ điểm B và C thuộc nhánh phải của (H) sao cho ΔABC là tam giác đều.*

■ **Đặt vấn đề:***Tương tự như bài toán 14, khi tìm điểm thuộc các đường conic đã có phương trình thì việc khai thác các chỉ số a, b, c của phương trình chính tắc chắc chắn không thể bỏ qua. Cụ thể trong bài toán này thì ta nên khai thác chúng theo hướng nào? Đặc biệt việc cho điểm A(–2;0) có tạo được thuận lợi nào cho ta không? Mời các bạn xem lời giải.*

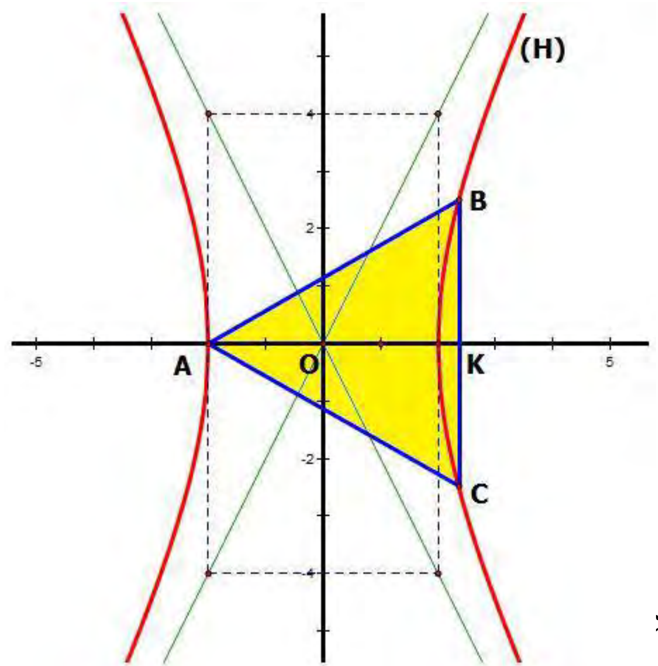
☺ **Ý tưởng :**

- Từ phương trình (H) ta khai thác các giá trị a, b, c.
- Nhận xét A ∈ (H) mà (H) nhận trục hoành làm trục đối xứng nên để ΔABC đều (AB = AC) thì ta phải có $x_B = x_C > 0,\ y_B = -y_C$. Và cho điểm B ∈ (H) ⇒ lập được một phương trình (1).

- Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow$ H thuộc trục hoành.

  Ta có ΔABC đều $\Rightarrow AH = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ pt (2).

► Hướng dẫn giải:



* (H): $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = b^2 - a^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \quad (a,b,c > 0) \\ c = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

* Gọi B(x_B; y_B), C(x_C; y_C) là tọa độ ; nhánh phải (H))

Nhận xét A(–2; 0) ∈ (H), vì (H) nhận trục hoành làm trục đối xứng nên ta có $x_B = x_C > 0,\ y_B = -y_C$

* Gọi K = BC ∩ trục hoành ta có: $AK = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AO + AK = \dfrac{2|y_B|\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $2 + x_B = |y_B|\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{|y_B| = \dfrac{2 + x_B}{\sqrt{3}}}$ (1).

* Mặt khác ta lại có: B ∈ (H) $\Rightarrow \dfrac{x_B^{\ 2}}{4} - \dfrac{y_B^{\ 2}}{16} = 1$ (2).Thay (1) vào (2) ta được:

$$\begin{cases} |y_B| = \dfrac{2 + x_B}{\sqrt{3}} \\ 4x_B^{\ 2} - y_B^{\ 2} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y_B| = \dfrac{2 + x_B}{\sqrt{3}} \\ 4x_B^{\ 2} - \dfrac{(2 + x_B)^2}{3} = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y_B| = \dfrac{2 + x_B}{\sqrt{3}} \\ 11x_B^{\ 2} - 4x_B - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y_B| = \dfrac{2 + x_B}{\sqrt{3}} \\ \left[\begin{array}{l} x_B = -2 \\ x_B = \dfrac{26}{11} \end{array}\right. \end{cases}$$

Do $x_B > 0$ nên ta nhận

$$x_B=\frac{26}{11}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y_B=\dfrac{16\sqrt{3}}{11}\\ y_B=\dfrac{-16\sqrt{3}}{11}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} B_1\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{16\sqrt{3}}{11}\right),\ C_1\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{-16\sqrt{3}}{11}\right)\\ B_2\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{-16\sqrt{3}}{11}\right),\ C_2\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{16\sqrt{3}}{11}\right)\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} B_1\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{16\sqrt{3}}{11}\right),\ C_1\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{-16\sqrt{3}}{11}\right)\\ B_2\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{-16\sqrt{3}}{11}\right),\ C_2\left(\dfrac{26}{11};\dfrac{16\sqrt{3}}{11}\right)\end{array}\right.}$

■ **Lời bình:**Có thể thấy với bài toán tìm điểm thuộc các đường conic, chúng ta đã có sẵn một phương trình của điểm. Tuy vậy nếu không biết cách phát hiện vị trí đặc biệt của điểm A, hoặc nhận xét các tính chất đặc biệt của (H) như nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng thì dường như bài toán trở nên rất khó khăn. Việc vẽ hình cũng đã định hướng phần nào trong quá trình giải.

BÀI TOÁN 16 (ĐƯỜNGPARABOL). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol*** $(P): y^2 = x$ ***và tọa độ điểm I(0; 2). Tìm tọa độ điểm hai điểm M, N thuộc (P) sao cho*** $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$

■ **Đặt vấn đề:**tương tự như khi ta khai thác các đường elip, hypebol, với đường parabol ta cũng cần nắm vững những thuộc tính của chúng. Tuy nhiên với bài toán này, chúng ta không cần quan tâm đến các thuộc tính của chúng nhưng cũng cần phải nói, có một số bài nếu không nắm được thuộc tính của các đường conic thì rất khó để ta giải đúng và tìm nhanh ra kết quả như mong muốn. Mời các bạn xem lời giải.

■ **CÁCH 1:**

☺ **Ý tưởng :** Theo như yêu cầu bài toán, ta gọi tọa độ M và N → 4 ẩn→ cần thiết lập 4 phương trình?

- phương trình (1) → M ∈ (P),
- phương trình (2) → N ∈ (P),
- phương trình (3) và (4) → khai thác biểu thức tọa độ $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ là hai điểm thuộc (P). Khi đó ta có : $\begin{cases} {x_M}^2 = y_M\ (1)\\ {x_N}^2 = y_N\ (2)\end{cases}$

* Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IM}=(x_M;y_M-2)\\ \overrightarrow{IN}=(x_N;y_N-2)\end{cases}$.

Theo đề bài ta có : $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4x_N & (3) \\ y_M - 2 = 4(y_N - 2) & (4) \end{cases}$

* Từ (1), (2), (3), (4) ta có hệ phương trình và giải hệ đó ta được :

$$\left[\begin{array}{l} x_N = 1 \Rightarrow y_N = 1, x_M = -2 \Rightarrow y_N = 4 \\ x_N = 3 \Rightarrow y_N = 9, x_M = 6 \Rightarrow y_N = 36 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(4;-2),\ N(1;1) \\ M(36;6),\ N(9;3) \end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} M(4;-2),\ N(1;1) \\ M(36;6),\ N(9;3) \end{array}\right.}$

■ **CÁCH 2:** tham số hóa M, N theo (P) (sử dụng 2 ẩn → thiết lập 2 phương trình, *việc giải tương tự như cách 1, xin dành cho bạn đọc*)

■ **Lời bình:***Như vậy là 16 bài toán đầu tiên với đủ các dạng hình cùng với câu hỏi tìm tọa độ điểm đã được giới thiệu đến các bạn. Để củng cố và nhấn mạnh một số kiến thức, kỹ năng, các bạn nên làm* ***bài tập chọn lọc– tự luyện có hướng dẫn giải*** *ở phần tiếp theo đây nhé. Đồng thời cũng cần nhấn mạnh, các chủ đề còn lại của chương này như* ***viết phương trình đường thẳng, đường tròn, đường conic****, v.v... đều có thể ứng dụng để tìm tọa độ điểm.*

BÀI TẬP CHỌN LỌC – TỰ LUYỆN CHỦ ĐỀ 1

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(2;6), B(–3; –4), C(5; 0).

a. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H của ΔABC.

b. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

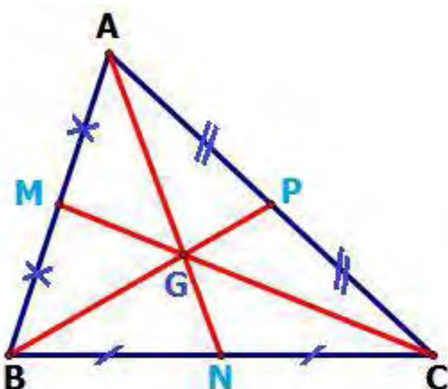
c. Tìm tọa độ D là giao điểm của đường thẳng BC và đường phân giác ngoài của góc A.

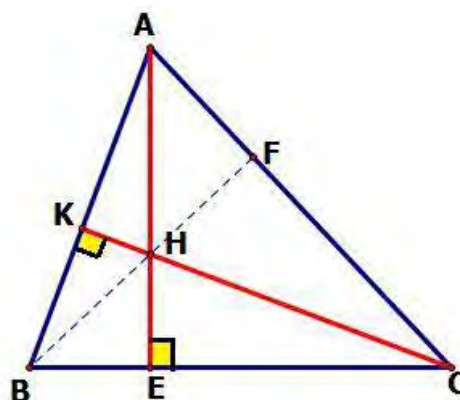
d. Tìm tọa độ J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

e. Tìm tọa độ K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC.

(**ĐS**: $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right), H(5;0), I\left(\frac{-1}{2};1\right), D(17;6), J(2;1), K(2;-9)$)

a. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H của ΔABC





■ **Phân tích tìm lời giải:**

●Không quá khó để tìm tọa độ G do đã biết cả 3 tọa độ của 3 đỉnh A, B, C

● Để tìm tọa độ điểm H ta dựa vào tính chất của trực tâm → AH⊥BC và BH ⊥ AC → chuyển về tích vô hướng giữa 2 véctơ để giải → tìm được tọa độ H.

► **Hướng dẫn giải:**

* Do G là trọng tâm ΔABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2-3+5}{3} = \dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{6-4+0}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)}$$

* Gọi $H(x_H; y_H)$ là tọa độ trực tâm của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} (*) \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x-2; y-6) \\ \overrightarrow{BH} = (x+3; y+4) \\ \overrightarrow{BC} = (8;4) \\ \overrightarrow{AC} = (3;-6) \end{cases}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x-2)+4(y-6)=0 \\ 3(x+3)-6(y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(5;0)}$

b. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

■ **Phân tích tìm lời giải:**

Để tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếpΔABC khi đã biết tọa độ của 3 đỉnh A, B, C ta có thể giải theo 3 cách sau:

● Cách 1: Gọi tọa độ I(x;y), vận dụng định nghĩa của **tâm I là cách đều ba đỉnh tam giác**$\Rightarrow \begin{cases} IB = IC \\ IB = IA \end{cases}$

● Cách 2: Lập pt d_1, d_2 lần lượt là phương trình trung trực của cạnh AB, BC ta có $d_1 \cap d_2$= I(vận dụng cách dựng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của các đường trung trực).

● Cách 3: Gọi dạng khai triển của pt đường tròn (C) ngoại tiếpΔABC: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó I(a;b) chính là tọa độ cần tìm. Lần lượt thay tọa độ A, B, C vào pt khai triển→giải hệ 3 pt 3 ẩn tìm I.

● Cách 4: Ta cũng có thể vận dụng quan hệ thẳng hàng giữa trực tâm H, trọng tâm G và tâmđường tròn ngoại tiếp I đó chính là $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ (H và G là tọa độ đã tìm được ở câu a).

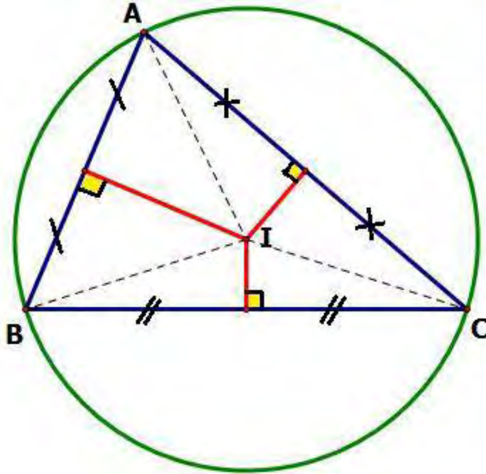
● Cách 5: Ta cũng có thể gọi M là trung điểm BC, dựa vào tính chất $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ → giải tìm I.

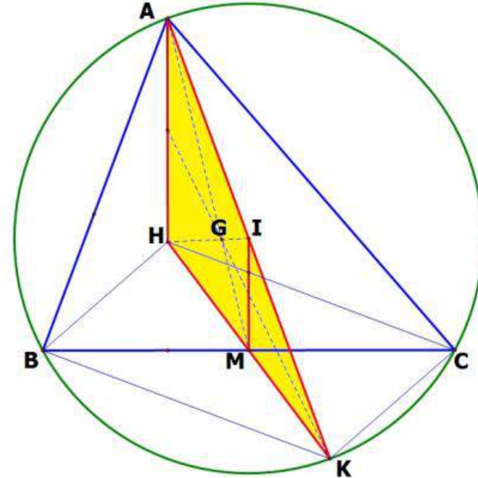
● Cách 6: Bằng cách tính tất cả các cạnh để kiểm traΔABC có là **tam giác đặc biệt?**

+ Giả sử: **ΔABC vuông** tại A thì trung điểm cạnh huyền BC chính là tâm I

+ Giả sử: **ΔABC đều** thì trọng tâm G của tam giác ABC chính là tâm I

+ Giả sử: **ΔABC cân tại A** có góc $BAC = 120^o$ thì tâm I chính là đỉnh thứ 4 của hình thoi ACDB.





► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi I(x_I; y_I) là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp$\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} IB = IC \\ IC = IA \end{cases}$ **(*)**

* Với $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = (x_I - 2; y_I - 6) \\ \overrightarrow{BI} = (x_I + 3; y_I + 4) \\ \overrightarrow{CI} = (x_I - 5; y_I) \end{cases}$ do đó (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} CI^2 = BI^2 \\ CI^2 = AI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_I - 5)^2 + {y_I}^2 = (x_I - 2)^2 + (y_I - 6)^2 \\ (x_I - 5)^2 + {y_I}^2 = (x_I + 3)^2 + (y_I + 4)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x_I + 25 = -4x_I + 4 - 12y_I + 36 \\ -10x_I + 25 = 6x_I + 9 + 8y_I + 16 \end{cases}$ (nhận xét x_I^2; y_I^2 đều bị triệt tiêu nên ta khai triển nhanh)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x_I + 12y_I = 15 \\ -16x_I - 8y_I = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{-1}{2} \\ y_I = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\dfrac{-1}{2}; 1\right)}$$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**Gọi d_1, d_2lần lượt là trung trực của cạnh AB, BC

* Gọi $M\left(\dfrac{-1}{2}; 1\right), N(1; -2)$ lần lượt là trung điểm AB, AC.

* Ta có d_1 qua $M\left(\frac{-1}{2};1\right)$ nhận $\overrightarrow{AB}=(-5;-10)$ làm vtpt có dạng là :

$$-5(x+\frac{1}{2})-10(y-1)=0 \Leftrightarrow (d_1): 2x+4y-3=0$$

* Ta có d_2 qua $N(1;-2)$ nhận $\overrightarrow{BC}=(8;4)$ làm vtpt có dạng là :

$$8(x-1)+4(y+2)=0 \Leftrightarrow (d_2): 2x+y=0$$

* Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow I=(d_1)\cap(d_2)$

$\Rightarrow$ tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{-1}{2};1\right)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Gọi phương trình dạng khai triển của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ với tâm } I(a;\, b)$$

* Ta có $\begin{cases} A\in(C)\Rightarrow -4a-12b+c=-40 & (1) \\ B\in(C)\Rightarrow 6a+8b+c=-25 & (2) \\ C\in(C)\Rightarrow -10a+c=-25 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-1}{2} \\ b=1 \\ c=-30 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{-1}{2};1\right)}$

► **Hướng dẫn giải cách 4:**

* Nhận xét I, H, G thẳng hàng và đặc biệt $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}$ ***(phần chứng minh kết quả bổ đề này mời các bạn xem ở chương 1).*** Do đó

$$\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x_I=3(\frac{4}{3}-x_I) \\ 0-y_I=3(\frac{2}{3}-y_I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=\frac{-1}{2} \\ y_I=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{-1}{2};1\right)}$$

► **Hướng dẫn giải cách 5:** Gọi M(1; –2) là trung điểm BC

* Nhận xét $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ ***(phần chứng minh kết quả bổ đề này mời các bạn xem ở chương 1).***

* Do đó $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2=2(1-x_I) \\ 0-6=2(-2-y_I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=\frac{-1}{2} \\ y_I=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{-1}{2};1\right)}$

► **Hướng dẫn giải cách 6:**

* Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-5;-10) \Rightarrow AB = 5\sqrt{5} \\ \overrightarrow{BC} = (8;4) \Rightarrow BC = 4\sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC} = (3;-6) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5} \end{cases}$

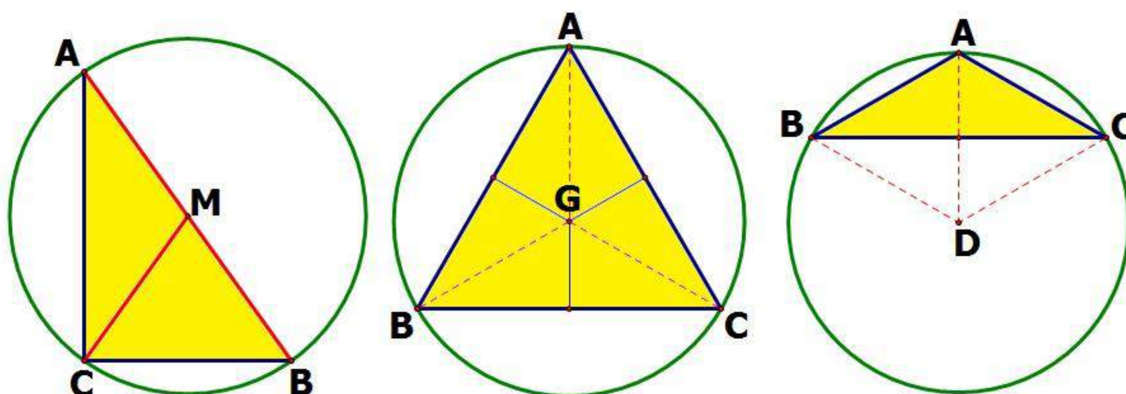
* Nhận xét $BC^2 + AC^2 = AB^2$ (theo định lý Py–ta–go đảo) $\Rightarrow \Delta ABC \perp C \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là **trung điểm cạnh huyền AB**

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\dfrac{-1}{2};1\right)}$$

(hoặc nhận xét $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC \perp C$)

■ **Lời bình cho câu b:** Qua các cách giải đã trình bày ở câu b, chúng ta rút ra vài nhận xét sau:

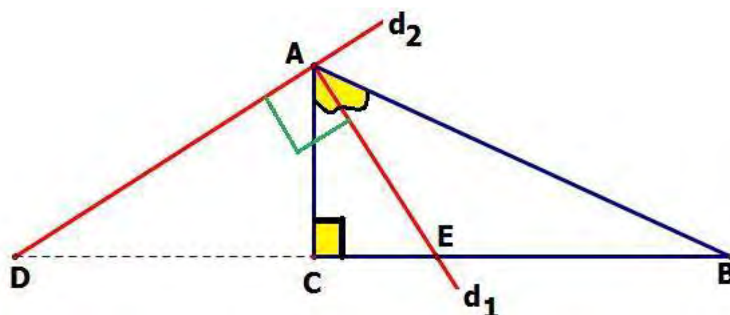
Một là, đề cập đến việc xác định tâm đường tròn ngoại tiếp với những tam giác đặc biệt thì chúng ta có những lưu ý sau:



Hai là, mỗi cách trên đều có cái hay riêng của nó, có cách thì vận dụng tính chất hình học, các kết quả đẹp từ đường tròn (cách 4 và cách 5), có cách vận dụng nội tại của định nghĩa và tính xây dựng của điểm (cách 1 và cách 2), có cách thì vận dụng phương trình đường tròn trong hình tọa độ Oxy (cách 3), đặc biệt là cách 6 với việc tính toán kiểm tra các dạng hình để rút ra những kết luận quan trọng.

c.Tìm tọa độ D là giao điểm của đường thẳng BC và đường phân giác ngoài của góc A.

■ **CÁCH 1:**



■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Yêu cầu của đề là tìm tọa độ D→AD ∩ BC = D ⇒ như vậy ta cần viết pt BC và pt AD.

● AD là phân giác ngoài góc A của ΔABC ⇒ AD ⊥ AE (2 phân giác vuông góc nhau)

● Ở đây ta có thể có những cách nào để viết phương trình AD?

\+ **Hướng thứ 1:** Ta có thể viết phương trình AC và AB sau đó dùng **công thức lập pt đường phân giác trong và ngoài của góc A.**

\+ **Hướng thứ 2:**Ta tìm tọa độ E là chân đường phân giác trong kẻ từ A thông qua tỉ số của chân đường phân giác với các cạnh là $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CE}{EB}$ → AD qua A và AD ⊥ AE.

● Xin được trình bày lời giải cách 1 theo hướng thứ 1.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Dễ dàng lập được phương trình AB ,AC, BC là $\begin{cases} AB: 2x - y + 2 = 0 \\ AC: 2x + y - 10 = 0 \\ BC: x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

* Phương trình đường phân giác tạo bởi AB và AC là:

$$\boxed{\frac{2x - y + 2}{\sqrt{4+1}} = \pm\frac{2x + y - 10}{\sqrt{4+1}}}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} y - 6 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$

*(Để biết đường thẳng nào là phân giác trong hay ngoài ta có thể **xét sự cùng phía của B,C** so với các đường đó hoặc xét khoảng cách từ B (hoặc C) lần lượt đến hai đường → khoảng cách lớn nhất tương ứng với phân giác ngoài).*

* Ta có: B(–3;–4) và C(5; 0): (–4–6).(–6) = 60 > 0 ⇒ B và C cùng phía so với đường **y – 6 = 0⇒AD: y – 6 = 0 chính là đương phân giác ngoài góc A**.

* Ta có D = AD ∩ BC ⇒ tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y-6=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(17;6)}$$

■ **CÁCH 2:** Sử dụng tỉ số chân đường phân giác ngoài.

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Ở lớp 8, chúng ta đã được học một định lý về đường phân giác.

Cụ thể $\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{EB}=\frac{DC}{DB}$

● Chúng ta sẽ dựa vào tỉ số đó để chuyển đẳng thức độ dài → đẳng thức véctơ.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có AB = $5\sqrt{5}$, AC = $3\sqrt{5}$. Theo định lý về đường đường phân giác ta có:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{DC}{DB}=\frac{3}{5}\Rightarrow DC=\frac{3}{2}DB\Rightarrow DC=\frac{3}{2}BC\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$ (chú ý dấu của véctơ)

Suy ra $\begin{cases} x_D-5=\frac{3}{2}.8 \\ y_D-0=\frac{3}{2}.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D=17 \\ y_D=6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(17;6)}$

■ **Lời bình cho câu c:** Qua việc tìm tọa độ chân đường phân giác ngoài ta rút ra một số kinh nghiệm sau:

Một là, dựa vào tỉ số chân đường phân giác ngoài ta hoàn toàn có thể giải nhanh bài toán này, tuy nhiên ta cần chú ý đến dấu giữa các véctơ, về sự cùng hướng, ngược hướng giữa các véctơ.

Hai là, tuy là cách 1 trình bày tương đối dài và thiên về hướng "lập phương trình đường thẳng" (xem chủ đề 2) nhưng cũng cho ta một hướng tiếp cận khác đó chính là xét tọa điểm trong sự tương giao giữa các đường.

d.Tìm tọa độ J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

■ **Phân tích tìm lời giải:**

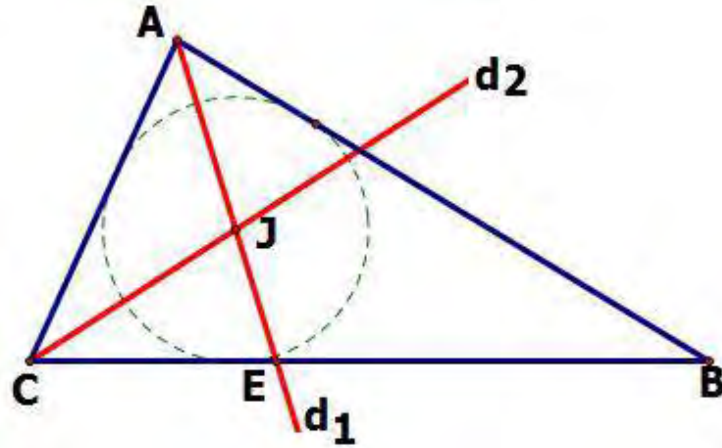
Có thể có những cách nào để tìm tâm đường tròn nội tiếp ΔABC (khi đã biết tọa độ 3 đỉnh)?

● Cách 1:Tìm tọa độ E chân đường phân giác trong góc Adựa vào $\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{EB}$

→ tâm J chính là chân đường phân giác trong góc B của ΔABE (hoặc chân đường phân giác trong góc C của ΔACE)

● Cách 2: Lập 2 phương trình đường d_1 và d_2 là phân giác trong của 2 trong 3 góc bất kỳ của ΔABC → J = $d_1 \cap d_2$ → tìm được tọa độ J

● Cách 3: Áp dụng bổ đề: "Cho ΔABC với BC = a, AC = b, AB = c và J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Khi đó: $a\overrightarrow{JA}+b\overrightarrow{JB}+c\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Rightarrow$ tọa độ J.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi AE là đường phân giác trong góc A ($E = AE \cap BC$)

Suy ra: $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{EC} \Rightarrow \boxed{E\left(2;\frac{-3}{2}\right)}$

* Mặt khác, ta lại có J chính là chân đường phân giác trong góc B của ΔABE

Suy ra: $\frac{JE}{JA} = \frac{CE}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{JE} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{JA} \Rightarrow \boxed{J(2;1)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có đường phân giác trong góc A là AE: x – 2 = 0.

* Phương trình đường phân giác tạo bởi BC và AC là:

$$\boxed{\frac{x-2y-5}{\sqrt{4+1}} = \pm\frac{2x+y-10}{\sqrt{4+1}}}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x+3y-5=0 \\ 3x-y-15=0 \end{array}\right.$

* Ta có: A(2;6) và B(–3; –4) thay vào đường x + 3y – 5 = 0 :

(2 + 18 – 5).(– 9 + 4 – 15) < 0 ⇒ B và A khác phía so với đường **x + 3y – 5 = 0**

⇒ **CJ: x + 3y – 5 = 0 chính là đương phân giác trong góc C**.

* $J = CJ \cap AE \Rightarrow$ Tọa độ J là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x+3y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{J(2;1)}$$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

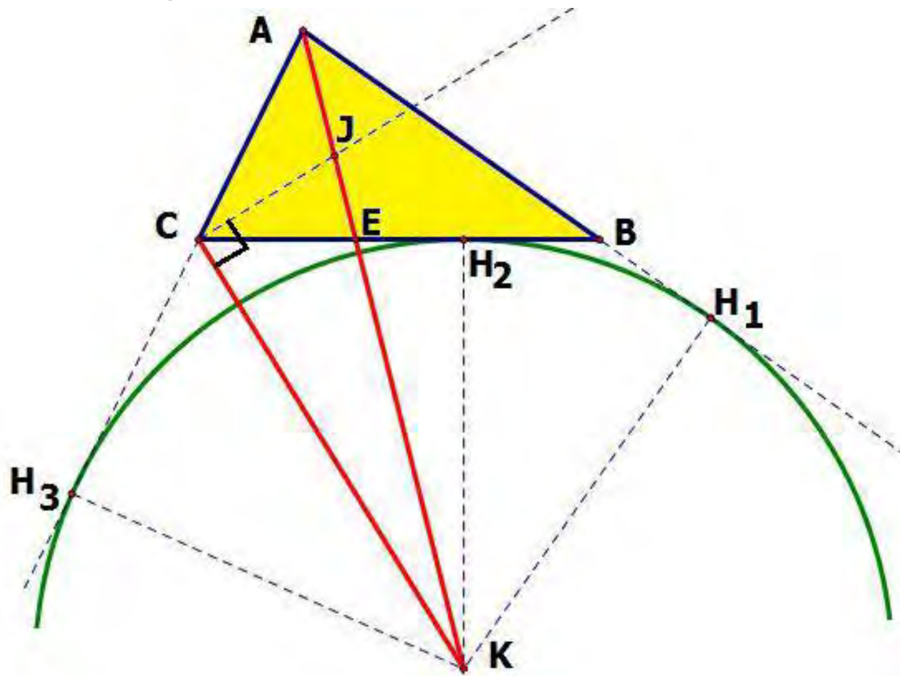
* Áp dụng bổ đề: $BC.\overrightarrow{JA} + AC.\overrightarrow{JB} + AB\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (***việc chứng minh bổ đề này mới bạn đọc xem ở lý thuyết chương 1***)

* $4\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{BJ} + 5\overrightarrow{CJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_J - x_A) + 3(x_J - x_B) + 5(x_J - x_C) = 0 \\ 4(y_J - y_A) + 3(y_J - y_B) + 5(y_J - y_C) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_J - 2) + 3(x_J + 3) + 5(x_J - 5) = 0 \\ 4(y_J - 6) + 3(y_J + 4) + 5(y_J - 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 2 \\ y_J = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{J(2;1)}$$

e.Tìm tọa độ K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC.

■ **Phân tích tìm lời giải:**



● Để xác định tâm đường tròn bàng tiếp của một góc trước hết bạn cần nắm lại định nghĩa và các tính chất liên quan của chúng (bạn có thể tham khảo phần lý thuyết chương 1 và bài toán mẫu của chủ đề 1 để hiểu rõ hơn).

● Dựa vào định nghĩa và tính chất của tâm đường tròn bàng tiếp một góc trong tam giác ta có thể có những hướng giải sau:

+ **Hướng thứ 1:** (Dựa vào định nghĩa K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A chính là giao điểm giữa phân giác trong góc A và hai đường phân giác ngoài của góc B và C) → như vậy ta chỉ cần lập phương trình các đường phân giác là có thể tìm được giao điểm.

+ **Hướng thứ 2**: Do K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC nên K sẽ cách đều cạnh BC và hai cạnh nối dài AC và AB → d[K;AB] = d[K; BC] = d[K;AC] (hướng đi này sẽ tối ưu hơn nếu như ta đã có K ∈ đường phân giác trong góc A).

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có đường phân giác trong góc A là AE: $\mathbf{x - 2 = 0}$.

* Dựa vào kết quả từ câu d, ta có phương trình đường phân giác ngoài của góc C là

CK: $\mathbf{3x - y - 15 = 0}$

* K = AE ∩ CK ⇒ Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 3x-y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(2;-9)}$$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có K ∈ AE: x – 2 = 0 ⇒ K(2; k)

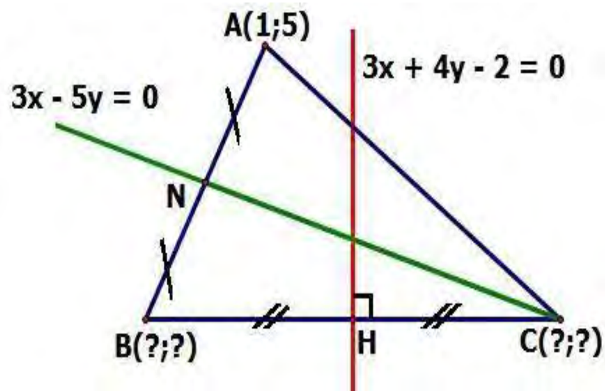
* Do tính chất của K nên ta có d[K;AB] = d[K; BC]

$$\Leftrightarrow \frac{|2.2-k+2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2-2k-5|}{\sqrt{4+1}}$$

Suy ra |6 – k| = |2k + 3| $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \Rightarrow K_1(2;1) \\ k=-9 \Rightarrow K(2;-9) \end{array}\right.$ (loại K_1 vì $K_1 \equiv J$)⇒ $\boxed{K(2;-9)}$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;5)$, trung tuyến CN và đường trung trực của cạnh BC lần lượt có phương trình là 3x – 5y = 0 và 3x + 4y – 2 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

(**ĐS**: $B(-1;-5), C(5;3)$)



■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Để tìm tọa độ B và C ta xem B, C có đang thuộc phương trình đường thẳng nào không? hoặc liên hệ với những tọa độ với điểm nào không? → C ∈ CN, N là trung điểm AB và N ∈ CN.

● Ta cần thiết lập 2 phương trình có liên hệ với B và C. Vậy đó là những phương trình nào? → gọi H là trung điểm BC ⇒ tọa độ H theo tọa độ B và C. Lại có H ∈ trung trực của BC→ pt (1).

● Mặt khác BC ⊥vuông góc với trung trực của BC $\rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_d} = 0 \rightarrow$ pt (2)

● Từ (1), (2) → giải hệ phương trình tìm được tọa độ C và N ⇒ tọa độ C và B.

► **Hướng dẫn giải:** Gọi N, H lần lượt là trung điểm của AB và BC.

* Gọi C ∈ CN ⇒**C(5c; 3c)** và N ∈ CN ⇒**N(5n; 3n).**

Ta có: N là trung điểm AB ⇒ N thỏa $\begin{cases} 2x_N = x_A + x_B \\ 2y_N = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 10n - 1 \\ y_B = 6n - 5 \end{cases}$

⇒**B(10n – 1; 6n – 5)**

* DoH là trung điểm BC ⇒H thỏa $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{10n-1+5c}{2} \\ y_H = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{6n-5+3c}{2} \end{cases}$

Mặt khác ta có $H \in d$ là đường trung trực BC

$\Rightarrow 3x_I + 4y_I - 2 = 0 \Leftrightarrow$ **2n + c – 1 = 0 (1)**

* Ta có $BC \perp d: 3x + 4y - 2 = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_d} = 0 \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{BC} = (5c - 10n + 1; 3c - 6n + 5) \\ \overrightarrow{u_d} = (4; -3) \text{ la vtcp cua d} \end{cases}$$

Do đó ta có $4(5c - 10n + 1) - 3(3c - 6n + 5) = 0 \Leftrightarrow$ **c – 2n + 1 = 0 (2)**

* Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c + 2n = 1 \\ c - 2n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ n = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ **C(5; 3) và B(–1; –5)**

Vậy tọa độ đỉnh cần tìm là **C(5;3) và B(–1;–5)**

***Vậy tọa độ điểm cần tìm là*: C(5;3) và B(–1;–5)**

■ **Lời bình:** Có một số kinh nghiệm rút ra sau khi giải xong bài toán này:

Một là, khi đặt tọa độ tham số hóa các điểm cần tìm, thì cách đặt và lựa chọn biến đặt cho phù hợp rất quan trọng, trong bài này với tọa độ điểm N nếu đặt $x_N = n$ hay $y_N = n$ đều có kết quả tọa độ điểm không đẹp dẫn đến gây ra khó khăn trong quá trình giải.

Hai là, khi sử dụng tích vô hướng giữa các đoạn vuông góc, ta cũng có thể sử dụng véctơ chỉ phương (vtcp), véctơ pháp tuyến (vtpt) để thay thế.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh C(–1; –1), trọng tâm G thuộc đường thẳng x + y – 2 = 0. Biết độ dài cạnh $AB = \sqrt{5}$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là x + 2y – 3 = 0. Tìm tọa độ của đỉnh A và B.

(**ĐS**: $A\left(6; \frac{-3}{2}\right), B\left(4; \frac{-1}{2}\right) \textit{hay } A\left(4; \frac{-1}{2}\right), B\left(6; \frac{-3}{2}\right)$)

■ **CÁCH 1:**

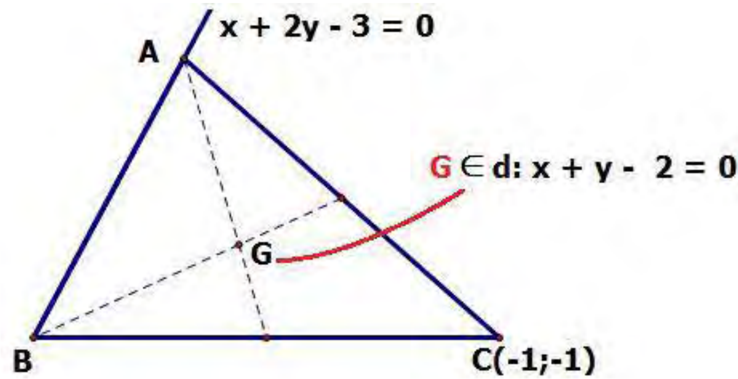
■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Ta tìm cách tham số hóa điểm A và B → A và B thuộc AB. (Giảm ẩn) → thiết lập 2 phương trình.

● Sử dụng tính chất của trọng tâm G → biểu diễn tọa độ G theo tọa độ của A và B , lại có $G \in d$ → pt (1)

● Mặt khác độ dài $AB = \sqrt{5}$ → pt (2)

● Từ (1) và (2) giải hệ tìm tọa độ A và B.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có A và B ∈ AB ⇒ A(3 – 2a; a) và B(3 – 2b; b)

Lại có G là trọng tâm ΔABC ⇒ tọa độ G thỏa

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{5-2a-2b}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{a+b-1}{3} \end{cases}$$

Mặt khác G ∈ d: x + y – 2 = 0

$$\Rightarrow \frac{5-2a-2b}{3} + \frac{a+b-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -b-2 \ (1)$$

* Khi đó ta có A(7 + 2b; – b – 2) và B(3 – 2b; b) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4-4b; 2b+2)$

Lại có: $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2 = 5 \Leftrightarrow 16(b+1)^2 + 4(b+1)^2 = 5$

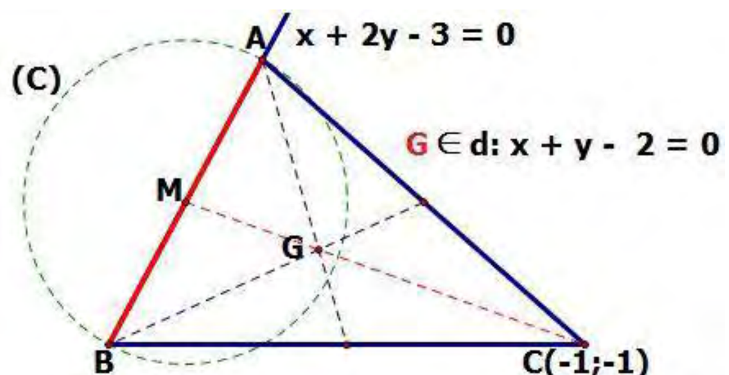
$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow A(6; \dfrac{-3}{2}), B(4; \dfrac{-1}{2}) \\ b = \dfrac{-3}{2} \Rightarrow A(4; \dfrac{-1}{2}), B(6; \dfrac{-3}{2}) \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A\left(6; \dfrac{-3}{2}\right), B\left(4; \dfrac{-1}{2}\right) \text{hay } A\left(4; \dfrac{-1}{2}\right), B\left(6; \dfrac{-3}{2}\right)}$

■ **CÁCH 2:** Gọi M là trung điểm AB.

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Ta xét tọa độ A, B chính là giao điểm giữa đường thẳng AB và **đường tròn ẩn mình (C)** có tâm M và đường kính AB.



● Như vậy chỉ cần tìm được tọa độ điểm M là xem như mọi nút thắt của bài toán xem như được gỡ → M ∈ AB → tham số hóa điểm M

● Mặt khác G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$ → biểu diễn tọa độ G theo tọa độ điểm M

● Cuối cùng, do G ∈ d → tìm được tọa độ điểm M → lập được tròn (C) → (C) ∩ AB = {A; B}

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có M ∈ AB ⇒ M(3 – 2m; m). Do G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM}$

Suy ra $\begin{cases} x_G + 1 = 2(3 - 2m - x_G) \\ y_G + 1 = 2(m - y_G) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{5-4m}{3} \\ y_G = \dfrac{2m-1}{3} \end{cases}$

* Lại có G ∈ d $\Rightarrow \frac{5-4m}{3} + \frac{2m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow M(5\,;-1)$

* Đường tròn (C) tâm M(5 ; –1) và bán kinh $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ có dạng là:

$$(C): (x-5)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$$

* Mặt khác A, B là tọa độ giao điểm giữa đường thẳng AB và (C) nên tọa độ A và B thỏa hệ:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ *(Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc !)*

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(6;\frac{-3}{2}), B(4;\frac{-1}{2}) \\ A(4;\frac{-1}{2}), B(6;\frac{-3}{2}) \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A\left(6;\frac{-3}{2}\right), B\left(4;\frac{-1}{2}\right) \textit{ hay } A\left(4;\frac{-1}{2}\right), B\left(6;\frac{-3}{2}\right)}$

■ **Lời bình:**Có một số kinh nghiệm rút ra sau khi giải xong bài toán này:

Một là, tất cả các giả thiết đề cho điều đóng một vai trò quan trọng trong quá trình tìm kiếm lời giải cho ta, đó chính là chìa khóa, là lời gợi ý ẩn mình bên trong bài toán. Việc của ta là phải liên kết các dữ kiện đó từ rời rạc thành một thể thống nhất.

Hai là, trong quá trình trình bày các bài toán ví dụ, tác giả đã cố gắng sử dụng **"lập phương trình đường tròn ẩn mình"**, đây là một cách làm khá hay giúp ta củng cố và vận dụng mối liên hệ giữa đường tròn và đường thẳng.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ điểm $A(2;-1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường x + y – 2 = 0. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

(**ĐS**: $C(18;-12)\, hay\, C(-9;15)$)

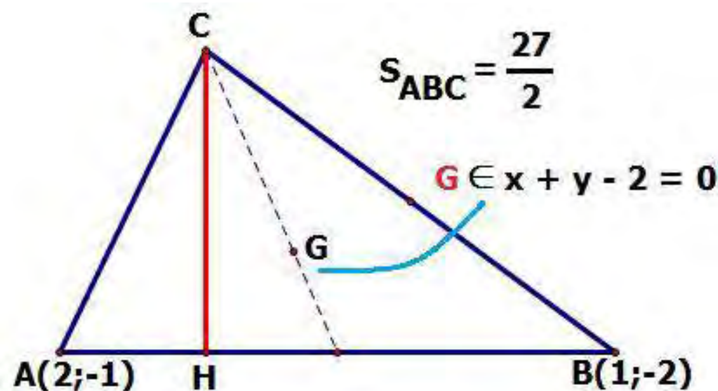
■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Nhận xét: ta chưa có một đường thẳng chứa C →không thể tham số hóa điểm C? Tuy nhiên ta có thể tham số hóa tọa độ điểm G (do G ∈ d: x + y – 2 = 0.

● Do G là trọng tâm ΔABC → biểu diễn tọa độ C theo G → giảm ẩn của điểm C → cần một phương trình?

● Yếu tố mà ta chưa khai thác đó chính là $S_{\Delta ABC}$? (Phương pháp diện tích gắn liền với phương pháp khoảng cách) → $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$CH.AB trong đó CH chính là khoảng cách từ C đến đường AB → viết pt AB.

● Vận dụng khoảng cách từ C đến AB ta tìm được tọa độ G⇒tọa độ C.



► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có G ∈ d: x + y – 2 = 0 ⇒ G(g; 2 – g).Do G là trọng tâm ΔABC nên ta có :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 3g - 3 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 9 - 3g \end{cases} \Rightarrow C(3g-3; 9-3g)$$

* AB qua A(2; –1) nhận $\overrightarrow{AB} = (-1;-1)$ làm vtcp nên có dạng:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

* Ta lại có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$ d[C, AB].AB với $AB = \sqrt{2}$

Suy ra $d[C, AB] = \frac{27}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|3g-3-(9-3g)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{27}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |6g-15| = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g=7 \\ g=-2 \end{array}\right.$

* Với $g = 7 \Rightarrow C_1(18; -12)$

* Với $g = -2 \Rightarrow C_2(-9; 15)$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{C(18;-12)\ hay\ C(-9;15)}$

■ **Lời bình:** Có một số kinh nghiệm rút ra sau khi giải xong bài toán này:

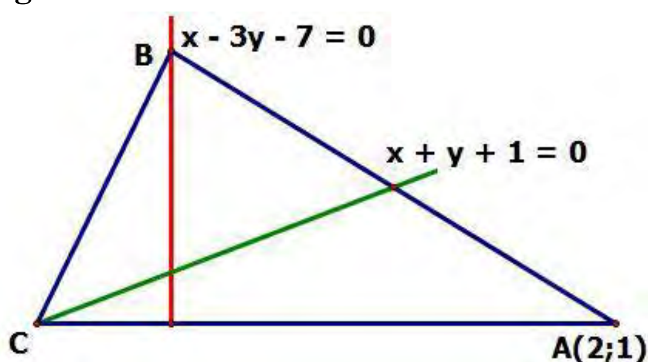
Một là, đa phần các bài toán đề cập đến việc diện tích hoặc có cho dữ kiện là diện tích chính là chìa khóa để ta sử dụng "phương pháp khoảng cách". Phương pháp khoảng cách có thể ứng dụng để tìm điểm nếu đã biết đường thẳng hoặc lập phương trình đường thẳng nếu đã tọa độ điểm.

Hai là, qua cách giải câu 2 và 3, ta thấy khi đề cho trọng tâm ta có thể khai thác theo hướng dùng công thức tọa độ của trọng tâm hoặc tỉ số trọng tâm giúp ta tìm **thêm điểm mới.**

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(2; 1), đường cao qua đỉnh B có phương trình đường thẳng: x– 3y – 7 = 0 .Đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình : x + y +1 = 0 . Xác định tọa độ B và C và tính diện tích tam giác ABC.

(**ĐS**: $B(-2;-3), C(4;-5)$, S = 16 (đvdt))

■ **Phân tích tìm lời giải:**



● Ở bài toán này, trước khi tham số hóa điểm B và C →**có tìm thêm được điểm mới hay đường thẳng mới**nào không?→ đó chính là đường AC (do nhận xét AC qua A và vuông với đường cao kẻ từ B)

● Kết hợp AC và phương trung tuyến kẻ từ C→ tìm được tọa độ điểm C.

● Để tìm điểm B ta cho B thuộc đường cao kẻ B → tham số hóa điểm B.

● Gọi M là trung điểm AB ⇒ biểu diễn tọa độ M theo tọa độ B, M thuộc đường trung tuyến kẻ từ C → tìm được tọa độ điểm B

● Để tính diện tích S_{ABC}→sử dụng đường AC sẵn có→$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d[B; AC].AC$

► **Hướng dẫn giải:** Đặt d: x – 3y – 7 = 0, Δ: x + y + 1 = 0 và M là trung điểm AB

* AC ⊥ d: x – 3y – 7 = 0 ⇒ AC: 3x + y + m = 0.
  Lại có AC qua A(2; 1) ⇒ m = – 7
  Vậy AC: 3x + y – 7 = 0

* Ta có C = AC ∩Δ⇒ tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases} \Rightarrow C(4;-5)$

* B ∈ d: x – 3y – 7 = 0 ⇒ B(3b + 7; b).
  Do M là trung điểm AB ⇒ $M\left(\frac{3b+9}{2};\frac{b+1}{2}\right)$

* Mặt khác M ∈Δ⇒ $\frac{3b+9}{2}+\frac{b+1}{2}+1=0 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow B(-2;-3)$ và $AC = 2\sqrt{10}$

* $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.d[B;AC] = \frac{1}{2}2\sqrt{10}\frac{|3.(-2)-3-7|}{\sqrt{3^2+1^2}} = 16$ (đvdt)

  Vậy tọa độ điểm cần tìm là: ***B(–2; –3), C(4; –5) và $S_{\Delta ABC}$= 16***

■ **Lời bình:** Có một số kinh nghiệm rút ra sau khi giải xong bài toán này:

Một là, trước khi tiến hành vào tìm điểm hay viết phương trình đường ta nên có bước đặt câu hỏi có **tìm thêm, "tạo thêm điểm mới, đường thẳng mới"?** Như câu 4 vừa giải xong, ta thấy ngay việc tìm được phương trình đường AC giúp ta tìm nhanh tọa độ C và vận dụng công thức khoảng cách để tính diện tích

Hai là, ta khai thác đường trung tuyến ở các khía cạnh như chứa đựng trung điểm cạnh đối diện, nếu giao thêm với 1 đường trung tuyến sẽ tạo ra **trọng tâm** (điểm đặc biệt trong tam giác), hoặc giao với 1 đường thẳng khác để có thể tìm được điểm mới, cụ thể trong bài là là đường AC.

Ba là, ta khai thác đường cao trong tam giác ở khía cạnh như giúp ta viết phương trình cạnh vuông tương ứng, hay nếu giao với đường một đường cao khác thì tìm được **trực tâm** (điểm đặc biệt trong tam giác).

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giácABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh $BC: x-2y-4=0$ và $BG: 7x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC.

(**ĐS**: $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$)

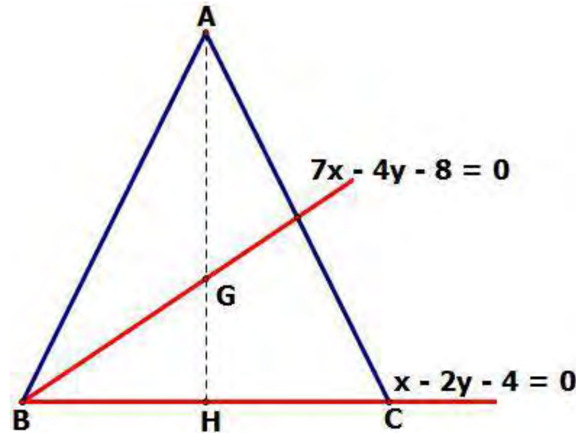
■ **Phân tích tìm lời giải:**

●Trong ba tọa độ A, B, C thì tọa độ điểm B dễ tìm nhất (do BG∩BC = B)

●Nếu gọi H là trung điểm BC→viết được pt AH (**tìm thêm đường thẳng mới**)

●AH ∩ BC = H → tọa độ H→tọa độ C.

● Do G là trọng tâm ΔABC (kết hợp B và C) ⇒ tọa độ A (hoặc dùng tính chất của trọng tâm AG = 2GH)



► **Hướng dẫn giải:** Gọi H là trung điểm BC.

* Ta có B = BG ∩ BC ⇒ tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 7x-4y-8=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(0;-2)}$$

* Ta có AH⊥BC (do ΔABC cân tại A) ⇒ AH: 2x + y + m = 0.

Mặt khác, AH qua $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ ⇒ m = – 3. Vậy **AH: 2x + y – 3 = 0**

* Ta có H = AH ∩ BC ⇒ tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow H(2;-1)$

* Do H là trung điểm BC $\Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2x_H \\ y_B + y_C = 2y_H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(4;\ 0)}$

* Ta có G là trọng tâmΔABC $\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;3)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: **_A(0 ;3), B(0;–2), C(4;0)_**

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;\ -2)$, đường cao $CH: x - y + 1 = 0$, phân giác trong $BN: 2x + y + 5 = 0$.Tìm toạ độ các đỉnh B,C và tính diện tích tam giác ABC

(**ĐS**: $B(-4;3), C\left(-\frac{13}{4};-\frac{9}{4}\right), S_{\Delta ABC} = \frac{45}{4}$))

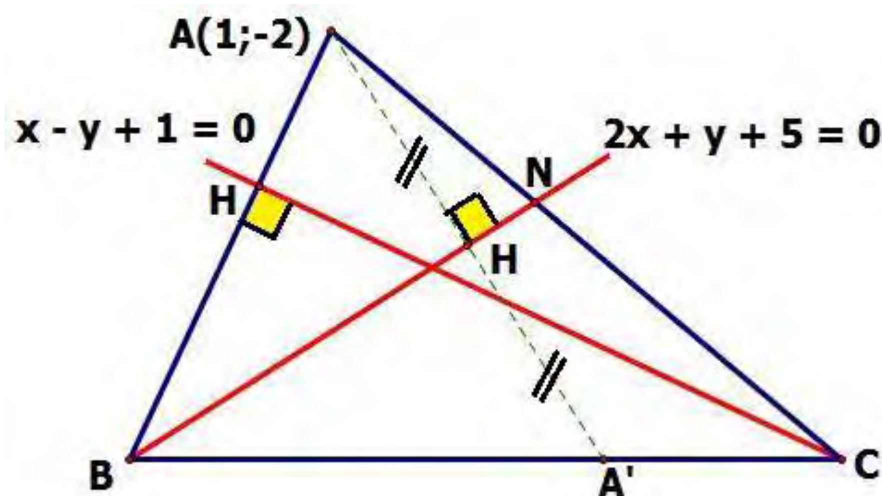
■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Do đề cho **"đường cao CH"→tìm thêm được đường mới**. **(**do nhận xét AB ⊥ CH và AB qua A) → viết pt đường AB.

● Một dấu hiệu đặc trưng khi đề bài cho **"đường phân giác"→ tìm thêm được điểm mới.** (do nhận xét về tính đối xứng của phân giác) → tìm được tọa độ A' ∈ BC→ viết pt đường BC.

● AB ∩ BN = B và BC ∩ HC = C → tìm được tọa độ B và C.

● Để tính $S_{\Delta ABC}$ ta dùng công thức $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$ d[C;AB]. AB



► **Hướng dẫn giải :**

* AB ⊥ CH: x – y + 1 = 0 ⇒ AB: x + y + m = 0, AB qua A(1 ; –2)⇒ m = 1.
Suy ra AB : x + y + 1 = 0.

* Ta có B = AB ∩ BN ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-4;3)}$$

* Gọi H là hình chiếu của A lên phân giác trong BN và A' là điểm đối xứng của A qua BN (ta có H là trung điểm AA' và A' ∈BC)
Do AH ⊥ BN: 2x + y + 5 = 0 ⇒ AH: x – 2y + n = 0, AH qua A(1; –2) ⇒ n = –5
Suy ra AH : x – 2y – 5 = 0.

* Ta có H = AH ∩ BN ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-3)$$

Lại có H là trung điểm AA' ⇒ A'(–3 ;–4).

* Đường BC qua B(–4;3) nhận $\overrightarrow{A'B} = (-1;7)$ làm vtcp có dạng:

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-3}{7} \Leftrightarrow 7x + y + 25 = 0$$

* Ta có C = BC ∩ CH ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x + y + 25 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{-13}{4}; \frac{-9}{4}\right)}$$

* Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.d[A; BC] = \frac{1}{2}.\frac{15\sqrt{2}}{4}.\frac{|7.1 - 2 + 25|}{\sqrt{49+1}} = \frac{45}{4}$ (đvdt)

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{B(-4;3), C\left(\frac{-13}{4}; \frac{-9}{4}\right), S_{\Delta ABC} = \frac{45}{4} \text{(dvdt)}}$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d_1: 2x + y + 5 = 0, d_2: 3x + 2y – 1 = 0 và điểm G(1;3). Tìm tọa độ các điểm B thuộc d_1 và C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm. Biết A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

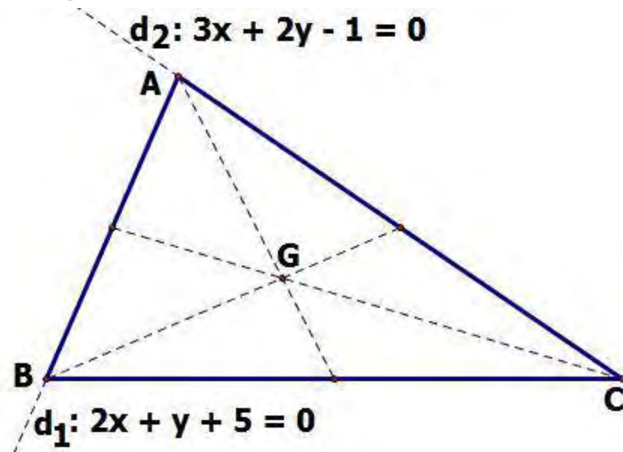
(**ĐS**: $B(-35;65), C(49;-73)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Với gợi ý A = $d_1 \cap d_2$ (1) cùng với B ∈ d_1, C ∈ d_2 (2) → d_1 chứa đường AB, d_2 chứa đường AC.

● Ta dễ dàng tính ra tọa độ điểm A nhờ (1), dựa vào (2) ta tham số hóa điểm B và C.

● Dùng công thức trọng tâm G để tính ra B và C



► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có: A = $d_1 \cap d_2$ ⇒ tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-11;17)}$

* Ta có B ∈ d_1: 2x + y + 5 = 0 ⇒ B(b; – 5 – 2b) và C ∈ d_2 : 3x + 2y – 1 = 0

$\Rightarrow C\left(t; \frac{1-3t}{2}\right)$

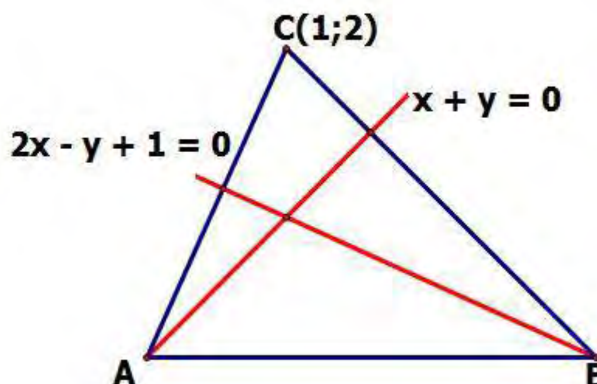
* Do G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + t = 3 + 11 \\ -5 - 2b + \dfrac{1-3t}{2} = 9 - 17 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b + c = 14 \\ -4b - 3c = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -35 \\ c = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-35;65) \\ C(49;-73) \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là:B(–35; 65) và C(49; –73)

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có C(1;2), hai đường cao xuất phát từ A và B lần lượt có phương trình là x + y = 0 và 2x – y + 1 = 0. Tính diện tích tam giác ABC.

(**ĐS**: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{9}{2}$(dvdt))



■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Để tính diện tích tam giác ABC

→ ta có thể vận dụng công thức $S = \dfrac{1}{2}$ đường cao. đáy

● Trong đó đường cao chính là khoảng cách từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện →ở đây trong bài này ta có thể chọn đỉnh C nhưng lại chưa có phương trình đường AB hay thông tin của cả điểm A và B→tìm tọa độ điểm A và B

● Để tìm tọa độ điểm B và A, ta có thể tham số hóa điểm A và B tương ứng với các đường thẳng đang thuộc tuy nhiên việc thiết lập 2 phương trình 2 ẩn nếu có→AH⊥CB và BH⊥ CA (với H là trực tâm của tam giác có thể tìm được) → khá dài và phức tạp.

● Ta xét xem A và B trong sự tương giao của các đường? → Ở đây A đã thuộc d_1: x + y = 0. Dựa vào hình vẽ ta thấy A ∈ AC và AB →Ta nghĩ đến việc lập phương trình AC hoặc AB→ở đây việc lập AC là khả thi nhất vì AC qua C và AC⊥d_2: 2x – y + 1 = 0. Một cách tương tự ta cũng viết được phương trình BC.

● Khi tìm được tọa độ A và B, ta có thể dùng công thức

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d[A;BC].BC = \frac{1}{2}d[B;AC].AC$$

mà không cần phải lập thêm phương trình AB. Mời các bạn xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có AC ⊥ d_1: 2x – y + 1 = 0
⇒ AC: x + 2y + m = 0, AC qua C(1 ; 2) ⇒ m = –5
Suy ra AC : x + 2y – 5 = 0.

Lại có A =AC ∩ d_2⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-5;5)}$

* Ta có BC ⊥ d_2: x + y = 0 ⇒BC: x – y + n = 0, BC qua C(1 ; 2) ⇒ n = 1
Suy ra BC : x – y + 1 = 0.

Lại có B = BC ∩ d_1⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(0;1)}$

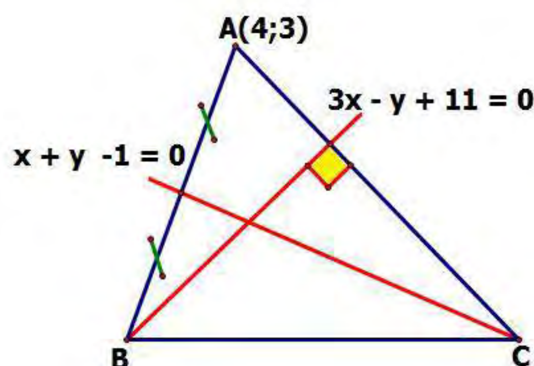
* $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d[B;\ AC].AC = \frac{1}{2}.\frac{|0+1.2-5|}{\sqrt{1+4}}\sqrt{(1+5)^2+(2-5)^2} = \frac{9}{2}$ **(đvdt)**

Vậy diện tích tam giác ABC là: $\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}\ (đvdt)}$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh A(4; 3), đường cao BH và trung tuyến CM có pt lần lượt là: 3x – y + 11 = 0, x + y – 1 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B, C

(**ĐS**: $B(-4;-1), C(-5;6)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**



● Tương tự như bài toán 9, Khi có đường cao BH → viết phương trình AC→C = AC∩CM.

● Để tìm tọa độ điểm B ta có thể mã hóa B theo BH và biểu diễn tọa độ M theo tọa độ B (Do nhận xét M thuộc đường thẳng CM)

► **Hướng dẫn giải:**

* AC ⊥BH: 3x – y + 11 = 0 ⇒AC; x + 3y + m = 0, AC qua A(4; 3)⇒ m = –13.
Suy ra AC : x + 3y – 13 = 0.
Lại có C = AC ∩ CM

⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+3y-13=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-5;6)}$

* Ta có B ∈ BH: 3x – y + 11 = 0 ⇒ B(b; 3b + 11).

* Lại có M là trung điểm AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B + x_A = 2x_M \\ y_B + y_A = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{b+4}{2} \\ y_M = \dfrac{3b+14}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{b+4}{2}; \dfrac{3b+14}{2}\right)$$

* Mặt khác $M \in CM \Rightarrow \dfrac{b+4}{2} + \dfrac{3b+14}{2} - 1 = 0 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow \boxed{B(-4;-1)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{B(-4; -1) \text{ và } C(-5; 6)}$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường AB: 5x – 2y + 6 = 0 và phương trình đường AC: 4x + 7y – 21 = 0. Biết gốc tọa độ O là trực tâm của ΔABC. Tìm trọng tâm của ΔABC.

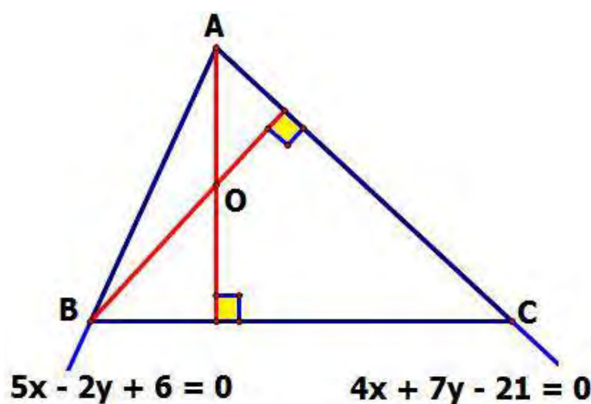
(**ĐS**: $G\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{-11}{3}\right)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Để tìm trọng tâm tam giác ABC ta nghĩ ngay đến việc tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C. Vậy câu hỏi đặt ra trong 3 đỉnh trên, đỉnh nào có thể tìm được dễ dàng nhất? →chính là điểm $A = AB \cap AC$.

● **Cách 1:** Rõ ràng trong hai điểm B và C còn lại vai trò là tương tự nhau nên ta xét việc tìm điểm B trước. Ta xét thấy O là trực tâm ΔABC ⇒ OB ⊥ AC và OB qua O → viết phương trình OB → $OB \cap AB = B$. Một cách tương tự ta cũng tìm được tọa độ điểm C.

● **Cách 2:** Ngoài ra bạn cũng có thể tham số hóa tọa độ điểm B∈AB, C∈AC→tìm hai phương trình 2 ẩn? → Đó chính là phương trình OB ⊥ AC và OC ⊥AB→ giải hệ pt tìm được tọa độ B và C.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có $A = AB \cap AC$

$\Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;3)}$

* Ta có OB ⊥ AC: 4x + 7y – 21 = 0 ⇒ OB: 7x – 4y + m = 0, OB qua O(0; 0)

⇒ m = 0

Suy ra OB: 7x – 4y = 0.

Lại có: $OB \cap AB = B$ ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x-4y=0 \\ 5x-2y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-4;-7)}$$

* Ta có OC ⊥ AB: $5x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow$ OC: $2x + 5y + n = 0$, OC qua O(0; 0)
$\Rightarrow n = 0$
Suy ra OC: $2x + 5y = 0$.
Lại có: OC ∩ AC = C ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+5y=0 \\ 4x+7y-21=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{35}{2};-7\right)}$$

* Vậy tọa độ trọng tâm G là $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = \dfrac{9}{2} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = \dfrac{-11}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\left(\frac{9}{2};\frac{-11}{3}\right)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{G\left(\frac{9}{2};\frac{-11}{3}\right)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có A = AB ∩ AC ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x-2y+6=0 \\ 4x+7y-21=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;3)}$$

* Ta có B ∈ AB: $5x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow B(2b; 5b + 3)$, C ∈AC: $4x + 7y - 21 = 0$
$\Rightarrow C(7c ; 3 - 4c)$
* O là trực tâm ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} OB \perp AC \\ OC \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{u_{AC}} = 0 \\ \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{u_{AB}} = 0 \end{cases} (*) \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{OB} = (2b;5b+3) \\ \overrightarrow{OC} = (7c;3-4c) \\ \overrightarrow{u_{AB}} = (2;5) \text{ la vtcp cua AB} \\ \overrightarrow{u_{AC}} = (7;-4) \text{ la vtcp cua AC} \end{cases}$$

* Do đó (*) $\Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} 2b.7-4(5b+3)=0 \\ 7c.2+5(3-4c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-4;-7) \\ C\left(\dfrac{35}{2};-7\right) \end{cases}$

* Vậy tọa độ trọng tâm G là $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{9}{2} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-11}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{-11}{3}\right)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{G\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{-11}{3}\right)}$

■ **Lời bình:** khi đọc lời giải ở cách 2, nếu bạn tinh ý một chút sẽ phát hiện hai điều quan trọng

Một là, việc đặt ẩn tham số hóa cho B và C đã được cân nhắc, thay vì đặt $x_B = b$ ta đặt $x_B = 2b$ (tương tự với trường hợp $x_C = 7c$ thay vì $x_C = c$). Việc đặt ẩn này hỗ trợ phần nào trong quá trình tính toán của bạn, tuy nhiên không phải lúc nào cũng thực hiện được. Nhưng trong quá trình tham số hóa các điểm ta luôn phải có ý thức đặt ẩn sao cho "gọn nhẹ" để tiện cho việc tính toán về sau.

Hai là, thay vì sử dụng véctơ AC và AB thì ở cách 2 đã sử dụng véctơ chỉ phương của 2 đường để thay thế cho. Việc làm cũng góp phần giúp ta tính toán "gọn nhẹ" bài toán đi. Tuy nhiên xét ở một góc độ nào đó cách 1 vẫn có ưu thế hơn khi phát huy được việc **"lập phương trình đường thẳng mới"** trong quá trình tìm tọa độ điểm.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(–1; 2), B(2; 1) và trực tâm H(1; 2). Xác định tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(**ĐS**: $I(1;3)$)

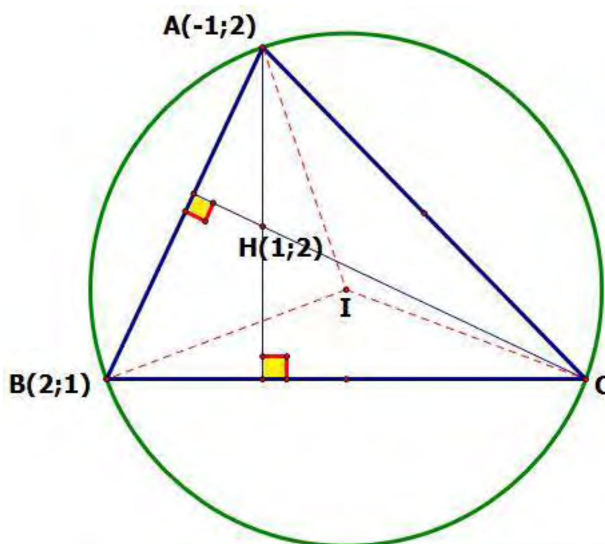
■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Để tìm tọa độ tâm I cách đều 3 đỉnh tam ABC→ta cần xác định cho được tọa độ điểm C

● Để tìm tọa độ điểm C → xét C trong sự tương giao của các đường → $C = AC \cap BC$

● Như vậy ta cần viết phương trình AC và BC trong đó ta có AC qua A và $AC \perp BH$, BC qua B và $BC \perp AH$.

● Khi đã có tọa độ điểm C thì bạn đọc có thể xem lại câu 1 phần bài tập chọn lọc về cách xác định tâm đường tròn ngoại tiếp khi đã biết ba đỉnh A, B, C. (ở đây tác giả sử dụng cách viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm)



► **Hướng dẫn giải :**

* Đường AC qua A(–1;2) nhận $\overrightarrow{BH} = (-1;1)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$-1(x+1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow AC: x-y+3=0$$

* Đường BC qua B(2; 1) nhận $\overrightarrow{AH} = (2;0)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$2(x-2)+0(y-2)=0 \Leftrightarrow BC: x-2=0$$

* Ta có AC ∩ BC = C

$\Rightarrow$ Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(2;5)}$

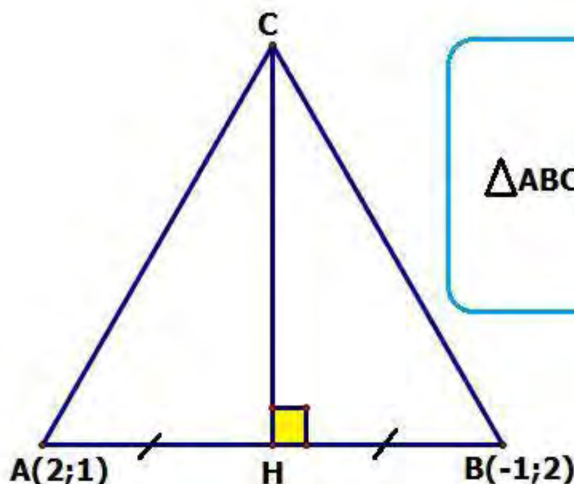
* Gọi phương trình khai triển của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I(a; b) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

* Ta có $\begin{cases} A(-1;2)\in(C) \\ B(2;1)\in(C) \\ C(2;5)\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+2a-4b+c=0 \\ 5-4a-2b+c=0 \\ 29-4a-10b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \Rightarrow \text{tâm } \boxed{I(1;3)} \\ c=5 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{I(1;3)}$

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác đều ABC có tọa độ đỉnh A(2; 1), B(–1; 2). Xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC.

(**ĐS**: $C_1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ *hay* $C_2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)$)



■ **Phân tích tìm lời giải:**

● **Hướng thứ 1:** Để tìm tọa độ điểm C thỏa mãn ΔABC đều ta có thể gọi tọa độ C(m; n) và thiết lập hai phương trình 2 ẩn để giải → phương trình thứ 1 là CH⊥AB (khi đó ΔABC cân tại C) và phương trình thứ 2 là BC = AB (khi đó ΔABC đều)

● **Hướng thứ 2:** Ta sẽ tìm cách tham số hóa điểm C theo một đường thẳng đã có (nhưng hiện tại chưa có đường thẳng nào?). Xét thấy có 3 đường thẳng qua C là AC , BC và HC (H là trung điểm AB) → Do ΔABC đều nên HC là trung trực của AB → viết phương trình HC → tham số hóa điểm C theo đường thẳng HC. (khi đó bạn ΔABC đã là tam giác cân tại C).Để ΔABC đều thì ta có BC = AB → giải phương trình 1 ẩn tìm C.

Ở đây tác giả trình bày bằng cả hai cách để bạn đọc tiện so sánh.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi C(m; n) là tọa độ điểm cần tìm và H là trung điểm AB $\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

* ΔABC đều $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0 \\ BC^2=AB^2 \end{cases}$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-3;1) \\ \overrightarrow{BC}=(m+1;n-2) \\ \overrightarrow{HC}=\left(m-\frac{1}{2};n-\frac{3}{2}\right) \end{cases}$

* Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3\left(m-\frac{1}{2}\right)+1\left(n-\frac{3}{2}\right)=0 \\ (m+1)^2+(n-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3m \\ (m+1)^2+(3m-2)^2=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=3m \\ 2m^2-2m-1=0 \end{cases}$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow n=\frac{3+3\sqrt{3}}{2} \\ m=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow n=\frac{3-3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là:

$$\boxed{C_1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)\ hay\ C_2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Do ΔABC ⇒ HC ⊥ AB

* HC qua $H\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;1)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$-3\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\left(y-\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow HC:3x-y=0$$

* Ta có C ∈ HC ⇒ C(c; 3c) và $\overrightarrow{BC}=(c+1;3c-2)$

* ΔABC đều

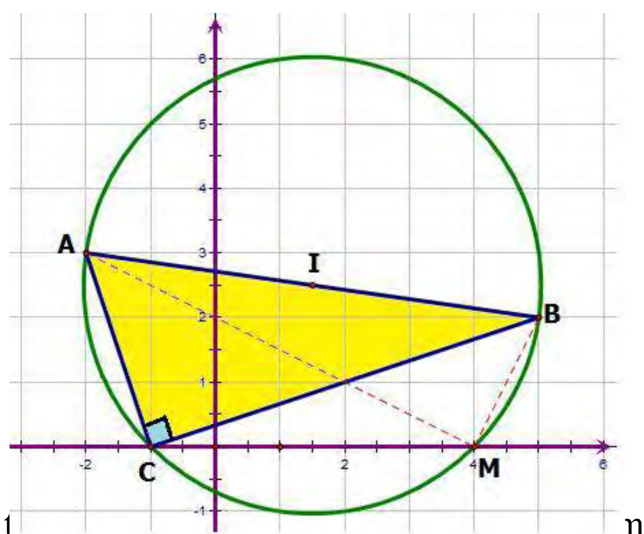
$\Rightarrow BC^2=AB^2 \Leftrightarrow (c+1)^2+(3c-2)^2=10 \Leftrightarrow 2c^2-2c-1=0 \Leftrightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là:

$$\boxed{C_1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)\ hay\ C_2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh A(–2; 3), B(5; 2), C(–1; 0). Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông và tìm điểm M thuộc tia Ox sao cho tam giác AMB vuông tại M.

(**ĐS**: $M(4;0)$)



■ **CÁCH 1:Vẽ hình phác thảo không kèm hệ trục tọa độ.**

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Để chứng tỏ ΔABC vuông thì ta có t n tra hoặc chỉ ra trong các tích vô hướng giữa các véctơ AB, AC, BC để xác định.

● Do đề bài gợi ý M thuộc tia Ox→tham số hóa điểm M theo tia Ox→1 ẩn nên cần 1 phương trình?

● ΔAMB ⊥ M ⇒ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ → giải phương trình tìm được tọa độ điểm M.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(7;-1)\\ \overrightarrow{CB}=(6;2)\\ \overrightarrow{AC}=(1;-3)\end{cases}$. Xét $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=7+3=10\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=42-2=40 \Rightarrow AC\perp BC\\ \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=6-6=0\end{cases}$

⇒ΔABC vuông tại C (đpcm)

* Ta có: M ∈ tia Ox ⇒ M(m; 0) (m > 0)

* ΔAMB ⊥ M

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-5)+3.2=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right.$

* Do M thuộc tia Ox nên ta nhận m = 4 ⇒ M(4; 0)

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: M(4; 0)

■ **CÁCH 2: Vẽ hình kèm hệ trục tọa độ.**

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Khi vừa đưa tọa độ của các điểm A, B, C lên hình vẽ ta phát hiện ΔABC vuông tại C → chỉ cần xét tích vô hướng giữa hai véctơ BC và AC để suy ra điều phải chứng minh.

● Nhận xét ΔABC và ΔAMB đều cùng nhận AB làm đường kính ⇒ M thuộc đường tròn đường kính AB

● Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I là trung điểm AB và bán kính IA → M = (C)∩Ox

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (7;-1) \\ \overrightarrow{CB} = (6;2) \\ \overrightarrow{AC} = (1;-3) \end{cases}$.

Xét $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC} = 6-6=0 \Rightarrow$ AC ⊥ BC ⇒ΔABC vuông tại C (đpcm)

* Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $AB = 5\sqrt{2}$

* Ta có M và C cùng nhìn AB dưới một góc vuông ⇒ M thuộc đường tròn đường kính AB ⇒Tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases}$$

Do M ∈ Ox nên x >0⇒ x = 4, y = 0

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: M(4; 0)

■ **Lời bình:** Có thể thấy việc đưa các điểm lên hệ trục tọa độ đã góp phần định hướng nhanh cho lời giải của ta, trong một số bài toán tình huống cụ thể ta nên vẽ hình kèm hệ trục để có những đánh giá chính xác nhất.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M (–1; –1), N (1; 9), P (9; 1). Xác định tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

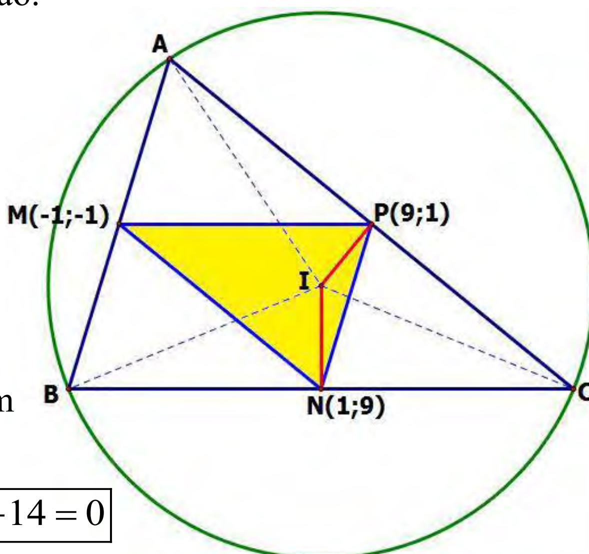
(**ĐS**: $I\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Một trong những cách để xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là dựng các đường trung trực của tam giác, trong bài toán này với ta hoàn toàn có thể giải theo hướng đi trên vì xét thấy đường trung trực của BC⊥MP và trung trực qua N (tương tự với các đường còn lại).

● Quan sát kĩ hơn tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lại chính là trực tâm của tam giác MNP (do IN⊥ MP, IP ⊥ MN) →ta có thể chuyển bài toán xác định tâm ngoại tiếp tam giác quay về việc xác định trực tâm của tam giác→tương tự như việc ta lập 2 phương trình đường cao.

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi d_1 và d_2 lần lượt là đường trung trực của BC và AC.

* Do M, P lần lượt là trung điểm AB, AC

$\Rightarrow$ MP là đường trung bình của ΔABC

Suy ra MP // BC $\Rightarrow$ $d_1 \perp$ MP

* d_1 qua N(1; 9) nhận $\overrightarrow{MP}=(10;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$5(x-1)+1(y-9)=0 \Leftrightarrow \boxed{d_1: 5x+y-14=0}$

* Tương tự ta có d_2 qua P(9;1) nhận $\overrightarrow{MN}=(2;10)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$(x-9)+5(y-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{d_2: x+5y-14=0}$$

* Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow I = d_1 \cap d_2$

$\Rightarrow$ Tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x+y-14=0 \\ x+5y-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)}$$

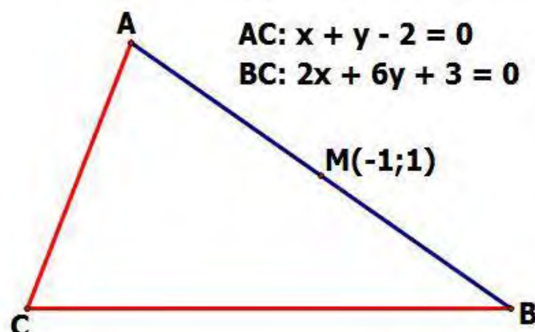
Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{I\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)}$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M(–1; 1) là trung điểm của một cạnh của tam giác, phương trình đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của ΔABC lần lượt là: x + y – 2 = 0 và 2x + 6y + 3 = 0. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

(ĐS: $A\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right), B\left(\frac{-9}{4};\frac{1}{4}\right), C\left(\frac{15}{4};\frac{-7}{4}\right)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Do đề bài chưa xác định được chính xác phương trình các cạnh của tam giác và điểm M đang thuộc trên cạnh nào → Ta bắt buộc phải kiểm tra vị trí tương đối giữa điểm M với những đường thẳng đó.



→ Cụ thể ta sẽ thay tọa độ của điểm M vào cả hai đường trên và rút ra được nhận xét M không thuộc cả 2 đường thẳng trên

● Do vai trò của các điểm A, B, C là như nhau nên ta có thể giả sử điểm M là trung điểm cạnh AB và đường thẳng AC: x + y – 2 = 0, BC: 2x + 6y + 3 = 0.

● Đến đây ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm C do C = AC ∩ BC.

● Để tìm tọa độ điểm A (hoặc B) ta có thể tham số hóa điểm A theo đường AC và dùng công thức trung điểm của M để biểu thị B theo tọa độ của A.

● Cuối cùng ta cho điểm B thuộc đường thẳng BC → giải tìm B và suy ra A. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**

* Nhận xét điểm M không thuộc hai đường thẳng trên và do vai trò của các điểm A, B, C là như nhau nên ta giả sử: $\begin{cases} M \in AB \\ AC: x+y-2=0 \\ BC: 2x+6y+3=0 \end{cases}$

* Ta có C = AC ∩ BC ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+6y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ y=\frac{-7}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{15}{4};\frac{-7}{4}\right)}$$

* Ta có A ∈ AC: x + y – 2 = 0 ⇒ A(a; 2 – a). Do M là trung điểm AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = -2-a \\ y_B = 2y_M - y_A = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2-a;a)}$$

* Mặt khác B ∈ BC: 2x + 6y + 3 = 0 ⇒ 2(–2 – a) + 6a + 3 = 0

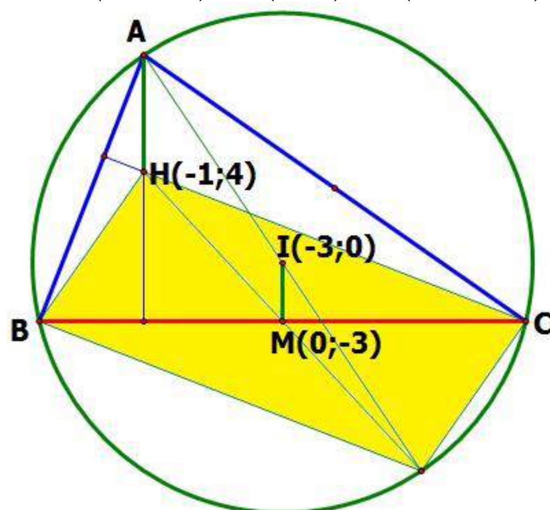
$$\Rightarrow a=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}A\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)\\B\left(\frac{-9}{4};\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right),B\left(\frac{-9}{4};\frac{1}{4}\right),C\left(\frac{15}{4};\frac{-7}{4}\right).}$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(–1; 4), tâm đường tròn ngoại tiếp I(–3; 0) và trung điểm cạnh BC là điểm M(0;–3). Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(ĐS: $A(-7;10),B(-7;-10),C(7;4)\,hay\,A(-7;10),B(7;4),C(-7;-10)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**



●Bài toán này sẽ không còn quá khó khăn cho bạn đọc nếu biết cách áp dụng các bổ đề về quan hệ của những điểm đặc biệt trong tam giác. Cụ thể trong bài này chúng ta sẽ tính nhanh ra tọa độ điểm A dựa trên đẳng thức $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ và cùng với đó là nhận xét ta hoàn toàn có thể viết được phương trình BC (do BC qua M và BC ⊥ MI) việc viết được phương trình BC phục vụ cho việc tìm tọa độ điểm B và C.

Đến đây ta có hai hướng đi cho bài toán này:

● **Hướng thứ 1:** Ta sẽ lập phương trình đường tròn ẩn mình (C) có tâm I bán kính IA ngoại tiếp ΔABC. Khi đó B và C là giao điểm giữa BC và đường tròn (C)

● **Hướng thứ 2:** Ta sẽ tham hóa điểm B theo đường BC (và cần hiểu rằng việc tìm được tọa độ điểm B cũng xem như tìm được tọa độ điểm C do đã có M là trung điểm BC) → 1 ẩn nên cần 1 phương trình → Ở đây đó chính là phương trình IA = IB.

Trong bài toán này, xin được trình bày theo hướng thứ 1.

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có tính chất $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ (*việc chứng minh bổ đề mời bạn đọc xem lại chương 1*)

$$\Rightarrow\begin{cases}-1-x_A=2.3\\4-y_A=2.(-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=-7\\y_A=10\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(-7;10)}\text{ và }IA^2=116$$

* Ta có BC qua M(0; –3) và nhận $\overrightarrow{IM} = (1;-1)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$BC: 1(x-0) - 1(y+3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{BC: x - y - 3 = 0}$

* Ta có B, C là giao điểm giữa BC và đường tròn (C) có tâm I(–3; 0) và bán kính IA nên tọa độ B, C thỏa hệ phương trình:

$\begin{cases}(x+3)^2 + y^2 = 116 \\ x - y - 3 = 0\end{cases}$ (việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc!)

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x=-7 \Rightarrow y=-10 \\ x=7 \Rightarrow y=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-7;-10), C(7;4) \\ B(7;4), C(-7;-10) \end{array}\right.$

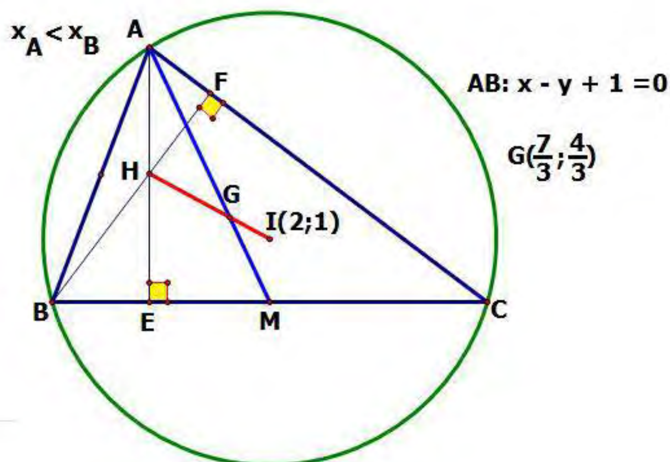
Vậy tọa độ điểm cần tìm là:

$$\boxed{A(-7;10), B(-7;-10), C(7;4)\ hay\ A(-7;10), B(7;4), C(-7;-10)}$$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(2; 1), phương trình đường thẳng chứa cạnh AB: x – y + 1 = 0. Xác định tọa độ các đỉnh các tam giác ABC biết B có hoành độ lớn hơn hoành độ của điểm A.

(ĐS: $A(-1;0), B(3;4), C(5;0)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**



● Đề bài đã gợi ý các điểm đặc điểm biệt "trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC"→ Gọi thêm trực tâm H của∆ABC→do $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$→tìm được tọa độ điểm H.

● Dấu hiệu tiếp theo là ta dựa vào cách dựng tâm I → giao điểm của những đường trung trực → gọi N là trung điểm AB và viết phương trình đường trung trực của AB → N = AB ∩ trung trực AB.

● Vận dụng tính chất của trọng tâm G→ $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GN}$ →tìm được tọa độ đỉnh C

● Đến đây ta chỉ cần xét AB trong sự tương giao giữa đường tròn (C) có tâm I, bán kính IC và đường thẳng AB→giải hệ tìm được tọa độ A và B.

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi H là trực tâm củaΔABC. Ta có : $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \boxed{H(3;2)}$

* Gọi N là trung điểm cạnh AB và d là trung trực của đoạn AB $\Rightarrow$ d qua N và I.
  Ta có: d $\perp$ AB: x – y + 1 = 0 $\Rightarrow d: x + y + m = 0$. (d) qua I(2 ;1) $\Rightarrow$ m = – 3
  Vậy $\boxed{d: x + y - 3 = 0}$

* Lại có N = d $\cap$ AB $\Rightarrow$ Tọa độ M là nghiệm của hệ
  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N(1;2)}$

* Mặt khác, do G là trọng tâmΔABC $\Rightarrow \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{NG} \Rightarrow \boxed{C(5;0)}$ và $IC = \sqrt{10}$

* Ta có A, B là giao điểm giữa đường thẳng AB và đường tròn (C) có tâm I(2; 1) bán kính $IC = \sqrt{10}$ $\Rightarrow$tọa độ A và B thỏa hệ:

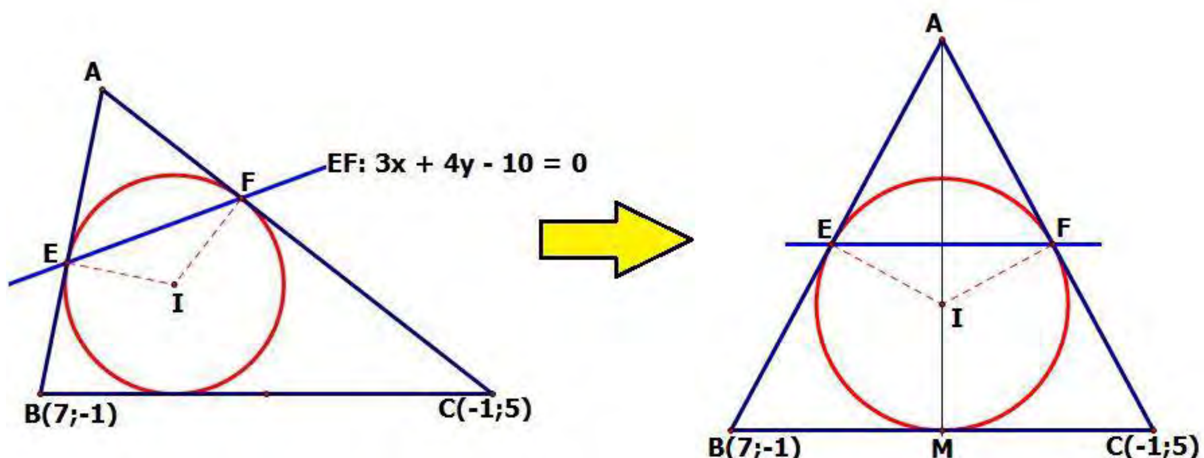
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$ (việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc!)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = 0 \\ x = 3, y = 4 \end{array}\right.$$ do $x_A < x_B$ nên ta nhận $\boxed{A(-1;0),\ B(3;4)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A(-1;0),\ B(3;4)}$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh B(7; –1), C(–1; 5). Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt tại E và F. Xác định tọa độ đỉnh A biết phương trình đường thẳng EF: 3x + 4y – 10 = 0 và E có hoành độ nguyên.

(ĐS: $A\left(\frac{31}{8};\frac{19}{6}\right)$)



■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Một phát hiện khá là bất ngờ và dường như quyết định đến việc giải bài toán này đó chính là BC // EF. Điều này dẫn đến việc ΔABC mà đề cho chính là Δ cân tại A.

● Với phát hiện trên, nếu gọi M là trung điểm BC → AM ⊥ BC → AM chính là phân giác trong của góc A → vừa đi qua tâm nội tiếp I và qua đỉnh A cần tìm.

● Giờ đây ta chỉ cần lập thêm 1 đường thẳng đi qua A nữa → là có thể tìm được tọa độ điểm A → vậy đó là đường thẳng nào? → xét thấy đó chính là AB hoặc AC. (do vai trò của 2 đường là như nhau nên ta chọn lập đường AB)

● Để lập phương trình đường AB (xem lại chủ đề 2: "cách lập phương trình đường thẳng") thì ta lại có 2 hướng để đi. Do AB đã qua B(7; –1) nên ta tìm thêm 1 điểm nữa → điểm đó chính là E → thông qua tính chất của tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC → BE = BM

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có $\overrightarrow{BC} = (-8;6) \Rightarrow$ BC // EF do đó ΔABC cân tại A. Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow$ M (3; 2)

Đường thẳng AM qua M(3; 2) và nhận $\overrightarrow{BC} = (-8;6)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $-8(x-3)+6(y-2)=0 \Leftrightarrow AM: 4x-3y-6=0$

* Mặt khác do đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với 3 cạnh AB, AC, BC lần lượt tại E, F, M nên ta suy ra BE = BM(*). Ta có E ∈ EF: 3x + 4y – 10 = 0

$\Rightarrow E\left(e;\dfrac{10-3e}{4}\right)$ và $\overrightarrow{BE} = \left(e-7;\dfrac{14-3e}{4}\right)$

* Do đó (*) $\Leftrightarrow (e-7)^2 + \left(\dfrac{14-3e}{4}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e=10 \\ e=\dfrac{58}{25} \end{array}\right.$.

Do e ∈ Z nên ta nhận e = 10 ⇒ E(10; –5)

* Đường thẳng BE qua B(7; –1) và nhận $\overrightarrow{BE} = (3;-4)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y+1}{-4} \Leftrightarrow AB: 4x+3y-25=0$

* Ta có A = AM ∩ AB ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x+3y-25=0 \\ 4x-3y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{31}{8} \\ y=\dfrac{19}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\dfrac{31}{8};\dfrac{19}{6}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A\left(\dfrac{31}{8};\dfrac{19}{6}\right)}$

■ **Lời bình:** Trong một số bài toán, có thể có những giả thiết ẩn mình đằng sau các giả thiết khác. Việc liên kết các giả thiết lại giúp ta phát hiện các yếu tố quan trọng trong việc giải bài toán. Các bạn cần lưu ý nhé.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho AB = 3AM, đường tròn tâm I(1; –1) đường kính MC cắt BM tại D, phương trình đường thẳng CD: x – 3y – 6 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác đã cho, biết điểm $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng BC và C có hoành độ dương.

(ĐS: $A(-2;-1), B(-2;2), C(3;-1)$)

■ **Phân tích tìm lời giải:**

● Trong các tọa độ A, B, C thì tọa độ điểm C là có nhiều yếu tố để tìm ra nhất do xét thấy C có hoành độ dương (như một lời gợi ý ta hãy đi tìm C) và C∈ CD.

● Để tìm tọa độ C ta có thể xét C trong sự tương giao giữa các đường thẳng mà ở đây có thể kể đến như BC và AC → Nhận xét nhanh ABCD chính là tứ giác nội tiếp và vì vậy góc $ABM = ACD$ và cùng với quan hệ AB = 3AM ta có thể tính được góc của ABM → xác lập công thức tìm véctơ pháp tuyến của AC.

● Khi đó C = AC ∩ CD → Dựa vào tâm I → tìm được tọa độ điểm M và đồng thời BC qua E và C → viết phương trình BC. Do D ∈ đường tròn đường kính MC nên BD ⊥ CD và BD qua M → viết phương trình BD → B = BD ∩ BC

● Đến đây ta chỉ cần lập phương trình AB qua B và AB ⊥ AC → A = AB ∩ AC

► **Hướng dẫn giải :**

* Nhận xét ABCD là tứ giác nội tiếp do $BAC = BDC = 90^o$ suy ra $ABD = ACD$. Ta có

$$\tan ABD = \tan ACD = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos ACD = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan ACD)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Gọi $\vec{n} = (a;b),\ (a^2+b^2>0)$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng AC.

AC qua M(1; –1) có dạng: $AC: a(x-1)+b(y+1)=0$

* Ta có: $\cos ACD = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\cos(\vec{n};\overrightarrow{n_{CD}})| = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Suy ra $8a^2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{-3b}{4} \end{array}\right.$

Với $a = \dfrac{-3b}{4}$, ta chọn b = –4 ⇒ a = 3. Khi đó $AC: 3x - 4y - 7 = 0$

Ta có C = AC ∩ CD ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y - 7 = 0 \\ x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{5} \\ y = \dfrac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\dfrac{-3}{5}; \dfrac{-11}{5}\right)}$$

(Loại vì C có hoành độ dương)

Với $a = 0$, ta chọn b = 1 ⇒ $AC: y + 1 = 0$

Ta có C = AC ∩ CD ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3; -1)}$$

* Khi đó BC qua C(3; –1) và nhận $\overrightarrow{EC} = \left(\dfrac{5}{3}; -1\right)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là:

$$BC: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-3} \Leftrightarrow BC: 3x + 5y - 4 = 0$$

* Do M là trung điểm MC ⇒ M(–1; –1).

Lại có BM ⊥ CD: x – 3y – 6 = 0 ⇒ BM: 3x + y + m = 0.

BM qua M(–1; –1) ⇒ m = 4. Vậy $BM: 3x + y + 4 = 0$

Ta có B = BM ∩ BC ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 4 = 0 \\ 3x + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2; 2)}$$

* Do AC ⊥ AB ⇒ AB: x + n = 0, AB qua B(–2; 2) ⇒ n = 2. Vậy AB: x + 2 = 0

* A = AB ∩ AC ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2; -1)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A(-2; -1), B(-2; 2), C(3; -1)}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ cạnh AC có phương trình là: $x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng

$d_1: x+y-8=0,\ d_2: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm.

(ĐS: $A(-11;6), B(0;8), C(10;3), D(-1;1)$)

► **Hướng dẫn giải :**

* $B \in d_1 \Rightarrow B(b;8-b),\ D \in d_2 \Rightarrow (2d-3;d)$.

* Khi đó $\overrightarrow{BD} = (-b+2d-3; b+d-8)$ và trung điểm của BD là

$$I\left(\frac{b+2d-3}{2};\frac{-b+d+8}{2}\right).$$

* Theo tính chất hình thoi ta có :

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b+13d-13=0 \\ -6b+9d-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}.$$

Suy ra $B(0;8);\ D(-1;1)$.

* Khi đó $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$; $A \in AC \Rightarrow A(-7a+31;a)$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABCD}}{BD} = 15\sqrt{2} \Rightarrow IA = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(-7a+\frac{63}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$$

Suy ra $C(10;3)$.

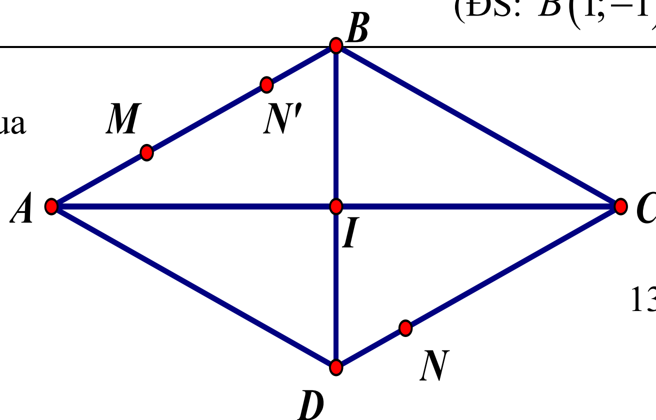
Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A(-11;6), B(0;8), C(10;3), D(-1;1)}$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(2; 1) và AC = 2BD. Điểm M$\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm N(0; 7) thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

(ĐS: $B(1;-1)$)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi N’ là điểm đối xứng của N qua I thì N’ thuộc AB, ta có:



$$\begin{cases} x_{N'} = 2x_I - x_N = 4 \\ y_{N'} = 2y_I - y_N = -5 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng AB:

4x + 3y – 1 = 0.

* Khoảng cách từ I đến đường thẳng

AB: $d = \dfrac{|4.2+3.1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$

AC = 2. BD nên AI = 2 BI, đặt BI = x, AI = 2x trong tam giác vuông ABI có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2}$$ suy ra x = $\sqrt{5}$ suy ra BI = $\sqrt{5}$

* Điểm B là giao điểm của đường thẳng 4x + 3y – 1 = 0 với đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{5}$

* Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases}$

B có hoành độ dương nên B(1; –1)

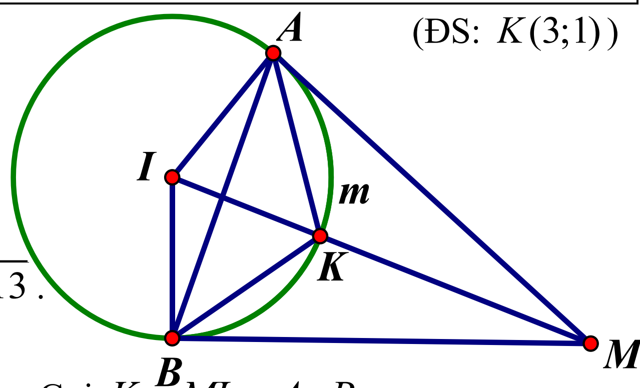
Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{B(1;-1)}$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (*T*):

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$$ và điểm $M(7;7)$.

Chứng minh rằng từ *M* kẻ đến (*T*) được hai tiếp tuyến *MA*, *MB* với *A*, *B* là các tiếp điểm. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác *MAB*.

(ĐS: $K(3;1)$)



► Hướng dẫn giải :

* $(T) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

$\Rightarrow I(1;-2); R = \sqrt{13}$

Ta có: $\overrightarrow{IM}(6;9) \Rightarrow IM = \sqrt{117} > \sqrt{13}$.

Suy ra điểm M nằm ngoài (T).

* Vậy từ M kẻ đến (T) được 2 tiếp tuyến.. Gọi $K = MI \cap AmB$.

Ta có $MA = MB, IA = IB \Rightarrow$ MI là đường trung trực của AB

* Suy ra KA = KB $\Rightarrow \angle KAB = \angle KBA = \angle KAM = \angle KBM$

Do đó K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

Phương trình tham số *MI*: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases} (t \in R)$

Khi đó, $MI \cap (T)$ tại *$K_1(3;1)$ và $K_2(-8;-12)$*

Ta có $AK_1 < AK_2$. Vậy $K \equiv K_1$, tức là *K(3;1)*

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{K(3;1)}$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho cho tam giác *ABC* có $AB = \sqrt{5}$, $C(-1;-1)$, đường thẳng AB có phương trình là $x + 2y - 3 = 0$ và trọng tâm *G* của tam giác ABC thuộc đường thẳng $\Delta : x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh *A* và *B*.

(ĐS: $A\left(4;-\frac{1}{2}\right), \mathrm{B}\left(6;-\frac{3}{2}\right)$ hay $B\left(4;-\frac{1}{2}\right), \mathrm{A}\left(6;-\frac{3}{2}\right)$)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi $I(x;y)$ là trung điểm của đoạn *AB* và $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm của ΔABC.

Do $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$ nên $x_G = \frac{2x-1}{3}; y_G = \frac{2y-1}{3}$.

* Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{2y-1}{3} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}. \text{Vậy } I(5;-1)$$

* Ta có $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Gọi (C) là đường tròn có tâm $I(5;-1)$ và bán kính

$$R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (C) : (x-5)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}.$$

* Tọa độ hai điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là:

$$\boxed{A\left(4;-\frac{1}{2}\right), \mathrm{B}\left(6;-\frac{3}{2}\right) \text{ hay } B\left(4;-\frac{1}{2}\right), \mathrm{A}\left(6;-\frac{3}{2}\right)}$$

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;0)$, $B(-2;4)$, $C(-1;4)$, $D(3;5)$ và đường thẳng $d: 3x-y-5=0$. Tìm điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

(ĐS: $M_1\left(\frac{11}{12};-\frac{27}{12}\right), M_2(8;19)$)

► **Hướng dẫn giải :**

* M thuộc d thì M(a;3a–5)

* Mặt khác : $\overrightarrow{AB}=(-3;4) \Rightarrow AB=5, (AB): \frac{x-1}{-3}=\frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x+3y-4=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=(4;1) \leftrightarrow CD=\sqrt{17}; (CD): \frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{1} \Leftrightarrow x-4y-17=0$

* $h_1=(M,AB)=\frac{|4a+3(3a-5)-4|}{5}=\frac{|13a-19|}{5}$,

$h_2=\frac{|a-4(3a-5)-17|}{\sqrt{17}}=\frac{|3-11a|}{\sqrt{17}}$

* Nếu diện tích hai tam giác giác bằng nhau nên:

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.h_1=\frac{1}{2}CD.h_2 \Leftrightarrow \frac{5.|13a-19|}{5}=\frac{\sqrt{17}.|3-11a|}{\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 13a-19=3-11a \\ 13a-19=11a-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{11}{12} \\ a=8 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{M_1\left(\frac{11}{12};-\frac{27}{12}\right), M_2(8;19)}$

Câu 26: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng AB và BD lần lượt là x – 2y + 1 = 0, x – 7y + 14 = 0, đường thẳng AC đi qua M(2; 1). Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Dễ nhận thấy B là giao của BD với AB có $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{21}{5};\frac{13}{5}\right)$

Đường thẳng (BC) qua B(7;3) và vuông góc với (AB) cho nên có véc tơ chỉ phương:

$$\vec{u}=\left(1;-2\right)\Rightarrow\left(BC\right):\begin{cases}x=\dfrac{21}{5}+t\\ y=\dfrac{13}{5}-2t\end{cases}$$

* Ta có : $\square\left(AC,BD\right)=\square BIC=2\square ABD=2\varphi=2\square\left(AB,BD\right)$

(AB) có $\overrightarrow{n_1}=\left(1;-2\right)$, (BD) có

$$\overrightarrow{n_2}=\left(1;-7\right)\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1+14}{\sqrt{5}\sqrt{50}}=\frac{15}{5\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Gọi (AC) có $\vec{n}=\left(a,b\right)$

$$\Rightarrow\cos\left(\text{AC,BD}\right)=\cos2\varphi=\frac{|\text{a-7b}|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}=2\cos^2\varphi-1=2\left(\frac{9}{10}\right)-1=\frac{4}{5}$$

* Do đó : $5\left|a-7b\right|=4\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow\left(a-7b\right)^2=32\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow31a^2+14ab-17b^2=0$$

$$\left[\begin{aligned}&a=-\frac{17}{31}b\Rightarrow\left(AC\right):-\frac{17}{31}\left(x-2\right)+\left(y-1\right)=0\Leftrightarrow17x-31y-3=0\\&a=b\Rightarrow\left(AC\right):\quad x-2+y-1=0\Leftrightarrow x+y-3=0\end{aligned}\right.$$

* (AC) cắt (BC) tại C $C\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

(AC) cắt (AB) tại A : $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+1=0\\ x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=4\end{cases}\Leftrightarrow A\left(7;4\right)$

(AD) vuông góc với (AB) đồng thời qua A(7;4) suy ra (AD) : $\begin{cases}x=7+t\\ y=4-2t\end{cases}$

(AD) cắt (BD) tại D : $\begin{cases}x=7+t\\ y=4-2t\\ x-7y+14=0\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{7}{15}\Rightarrow D\left(\dfrac{98}{15};\dfrac{46}{15}\right)$

Trường hợp (AC) : 17x – 31y – 3 = 0. các em làm tương tự .

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng d: $x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^0

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* M thuộc d suy ra M(t; – 1 – t)
Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì MAIB là hình vuông (A, B là 2 tiếp điểm).
Do đó AB=MI= IA $\sqrt{2}$ =R $\sqrt{2}=\sqrt{6}\sqrt{2}=2\sqrt{3}$.

* Ta có : $MI=\sqrt{(2-t)^2+(2+t)^2}=\sqrt{2t^2+8}=2\sqrt{3}$

Do đó : $2t^2+8=12 \Leftrightarrow t^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2}\rightarrow M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right) \\ t=\sqrt{2}\rightarrow M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)\end{array}\right.$.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi d' là đường thẳng qua M có hệ số góc k
Suy ra d' có phương trình : $y=k(x-t)-t-1$ *hay* $kx-y-kt-t-1=0$

* Nếu d' là tiếp tuyến của (C) kẻ từ M thì d(I;d')=R $\Rightarrow \dfrac{|2k-kt-t-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \left[(2-t)k-t-2\right]^2=6\left(1+k^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(t^2-4t-2\right)k^2+2(t+2)(2-t)k+\left(t^2+4t-2\right)=0$

* Từ giả thiết ta có điều kiện :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4t-2\neq 0 \\ \Delta'=\left(4-t^2\right)-\left(t^2-2-4t\right)\left(t^2-2+4t\right)>0 \\ \dfrac{t^2+4t-2}{t^2-4t-2}=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 2\pm\sqrt{6} \\ \Delta'=t^2\left(19-t^2\right)>0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \\ t^2=2 \end{cases} \begin{cases} k_1+k_2=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k_1;k_2 \Leftrightarrow M \\ k_1k_2=-1 \end{cases}$$

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) : $x^2+4y^2-4=0$.Tìm những điểm N trên elip (E) sao cho : $F_1\hat{N}F_2=60^0$ (F_1 , F_2 là hai tiêu điểm của elip (E))

(ĐS: $N_1\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),N_2\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right),N_3\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),N_4\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$)

► **Hướng dẫn giải :**

* $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow a^2=4,b^2=1\leftrightarrow c^2=3\rightarrow c=\sqrt{3}$

Gọi $N(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}x_0^2+4y_0^2=4\\MF_1=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0;MF_2=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\\F_1F_2=2\sqrt{3}\end{cases}$

* Xét tam giác F_1MF_2 theo hệ thức hàm số cos :

$$(F_1F_2)^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1MF_2\cos60^0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2-\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow12=8+\frac{3}{2}x_0^2-\left(4-\frac{3}{4}x_0^2\right)\Leftrightarrow\frac{9}{4}x_0^2=8\Leftrightarrow x_0^2=\frac{32}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\frac{4\sqrt{2}}{3}\\x_0=\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y_0^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=-\frac{1}{3}\\y_0=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là:

$$N_1\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),N_2\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right),N_3\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),N_4\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$$

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, đường cao $CH:x-y+1=0$, phân giác trong $BN:2x+y+5=0$.Tìm toạ độ các đỉnh B,C và tính diện tích tam giác ABC

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường (AB) qua A(1;–2) và vuông góc với (CH) suy ra (AB): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \end{cases}$.

(AB) cắt (BN) tại B: $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow t = -5$

* Do đó B(–4;3).Ta có : $k_{AB} = -1, k_{BN} = -2 \Rightarrow \tan\varphi = \left|\dfrac{-1+2}{1+2}\right| = \dfrac{1}{3}$

Gọi A' đối xứng với A qua phân giác (BN) thì A' nằm trên (AB). Khi đó A' nằm trên d vuông góc với (BN) $\Rightarrow d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

* d cắt (BN) tại H : $\Rightarrow H : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow t = -1 \Leftrightarrow H(-1;-3)$.

A' đối xứng với A qua H suy ra A'(–3;–4) . (BC) qua B,A' suy ra : $\vec{u} = (1;-7)$

$\Rightarrow (BC) : \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 - 7t \end{cases}$. (BC) cắt (CH) tại C

$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 - 7t \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow C\left(-\dfrac{13}{4}; -\dfrac{9}{4}\right)$

* Ta có : $\begin{cases} AB = 2\sqrt{5} \\ h(C, AB) = \dfrac{9}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.h(C, AB) = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{5}\,\dfrac{9}{2\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{10}}{4}$

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết A(1;–1) ,B(2;1), diện tích bằng $\dfrac{11}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng d : 3x + y – 4 = 0. Tìm tọa độ đỉnh C?

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Nếu G thuộc d thì G(t;4–3t). Gọi C($x_0; y_0$) . Theo tính chất trọng tâm :

$$\begin{cases} t = \dfrac{1+2+x_0}{3} \\ 4-3t = \dfrac{y_0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3t-3 \\ y_0 = 12-9t \end{cases}$$

* Do đó C(3t–3;12–9t).

$$\overrightarrow{AB} = (1;2) \Rightarrow \begin{cases} (AB): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} \leftrightarrow 2x-y-3=0 \\ AB = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

- Mặt khác, d(C,AB)= $\dfrac{|2(3t-3)-(12-9t)-3|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|15t-21|}{\sqrt{5}}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.h(C,AB) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{|15t-21|}{\sqrt{5}} = \frac{|15t-21|}{2} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow |15t-21| = 11$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{32}{15} \\ t = \dfrac{20}{15} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{32}{15} \to C = \left(\dfrac{17}{5}; -\dfrac{26}{5}\right) \\ t = \dfrac{4}{3} \to C(1;0) \end{array}\right.$$

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên d: x + 7y – 31 = 0, điểm N(7;7) thuộc đường thẳng AC, điểm M(2;–3) thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi $A(x_0; y_0) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (x_0-2; y_0+3), \overrightarrow{NA} = (x_0-7; y_0-7)$.

Do A là đỉnh của tam giác vuông cân cho nên AM vuông góc với AN hay ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NA} = 0 \Leftrightarrow (x_0-2)(x_0-7)+(y_0+3)(y_0-7) = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 9x_0 - 4y_0 - 7 = 0$

* Do đó A nằm trên đường tròn (C) : $(x_0-3)^2 + (y_0-2)^2 = 20$

Đường tròn (C) cắt d tại 2 điểm B,C có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=20 \\ x+7y-31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31-7y \\ (28-7y)^2+(y-2)^2=20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=31-7y \\ 50y^2-396y+768=0 \end{cases}$

* Do đó ta tìm được : $y=\dfrac{198-2\sqrt{201}}{50}=\dfrac{99-\sqrt{201}}{25}; y=\dfrac{99+\sqrt{201}}{25}$

tương ứng ta tìm được các giá trị của x : $x=\dfrac{82+7\sqrt{201}}{25}; x=\dfrac{82-7\sqrt{201}}{25}$.

Vậy tọa độ điểm cần tìm là:

$A\left(\dfrac{82+7\sqrt{201}}{25};\dfrac{99-\sqrt{201}}{25}\right)$ *hay* $A\left(\dfrac{82-7\sqrt{201}}{25};\dfrac{99+\sqrt{201}}{25}\right)$

Câu 32: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d: $3x - 22y - 6 = 0$, sao cho từ điểm M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) mà đường thẳng AB đi qua điểm C (0;1).

(**Bài tập tự luyện**)

► **Hướng dẫn giải :**

* (C) : $(x-3)^2+(y+1)^2=25$, có I(3;–1) và R=5.

$A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M.

Gọi M$(x_0;y_0)\in d \Rightarrow 3x_0-22y_0-6=0$ (*)

* Hai tiếp tuyến của (C) tại A,B có phương trình là :

$(x_1-3)(x-3)+(y_1+1)(y+1)=25 \quad (1)$

Và $(x_2-3)(x-3)+(y_2+1)(y+1)=25 \quad (2)$

* Để 2 tiếp tuyến trở thành 2 tiếp tuyến kẻ từ M thì 2 tiếp tuyến phải đi qua M

$(x_1-3)(x_0-3)+(y_1+1)(y_0+1)=25 \quad (3)$

Và $(x_2-3)(x_0-3)+(y_2+1)(y_0+1)=25 \quad (4)$

* Từ (3) và (4) chứng tỏ (AB) có phương trình là :

$(x_0-3)(x-3)+(y_0+1)(y+1)=25 \quad (5)$

Theo giả thiết thì (AB) qua C(0;1) suy ra :

$$-3\left(x_0-3\right)+2\left(y_0+1\right)=25 \Leftrightarrow -3x_0+2y_0-14=0 (6)$$

Kết hợp với (*) ta có hệ : $\begin{cases}3x_0-22y_0-6=0\\-3x_0+2y_0-14=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_0=-1\\x_0=-\dfrac{16}{3}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{16}{3};-1\right)$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{M\left(-\dfrac{16}{3};-1\right)}$

Câu 33: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Cho hai điểm A(2 ; 1), B(– 1; – 3) và hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình x + y + 3 = 0; x – 5y – 16 = 0. Tìm tọa độ các điểm C,D lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* **Trường hợp : Nếu AB là một đường chéo**

Gọi I$\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$, đường thẳng qua I có hệ số góc k suy ra d: $y=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-1$

Đường thẳng d cắt d_1 tại C

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-1\\x+y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{k-4}{2\left(k+1\right)}\\y=-\dfrac{7k+2}{2\left(k+1\right)}\end{cases} \Leftrightarrow C\left(\dfrac{k-4}{2\left(k+1\right)};-\dfrac{7k+2}{2\left(k+1\right)}\right)$$

* Tương tự d cắt d_2 tại B : $\begin{cases}y=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-1\\x-5y-16=0\end{cases}$

Từ đó suy ra tọa độ của B. Để ABCD là hình bình hành thì: AB = CD sẽ tìm được k

Cách khác: Gọi $C(t;-t-3)$ thuộc d_1, tìm B đối xứng với C qua I suy ra $D(1-t;t+1)$

Để thỏa mãn ABCD là hình bình hành thì D phải thuộc d_2 :

$\Leftrightarrow 1-t-5\left(t+1\right)-16=0 \Rightarrow t=\dfrac{-10}{3}$ và D$\left(\dfrac{13}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$ và C$\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

* **Trường hợp AB là một cạnh của hình bình hành .**

Chọn C (t;–t–3) thuộc d_1 và D (5m+16;m) thuộc d_2.

Để ABCD là hình bình hành thì: $\begin{cases} AC=BD \\ AB //CD \end{cases}$

* Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(2-t)^2+(t+4)^2}=\sqrt{(5m+17)^2+(m+3)^2} \\ \dfrac{5m-t+16}{3}=\dfrac{m+t+3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-t)^2+(t+4)^2=(5m+17)^2+(m+3)^2 \\ 17m-7t+55=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t=13m^2+88m+89=0 \\ t=\dfrac{17m+55}{7} \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được m và t , thay vào tọa độ của C và D

Câu 34: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: x + y – 3 = 0 và 2 điểm A(1; 1), B(–3; 4). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

(**Bài tập tự luyện**)

► **Hướng dẫn giải :**

* M thuộc d suy ra M(t;3–t) .

Đường thẳng (AB) qua A(1;1) và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-3)$

$$\Rightarrow (AB):\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-3}\Leftrightarrow 3x+4y-4=0$$

* Theo đầu bài : $\dfrac{|3t+4(3-t)-4|}{5}=1\Leftrightarrow |-t+8|=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3\rightarrow M(3;0) \\ t=13\rightarrow M(13;-10) \end{array}\right.$

* Đường thẳng d' song song với (AB) có dạng: 3x+4y+m=0 .

Nếu d' cách (AB) một khoảng bằng 1 thì h(A,d')=1 $\Leftrightarrow \dfrac{|3+4+m|}{5}=1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\rightarrow d':3x+4y-2=0 \\ m=-12\rightarrow d':3x+4y-12=0 \end{array}\right.$. Tìm giao của d' với d ta tìm được M .

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(1;1) , điểm M(2;3) thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và N(4;–1) thuộc cạnh CD . Biết độ dài AC = 2BD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi E đối xứng với N qua I thì E thuộc AB và E(–2;3)

Do đó AB có véc tơ $\overrightarrow{ME} = (-4;0) // \vec{u} = (1;0)$.

Tương tự F đối xứng với M qua I thì F thuộc CD và F(0;–1).

CD song song với véc tơ $\overrightarrow{NF} = (-4;0) // \vec{u} = (1;0)$

* Từ AC=2BD suy ra IA=2IB .

Xét tam giác vuông AIB có:

$$AB^2 = IA^2 + IB^2 = IA^2 + \frac{IA^2}{4} = \frac{5IA^2}{4} \Leftrightarrow \frac{IA^2}{AB^2} = \frac{4}{5}$$

Hay : $\frac{IA}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \cos(\text{AB;AC})$ (*). Từ $\overrightarrow{ME} = (1;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (0;-1)$,

* Gọi AC có $\vec{n}_{AC} = (a;b)$ thì do (*)

$$\cos(\text{AB;AC}) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|0.a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 4(a^2+b^2) = 5b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2a \\ b=2a \end{array}\right.$$

* Nếu b= – 2a thì véc tơ chỉ phương của BD là

$\overrightarrow{u_{BD}} = (a;b) = (a;-2a) // \overrightarrow{u_1} = (1;-2)$

$\Leftrightarrow (BD): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \end{cases} (t \in R)$ và đường thẳng (AC):

$1(x-1) - 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow AC: x - 2y + 1 = 0$

* Đường thẳng (AB) qua M(2;3) có $\vec{u} = (1;0) \Rightarrow (AB): \begin{cases} x = 2+k \\ y = 3 \end{cases} (k \in R)$

Đường thẳng (CD) qua N(4;–1) có $\vec{u} = (1;0) \Rightarrow (CD): \begin{cases} x = 4+m \\ y = -1 \end{cases} (m \in R)$

Đường thẳng (BD) cắt (AB) tại B suy ra B(0;3) và BD đồng thời cắt (AC) tại A suy ra A(5;3)

Đường thẳng (CD) cắt (BD) tại D suy ra D(2;–1) và CD cắt (AC) tại C suy ra C(–3;–1)

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $\boxed{A(5;3), B(0;3), C(-3;-1), D(2;-1)}$

Câu 36: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B và nội tiếp trong đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ và điểm A(2;0) . Biết diện tích tam giác ABC bằng 4 . Tìm tọa độ đỉnh C ,B

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Do tam giác vuông ABC tại B và nội tiếp trong đường tròn (C) cho nên AC là đường kính , I (1;–2) là tâm của (C) và AC= $2\sqrt{2}$.

Đường thẳng (AC) qua A(0;–2) // véc tơ $\overrightarrow{IA}=(1;2)$ cho nên (AC):

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow 2x-y-4=0.$$

(AC) cắt (C) tại C $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=5\\ 2x-y-4=0\end{cases}$ suy ra $C(0;-4)$ *hay* $C(2;0)$.

Ta chọn C là (0;–4) ví C(2;0) trùng A

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC thì H(t;2t–4) và BH=d(B;AC)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BH\Rightarrow BH=\frac{2S_{ABC}}{AC}=\frac{2.4}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Gọi B(a;b) thì $d(B;AC)=\frac{|2a-b-4|}{\sqrt{5}}$

Do đó : $\frac{|2a-b-4|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow |2a-b-4|=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=2a-8\\ b=2a\end{array}\right.$ (1)

* B nằm trên (C) suy ra : $(a-1)^2+(b+2)^2=5$ (2)

Nếu b=2a–8 thay vào (2)

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(2a-6)^2=5\Leftrightarrow 2a^2-15a+28=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\to b=-7\\ a=7\to b=6\end{array}\right.$$

Nếu b=2a thay vào (2):

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(2a+2)^2=5\Leftrightarrow 5a^2+7a=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\to b=0\\ a=-\frac{7}{5}\to b=-\frac{14}{5}\end{array}\right.$$

* ***Lưu ý*** : Tìm tọa độ B còn có cách khác

Gọi B(a;b) , do tam giác ABC vuông tại B cho nên $AB \perp CB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{CB} = 0$

$\Leftrightarrow a(a-2)+b(b+4)=0 \Leftrightarrow a^2-2a+b^2+4b=0$. (1)

Kết hợp với diện tích tam giác ABC bằng 4

$$S = 4 = \frac{1}{2}AB.BC \Leftrightarrow 8 = AB.BC \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+b^2}\sqrt{a^2+(b+4)^2} = 8$$

$\Leftrightarrow \left[(a-2)^2+b^2\right]\left[a^2+(b+4)^2\right] = 64$ (2).

Từ (1) và (2) ta cũng suy ra a và b

Câu 37: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, và đường thẳng d: 3x + 4y – 20 = 0. Chứng minh d tiếp xúc với (C) , Tam giác ABC có đỉnh A thuộc (C), các đỉnh B và C thuộc d , trung điểm cạnh AB thuộc (C) . Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C , biết trực tâm của tam giác ABC trùng với tâm của đường tròn (C) và điểm B có hoành độ dương

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* (C): $(x-1)^2+(y+2)^2 = 25 \Rightarrow O(1;-2); R = 5$

Nhận xét : d(O;d)=$\frac{|3-8-20|}{5} = \frac{25}{5} = 5 = R$. Chứng tỏ d tiếp xúc với (C) .

* Gọi I là tiếp điểm của d với (C) , vì trực tâm tam giác trùng với tâm O cho nên AI vuông góc với d suy ra (AI) qua O(1;–2) có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2+4t \end{cases} (t \in R)$$

* AI cắt (C) tại A thỏa mãn :

$$(1+3t-1)^2+(-2+4t+2)^2 = 25 \Leftrightarrow 25t^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow A=(-2;-6) \\ t=1 \Rightarrow A=(4;2) \equiv I \end{array}\right.$$

Đồng thời AI cắt d tại I : 3(1+3t)+4(–2+4t)–20=0 suy ra t=1.

Do đó I(4;2) . Chú ý d chuyển sang tham số thì d: $\begin{cases} x = 8-4t \\ y = -1+3t \end{cases}$ (*)

* Nếu K là trung điểm của AB thì OK là đường trung bình tam giác AIB suy ra IB = 2OK.

Hay : IB=2R=10.(1)

Vì B thuộc d suy ra B(8–4t;–1+ 3t), với I(4;2)$\Rightarrow \overrightarrow{BI} = (4t-4; 3-3t)$

* Từ (1) :

$$(8-4t)^2+(3-3t)^2=100 \Leftrightarrow 16(t-1)^2+9(1-t)^2=100 \Leftrightarrow 25(t-1)^2=100$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=-2 \\ t-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \rightarrow B=(12;-4) \\ t=3 \rightarrow B=(-4;3) \end{array}\right..$$

Chọn B(12;–4) do giả thiết cho B có hoành độ dương .

* Đường thẳng (CO) vuông góc với véc tơ

$$\overrightarrow{AB}=(-2;14)//\vec{n}=(1;-7) \Rightarrow (CO): x-7y-15=0$$

(CO) cắt d tại C thỏa mãn : $\begin{cases} x=8-4t \\ y=-1+3t \\ x-7y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-4t \\ y=-1+3t \Rightarrow C=(8;-1) \\ t=0 \end{cases}$

Câu 38: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chođiểm $A(-1;2)$ và đường thẳng $(d): x-2y+3=0$. Tìm trên đường thẳng (d) hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông tại C và $AC=3BC$.

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* Từ yêu cầu của bài toán ta suy ra C là hình chiếu vuông góc của A trên (d)

Phương trình đường thẳng (Δ) qua A và vuông góc với (d) là: $2x+y+m=0$

$$A(-1;2) \in (\Delta) \Leftrightarrow -2+2+m=0 \Leftrightarrow m=0$$

* Suy ra: $(\Delta): 2x+y=0$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right).$$

* Đặt $B(2t-3;t) \in (d)$, theo giả thiết ta có: $AC=3BC \Leftrightarrow AC^2=9BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{25}+\frac{16}{25}=9\left[\left(2t-\frac{12}{5}\right)^2+\left(t-\frac{6}{5}\right)^2\right] \Leftrightarrow 45t^2-108t+64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{16}{15} \\ t=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Với $t=\dfrac{16}{15} \Rightarrow B\left(-\dfrac{13}{15};\dfrac{16}{15}\right)$ Với $t=\dfrac{4}{3} \Rightarrow B\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là: $B\left(-\frac{13}{15};\frac{16}{15}\right)$ *hay* $B\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=9$ và $A(-1;1), B(2;-2)$. Tìm tọa độ tìm C, D thuộc đường tròn(C) sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

(Bài tập tự luyện)

► **Hướng dẫn giải :**

* (C) có tâm I(1;–3) và bán kính R = 3.
Dễ thấy A nằm ngoài (C) và B nằm trong (C).
Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-3)\Rightarrow AB=3\sqrt{2}$. Do CD // AB nên CD có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1)$
Suy ra CD: x – y + m = 0

* ABCD là hình bình hành nên CD = $AB=3\sqrt{2}$

$$\Rightarrow d(I;CD)=\sqrt{R^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4+m|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow |m+4|=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-7 \end{array}\right.$$

⇒ CD: x – y – 1 = 0 hoặc x – y – 7 = 0

* **TH1:** CD: x – y – 1 = 0

Tọa độ C, D là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2=9\\ x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(x+2)^2=9\\ y=x-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2x-4=0\\ y=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} hay \begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}$$

⇒ C(1;0), D(–2;–3) hoặc C(–2;–3), D(1;0)

* **TH2:** CD: x – y – 7 = 0
Tọa độ C, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2=9\\ x-y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(x+2)^2=9\\ y=x-7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 8 = 0 \\ y = x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9 \pm \sqrt{17}}{4} \\ y = \dfrac{-19 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{9+\sqrt{17}}{4}; \frac{-19+\sqrt{17}}{4}\right),\ D\left(\frac{9-\sqrt{17}}{4}; \frac{-19-\sqrt{17}}{4}\right)$$

Hay $C\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-19-\sqrt{17}}{4}\right),\ D\left(\dfrac{9+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-19+\sqrt{17}}{4}\right)$.

CHỦ ĐỀ 2.2:

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

■ **NHỮNG CÁCH THỨC ĐỂ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG (PTĐT):**

► **Cách 1:*Sử dụng "Nắm đấm và cây gậy"*–** phương trình đường thẳng cần tìm phải đi qua một điểm $M(x_M; y_M)$ **("nắm đấm")** và hoặc nhận $\vec{n}$ làm véctơ pháp tuyến (VTPT) hoặc nhận $\vec{u}$ làm véctơ chỉ phương (VTCP) ("**cây gậy**").

Đây là cách mà chúng ta vẫn thường sử dụng trong quá trình lập phương trình đường thẳng. Trở ngại mà ta thường mắc phải là đường thẳng chưa đi qua điểm? hay chưa có VTPT (VTCP). Vì vậy nhiều khả năng phải chuyển bài toán **"Lập PT đường thẳng" → "tìm thêm điểm"**. Một số lưu ý:

- Nếu $\Delta \perp$ d: $ax + by + c = 0 \Rightarrow \Delta$ có dạng $bx - ay + m = 0$ hay $-bx + ay + m = 0$
- Nếu Δ // d: $ax + by + c = 0 \Rightarrow \Delta$ có dạng $ax + by + d = 0$ (chú ý $d \neq c$)

VD1: $\Delta \perp$ d: $2x + y + 1 = 0 \Rightarrow \Delta: x - 2y + m = 0$

Δ // d: $x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow \Delta: x - 3y + m = 0$ $(m \neq 5)$

► **Cách 2:*Sử dụng "Nắm đấm kép"*:** PTĐT mà ta cần tìm có thể chỉ đi qua một điểm và không có sẵn VTPT (VTCP), vì vậy trong một số trường hợp ta cần "tìm thêm một điểm" nữa để tạo thành VTPT (VTCP).

► **Cách 3:*Sử dụng "Cây gậy lớn"*:** Trong trườngPTĐT chỉ qua một điểm và "**không thể tìm thêm điểm**" nào nữa thì ta sẽ gọi $\boxed{\vec{n} = (a; b)\ (a^2 + b^2 \neq 0)}$ và chỉ phải đi tìm một PT **f(a; b) = 0** có chứa quan hệ của a và b. Do điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$ nên "nếu biết một trong 2 số a (hoặc b) $\neq 0$ thì ta được chọn một số bất kỳ $\neq 0$ cho a (hoặc b).

VD2: $a^2 + 3ab - 4b^2 = 0$ (Nhận xét $b \neq 0$ vì $b = 0 \Rightarrow a = 0$) nên ta chọn $b = 1$ khi đó pt thành: $a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hay $a = -4$.

Chú ý: thường cách này chỉ thật sự hữu hiệu khi kết hợp với ***kỹ thuật dùng khoảng cách hoặc kỹ thuật dùng góc (cụ thể là góc giữa các đường thẳng)*** *(Khi vào ví dụ bài toán sẽ giải thích kỹ hơn).*

► **Cách 4:** ***Sử dụng "đường thẳng có hệ số góc k" theo hàm số:***tương tự như cách 3, PTĐT cũng chỉ qua một điểm $M(x_o; y_o)$ và chưa có VTPT (VTCP). Cách làm này giúp chúng ta giảm ẩn đến hết mức có thể và tận dụng các yếu tố về góc của đường thẳng.

Chú ý: $\boxed{\Delta \textbf{ qua } M(x_o; y_o) \textbf{ có hệ số k} \Rightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o}$ và VTPT sẽ là

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết đã được cho từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$\vec{n} = (k; -1)\ (k \neq 0)$

- *Trong một số bài toán ta nên xét 2 trường hợp k = 0*

⇒ Δ: $y = y_o$ và sau đó là $k \neq 0$)

- *Như đã giới thiệu ở chương 1, hệ số góc ở đây chính là $\tan\alpha$ với α là góc hợp giữa đường thẳng và chiều dương trục hoành.*

VD3: Δ qua M(3; 4) và không song song trục hoành

⇒ Δ: $y = k(x - 3) + 4 = kx - 3k + 4$

VD4: Δ qua M(m; 2m + 3) tạo với chiều dương trục hoành một góc 45^o

⇒ Do Δ tạo với chiều dương trục hoành một góc 45^o ⇒ $k = \tan 45^o = 1$

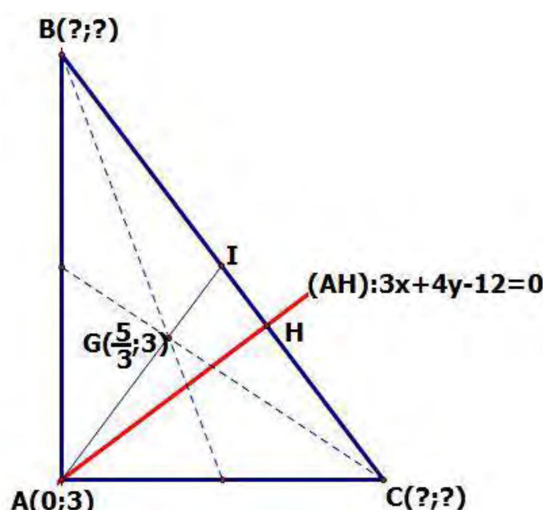
Nên Δ: $y = 1(x - m) + 2m + 3 = x + m + 3$.

(Qua đây cũng thấy được để kiểm tra góc giữa đường thẳng và trục hoành ta chỉ cần xét hệ số góc k)

Thầy sẽ xét các bài toán sau đây làm ví dụ để minh họa cho các cách trên. (Để các bạn tiện theo dõi, mỗi một ví dụ sẽ là một dạng hình quen thuộc mà đề thi hay đề cập).

BÀI TOÁN 1 (TAM GIÁC VUÔNG). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(0;3)$, trọng tâm $G\left(\frac{5}{3};3\right)$, $AH: 3x + 4y - 12 = 0$ với H là chân đường cao. Lập phường trình đường BC và tìm tọa độ điểm B và C.***

■ **Đặt vấn đề:** *Với bài toán này chúng ta có hai hướng để đi là tìm tọa độ điểm B và C sau đó viết pt BC hay cũng có thể lập pt BC trước rồi tìm tọa độ B và C sau. Vấn đề đặt ra là đi theo hướng nào là tốt nhất? Mời các bạn xem các cách giải sau.*



■ **CÁCH 1:** ***Đặt B(x_B; y_B) và C(x_C ; y_C).***

☺ **Ý tưởng :**

– Với việc đặt ẩn như trên (4 ẩn)

→ chúng ta cần đến 4pt?

– G là trọng tâm ΔABC ⇒ 2pt (1) và (2)

– AH ⊥ BC ⇒ pt (3)

– AB ⊥ AC ⇒ pt (4).

– Giải hệ pt 4 ẩn (1), (2), (3), (4) → tìm được tọa độ B và C → viết phương trình BC cần thiết.

theo cách 1, góp phần giúp các bạn liên kết và tận hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G = 5 \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 5 \\ y_B + y_C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 - x_C \\ y_B = 6 - y_C \end{cases}$$

* Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_B; y_B - 3) = (5 - x_C; 3 - y_C) \\ \overrightarrow{AC} = (x_C; y_C - 3) \\ \overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B) = (2x_C - 5; 2y_C - 3) \end{cases}$ và $\overrightarrow{u_{AH}} = (4; -3)\, la\, VTCP$

* Theo giả thiết đề bài, ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{u_{AH}}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5 - x_C)x_C + (3 - y_C)(y_C - 3) = 0 \\ 4(2x_C - 5) - 3(2y_C - 3) = 0 \end{cases}$$ *(Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc)*

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_C = 1 \Rightarrow y_C = 1 \\ x_C = 4 \Rightarrow y_C = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1(1;1); B_1(4;5) \\ C_2(4;5); B_2(1;1) \end{array} \right.$$

* Do vai trò của B và C như nhau nên ta chỉ xét một trường hợp C(1;1), B(4;5).

BC qua C(1;1) nhận $\overrightarrow{CB} = (3;4)\, lam\, VTCP$ có dạng là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} \Leftrightarrow (BC): 4x - 3y - 1 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là **(BC): 4x – 3y – 1 = 0**

và tọa độ điểm cần tìm là $\left[\begin{array}{l} C_1(1;1); B_1(4;5) \\ C_2(4;5); B_2(1;1) \end{array} \right.$

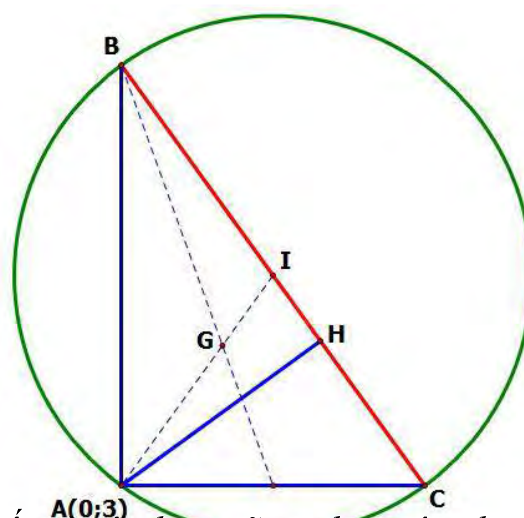
■ **CÁCH 2: Lập phương trình đường BC trước và sau đó tìm tọa độ B và C sau.**

☺ **Ý tưởng :**

– Ta đã có BC ⊥ AH nên chỉ cần tìm thêm một điểm thuộc BC nữa là xong.

– Nếu gọi I là trung điểm BC thì ta có thể sử dụng tính chất của trọng tâm G: AG = 2GI → chuyển về đẳng thức véctơ để tìm ra I.

– Sau khi có I thì viết pt BC không còn trở ngại nữa. Đến đây ta có 2 hướng đi tiếp:



+ **Hướng thứ nhất:** tham số hóa điểm B và do I là trung điểm BC → tham số hóa điểm C theo B. Sau đó dùng điều kiện AB ⊥ AC để giải tìm ra B.

theo cách 1 sẽ giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

+ **Hướng thứ hai:** Xét tọa độ B và C trong sự tương giao giữa đường BC và một **đường tròn ẩn mình** khác → đó chính là đường tròn tâm I, bán kính R = IA. Ở đây, thầy sẽ trình bày theo hướng thứ hai !

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi I là trung điểm BC. Do G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3} - 0 = \frac{2}{3}(x_I - 0) \\ 3 - 3 = \frac{2}{3}(y_I - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5}{2} \\ y_I = 3 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};3\right)$$

* Do BC ⊥ AH: 3x + 4y – 12 =0 ⇒ BC: 4x – 3y + m = 0.

Do BC qua $I\left(\frac{5}{2};3\right) \Rightarrow m = -1$.

Vậy phương trình đường BC cần tìm là **(BC): 4x – 3y – 1 = 0**

* Do ΔABC ⊥ A có I là trung điểm cạnh huyền BC ⇒ IA = IB = IC = $\frac{5}{2}$. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính R = IA có dạng là:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$$

* Ta có B và C là giao điểm giữa BC và (C) nên tọa độ B và C thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4} \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$$ (*việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C_1(1;1); B_1(4;5) \\ C_2(4;5); B_2(1;1) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là (BC): 4x – 3y – 1 = 0

và tọa độ điểm cần tìm là $\left[\begin{array}{l} C_1(1;1); B_1(4;5) \\ C_2(4;5); B_2(1;1) \end{array}\right.$

■ **Lời bình**:

Với cách 1, *chúng ta thấy ngay ở cách này ở sự "liều lĩnh", việc giải bài toán theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa*

chắc giải ra được bài toán. Nhược điểm của cách làm này như đã phân tích ở các bài toán trước là nặng về tính toán, kỹ năng.

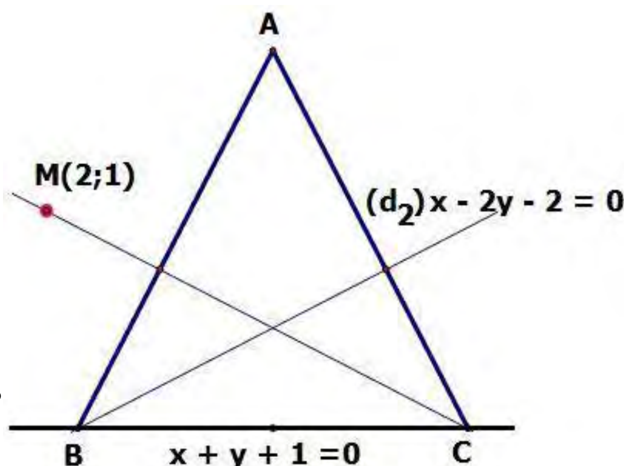
Với cách 2, *có thể thấy hướng đi viết phương trình BC mang đến cho ta khá nhiều thuận lợi trong việc tìm B và C sau này. Rõ ràng việc "tìm thêm điểm" hay việc "tìm thêm phương trình đường thẳng" đều giúp ta khai thác được thế mạnh của từng bên. Qua đây ta cũng thấy được, một lời giải ngắn gọn thì bao hàm trong nó là tập hợp của rất nhiều kỹ thuật giải. Việc vận dụng kỹ thuật như thế nào tùy vào khả năng lĩnh hội và khuynh hướng sở trường sử dụng của mọi người. Mỗi phương pháp đều có cái hay riêng của nó.*

BÀI TOÁN 2 (TAM GIÁC CÂN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, cạnh đáy BC có phương trình (d_1): x + y + 1 = 0, phương trình đường cao kẻ từ B là (d_2): x – 2y – 2 = 0. Đường cao kẻ từ C qua điểm M(2;1). Viết phương trình đường thẳng AB và AC và tìm tọa độ điểm A?***

■ **Đặt vấn đề:** *Đề bài đặt ra 2 câu hỏi, tìm tọa độ của điểm A và viết PT 2 cạnh bên của tam giác. Nhưng Biết xuất phát từ câu hỏi nào đây? Ở đây thầy đề nghị hai cách giải sau.*

■ **CÁCH 1: Tìm tọa độ điểm A và C →viết PT AB, AC.**

☺**Ý tưởng :**



_ Nhận xét có thể tìm được điểm $B = d_1 \cap d_2$

_ Ta có $C \in BC$ → tham số hóa điểm C.

Do không có thông tin nào từ điểm A → đặt A(a; b) → 3 ẩn→ cần 3 PT?

_ Ta có $d_2 \perp AC$ → Pt (1), $MC \perp AB$ → Pt(2).

_ Gọi I là trung điểm BC → $AI \perp d_1$→ (3).

_ Từ (1), (2), (3) giải hệ phương trình → tìm đươc a, b,c

_ Sau đó việc viết PT AB và AC thì không còn trở ngại nữa.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do $B = d_1 \cap d_2$

⇒ tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(0;-1)$

* $C \in BC \Rightarrow C(c; -1-c)$ và giả sử tọa độ A(a; b). Gọi I là trung điểm BC

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$\Rightarrow I\left(\frac{c}{2};-1-\frac{c}{2}\right)$

* Theo đề bài ta có: $\begin{cases} d_2 \perp AC \\ d_1 \perp AI \\ MC \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{d2}}.\overrightarrow{AC} = 0 \ \ (1) \\ \overrightarrow{u_{d1}}.\overrightarrow{AI} = 0 \ \ (2) \\ \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0 \ (3) \end{cases}$

* $(1) \Rightarrow \overrightarrow{u_{d2}}.\overrightarrow{AC} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{u_{d2}} = (2;1) \ la \, VTCP \\ \overrightarrow{AC} = (c-a;-1-c-b) \end{cases}$ nên 2(c – a) – 1 – b – c = 0

⇔ **c – b – 2a – 1 = 0 (4)**

* $(2) \Rightarrow \overrightarrow{u_{d1}}.\overrightarrow{AI} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{u_{d1}} = (1;-1) \ la \, VTCP \\ \overrightarrow{AI} = (\frac{c}{2}-a;-1-\frac{c}{2}-b) \end{cases}$ nên $\frac{c}{2} - a + 1 + \frac{c}{2} + b$

⇔ **c + b – a + 1 = 0 (5)**

* $(3) \Rightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{MC} = (c-2;-2-c) \\ \overrightarrow{AB} = (-a;-1-b) \end{cases}$ nên **–a(c – 2) + (2 + c)(1 + b) = 0 (6)**

* Từ (4), (5), (6) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c-b-2a-1=0 & (4) \\ c+b-a+1=0 & (5) \\ -a(c-2)+(2+c)(1+b)=0 & (6) \end{cases}$

* (4) cộng (5) ta được: 2c – 3a = 0 ⇒**a =** $\mathbf{\frac{2c}{3}}$.

(4) trừ (5) ta được : –2b – a – 2 = 0 (*), thay a = $\frac{2c}{3}$ vào (*) suy ra **b =** $\mathbf{\frac{-c}{3} - 1}$**.**

* Thay **a =** $\mathbf{\frac{2c}{3}}$ **và b =** $\mathbf{\frac{-c}{3} - 1}$ vào (6) ta được $\frac{-2c}{3}(c-2) - \frac{c}{3}(2+c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 2c = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

* Với c = 0, do a = $\frac{2c}{3}$ = 0 và b = $\frac{-c}{3}$ – 1 = – 1 nên A(0;–1) (**loại vì trùng với điểm B(0;–1)**)

* Với c = $\frac{2}{3} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3};\frac{-5}{3}\right)$ và $A\left(\frac{4}{9};\frac{-11}{9}\right)$.

* Do AC ⊥ d_1: x – 2y – 2 = 0 nên (AC): 2x + y + m = 0.

Mà (AC) qua $C\left(\frac{2}{3};\frac{-5}{3}\right) \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

Vậy phương trình đường AC là **(AC): 6x + 3y + 1 = 0**

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* AB qua B(0; –1) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MC} = \left(\frac{-4}{3}; \frac{-8}{3}\right)$ có dạng là:

$$\frac{-4}{3}(x-0) - \frac{8}{3}(y+1) = 0$$

Vậy phương trình đường AB là **(AB): x + 2y + 2 = 0**

Vậy điểm A và phương trình đường thẳng cần tìm lần lượt là

$A\left(\frac{4}{9}; \frac{-11}{9}\right)$ *và (AC): 6x + 3y + 1 = 0 và (AB): x + 2y + 2 = 0*

■ CÁCH 2: Viết PT AB, AC→ tìm tọa độ điểm A.

☺ Ý tưởng :

_ Nhận xét có thể tìm được điểm B = $d_1 \cap d_2$

_ Cả hai cạnh AB, AC đều chưa đủ yếu tố để lập PTĐT, vì vậy chúng ta chuyển hướng sang lập các pt đường khác → đường cao kẻ từ C (d_3) (vì đường d_3 tạo với BC một góc bằng với d_2 tạo với BC và đồng thời đường cao này đã qua điểm M(2; 1).

_ Do có "**nắm đấm**" M, nhưng lại thiếu "**cây gậy**" là VTPT nên ta có hai hướng để đi tiếp hoặc là gọi VTPT có dạng $\vec{n} = (a; b)$ hay lập phương trình đường thẳng có hệ số góc k.

_ Dùng quan hệ về góc giữa (d_2; BC) = (d_3; BC)

⇒ pt đường cao kẻ từ C → C = $d_3 \cap$ BC. Viết AB bằng cách AB qua B và ⊥ d_3, AC ⊥ d_2 và qua C.

_ Khi đã lập được pt AB, AC → AB ∩ AC = A.

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Tương tự cách 1, ta có B = BC$\cap d_2$⇒B(0; –1).

Gọi phương trình đường cao kẻ từ C là d_3 qua M(2; 1) có dạng:

$y = k(x - x_M) + y_M = k(x - 2) + 1$ ⇒**(d_3) : kx – y – 2k + 1 = 0** (d_3) có VTPT là $\vec{n} = (k; -1)$

* Do ΔABC cân tại A ⇒∠(d_1; d_2) = ∠(d_1; d_3) ⇔cos(d_1; d_2) = cos(d_1; d_3)

⇔ $|\cos(\overrightarrow{n_{d1}}, \overrightarrow{n_{d2}})| = |\cos(\overrightarrow{n_{d1}}, \vec{n})|$ với $\begin{cases} \overrightarrow{n_{d1}} = (1;1) \text{ la VTPT cua BC} \\ \overrightarrow{n_{d2}} = (1;-2) \text{ la VTPT cua } d_2 \\ \vec{n} = (k;-1) \text{ la VTPT cua } d_3 \end{cases}$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{n_{d1}}.\overrightarrow{n_{d2}}|}{|\overrightarrow{n_{d1}}|.|\overrightarrow{n_{d2}}|} = \frac{|\overrightarrow{n_{d1}}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{n_{d1}}|.|\vec{n}|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{2} \\ k = 2 \end{array}\right.$$

* Với $k = \frac{1}{2}$ suy ra d_3: $x - 2y = 0$ (**loại vì song song d_2, d_2 và d_3 phải cắt nhau**)

* Với $k = 2$ suy ra d_3: $2x - y - 3 = 0$ (**nhận**)

Mặt khác $C = d_3 \cap BC \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{-5}{3}\right)$

* $AB \perp d_3: 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow AB: x + 2y + d = 0$, AB qua $B(0; -1) \Rightarrow d = 2$.

Vậy **(AB) : x + 2y + 2 = 0.**

* $AC \perp d_2: x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow AC: 2x + y + e = 0$, AC qua $C\left(\frac{2}{3}; \frac{-5}{3}\right) \Rightarrow e = \frac{1}{3}$.

Vậy **(AC) : 6x + 3y + 1 = 0.**

* Do $A = AC \cap AB \Rightarrow A\left(\frac{4}{9}; \frac{-11}{9}\right)$ (***việc giải các tọa độ giao điểm xin dành cho bạn đọc***)

Vậy điểm A và phương trình đường thẳng cần tìm lần lượt là

$A\left(\frac{4}{9}; \frac{-11}{9}\right)$ *và **(AC): 6x + 3y + 1 = 0 và (AB): x + 2y + 2 = 0***

■ **Lời bình**:

Với cách 1, *chúng ta thấy ngay được những khó khăn trở ngại trong việc đặt quá nhiều ẩn và thiết lập các phương trình. Việc giải hệ phương trình thuần túy rút thế, cộng trừ vế nhưng không phải là đơn giản với một số bạn. Chính việc đặt quá nhiều ẩn vô tình đẩy bài toán đến hướng đi cồng kềnh, nhiều nút thắt, nếu bạn là một người có kỹ năng "giải các phương trình, hệ phương trình đại số" tốt thì việc thiết lập và giải các hệ sinh ra từ hình học này không thể làm khó được bạn.*

Với cách 2, *có lẽ bạn vẫn còn rất bất ngờ trước cách giải vô cùng táo bạo và ngắn gọn của cách này. Ưu điểm có thể nhận thấy ngay là việc "giảm tải" trong việc đặt quá nhiều ẩn ở cách 1, sử dụng các quan hệ về góc giữa các đường thẳng (**Kỹ thuật dùng góc**). Ngoài ra việc biểu diễn đường thẳng dưới dạng kiểu hàm số **y = f(x) có hệ số góc k** cũng là một hướng đi mới cho chúng ta nếu chưa có "**cây gậy VTPT**". Nhược điểm nếu có của cách 2 có lẽ là việc phát sinh*

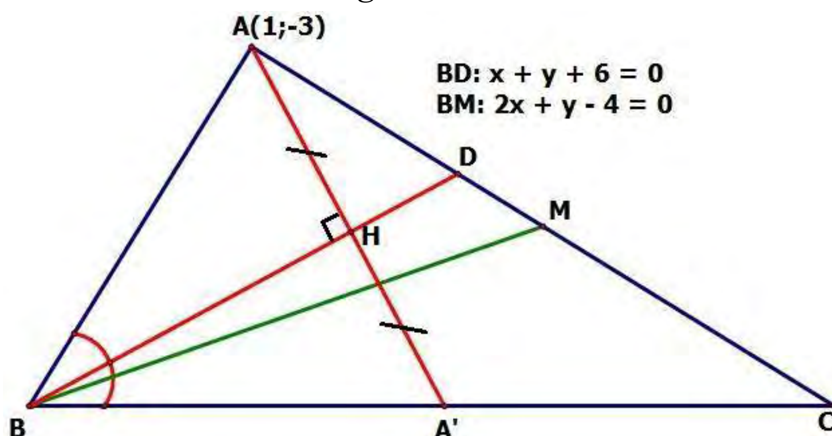
the... hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

thêm 1 đường thẳng nữa, dĩ nhiên thường là ta phải loại chúng đi, vì vậy cần ***xét "vị trí tương đối giữa các đường với nhau, hoặc giữa điểm và đường".***

Ngoài ra với cách 2 này, bạn cũng có thể thử đặt $\vec{n} = (a; b)$ *như trong phương pháp đã đề cập, việc giải cũng hết sức tương tự.*

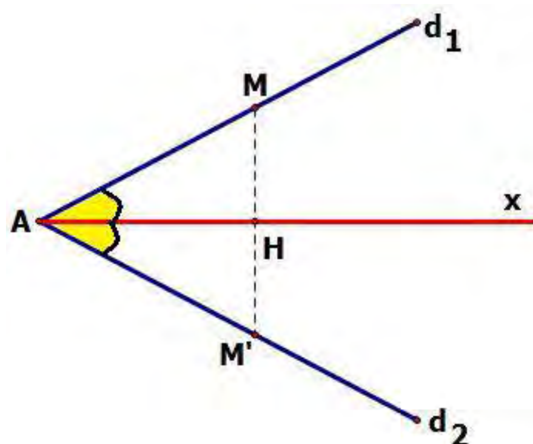
BÀI TOÁN 3 (TAM GIÁC THƯỜNG). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(1; –3), phương trình đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ B lần lượt là $(d_1): 2x + y - 4 = 0$ và $(d_2): x + y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC và tìm tọa độ chân đường phân giác trong kẻ từ B.***

■ **Đặt vấn đề:** *đường phân giác là một trong những đường mang trong mình rất nhiều các yếu tố đặc biệt. Song song với việc rèn luyện hướng tư duy lập phương trình đường thẳng, bài toán cũng muốn giới thiệu lại vai trò và một số tính chất quan trọng liên quan đến đường phân giác mà các em đã được học ở các lớp dưới. Mời các em xem lời giải và lời bình cuối bài.*



☺ **Ý tưởng :**

_ Nhận xét nhanh là ta có B = BD ∩ BM và AC đã qua điểm A nên hoặc tìm thêm một « cây gậy » hoặc tìm thêm một điểm nữa để thành "nắm đấm kép". Ở đây ta thấy khuynh hướng đi tìm thêm một điểm nữa là khả quan nhất (vậy điểm đó là điểm nào?) → điểm C.



_ Do **tính chất đối xứng** đặc biệt của **phân giác** nên ta có có thể **"tìm thêm được điểm mới".** Cụ thể nếu gọi H là hình chiếu của A lên BD và A' là điểm đối xứng của A qua phân giác BD thì **A' ∈ BC** → tìm A'.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Khi đã có A' → viết pt đường BC → tham số hóa điểm C theo đường BC → tham số hóa điểm M theo C do M là trung điểm AC → M ∈ BM ⇒ tìm được C.

► **Hướng dẫn giải: Gọi M, D lần lượt là giao điểm giữa d_1 và d_2 với đường AC.**
(*Một số bước giải đơn giản xin được dành cho bạn đọc*)

* Ta có B = BD ∩ BM ⇒ tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow B(-2;8).$$

AB qua A(1; –3) nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;11)$ làm VTCP có dạng là:

(AB) : 11x + 3y – 2 = 0 .

* Gọi H là hình chiếu của A lên phân giác trong BD và A’ là điểm đối xứng của A qua phân giác. (A’ thuộc BC và H là trung điểm AA’).
Do AH ⊥ BD ⇒ (AH): x – 2y + m = 0. (AH) qua A(1; –3) ⇒ m = –7.
Vậy **(AH): x – 2y – 7 = 0.**
Lại có: H = AH ∩ BD ⇒ H(3; –2).
Mặt khác H là trung điểm AA’ ⇒ A’(5; –1) ∈ BC.

* Phương trình BC qua B(–2;8) và nhận $\overrightarrow{BA'}=(7;-9)$ làm VTCP có dạng là:

$$\frac{x+2}{7}=\frac{y-8}{-9} \Leftrightarrow (BC): 9x+7y-38=0 \text{ và } C \in BC \Rightarrow C\left(c;\frac{38-9c}{7}\right)$$

* Ta có M là trung điểm AC ⇒ $M\left(\frac{1+c}{2};\frac{17-9c}{14}\right)$ mà M ∈ BM : x + y – 6 = 0

Suy ra $\frac{1+c}{2}+\frac{17-9c}{14}-6=0 \Rightarrow c=-30 \Rightarrow$ **C(–30 ; 44)**

* Phương trình đường AC qua A(1; –3) nhận $\overrightarrow{AC}=(-31;47)$ làm VTCP có dạng là: $\frac{x-1}{-31}=\frac{y+3}{47} \Leftrightarrow (AC): 47x+31y+46=0$

* Ta có D là chân đường phân giác trong kẻ từ B và D = BD ∩ AC ⇒ tọa độ D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 47x+31y+46=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{34}{3} \\ y=\frac{-56}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{34}{3};\frac{-56}{3}\right)$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là (AC): 47x + 31y + 46 = 0 và tọa độ chân đường phân giác trong kẻ từ B cần tìm là $D\left(\frac{34}{3};\frac{-56}{3}\right)$

■ **Lời bình:** *Qua bài toán này cho ta* ***“một số dấu hiệu”*** *trong việc tìm được “**điểm mới**” đó chính là dấu hiệu dựa vào* ***“đường phân giác”.*** *Dĩ nhiên ngoài*

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

tính chất đối xứng ra, yếu tố về góc của phân giác các bạn cũng cần lưu tâm đến.

BÀI TOÁN 4 (HÌNH THANG CÂN) ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD) có diện tích là $\frac{45}{2}$. Phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $x-3y-3=0$. Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại điểm I(2; 3). Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC biết C có tung độ dương.***

■ **Đặt vấn đề:** *Ở các bài toán trước chúng ta đã có dịp làm quen với hình thang vuông, trong chủ đề này, thầy tiếp tục khai thác các khía cạnh của hình thang cân, nó cũng chứa đựng rất nhiều vẻ đẹp mà ta không ngờ đến. Bài toán này xin được trình bày bằng 3 cách giải để các bạn thấy được những khía cạnh hay của nó. Mời các bạn xem lời giải.*

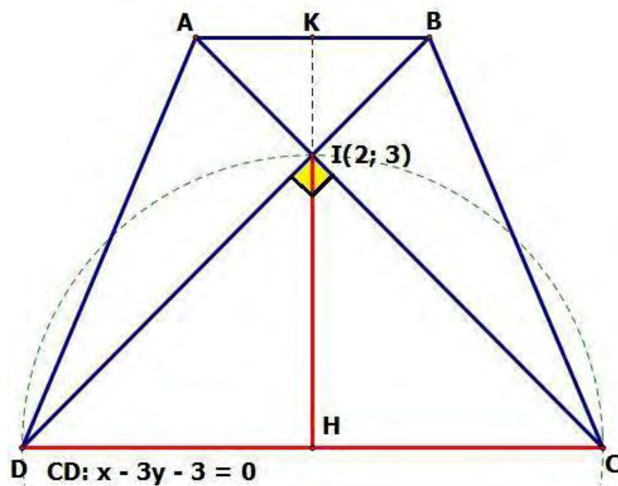
■ **CÁCH 1: Goi H, K lần lượt trung điểm của CD và AB.**

☺ **Ý tưởng :**

_ Do ABCD là h.thang cân ⇒ AC = BD, (2 đường chéo bằng nhau) và IA = IB, IC = ID. Lại có AC ⊥ BD nên lần lượt các ΔICD và ΔIAB đều là Δ vuông cân.

_ Phát hiện một đường tròn ẩn mình (C) tâm H, bán kính HD = HC = HI = d[I; CD] → C và D là giao điểm giữa (C) và CD ⇒**tọa độ C và D** ⇒ độ dài ID.

_ Do vậy ta phải đi tìm H với H = IH ∩ CD (viết pt IH ⊥ CD và qua I).



_ Ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}HK(AB+CD)$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}HK(2IK+2IH)$

$\Rightarrow S_{ABCD}=(IK+IH)^2$

⇒ độ dài IK. Lập tỉ số $\frac{IK}{IH}=\frac{IB}{ID}$

⇒ chuyển về đẳng thức véctơ tìm được B.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do ABCD là hình thang cân ⇒ AC = BD ⇒ IA = IB và IC = ID mà AC ⊥ BD nên ΔIAB và ΔICD là tam giác vuông cân tại I.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Do đó $IK=\frac{AB}{2},\ IH=\frac{CD}{2}=d[I;CD]=\frac{|2-3.3-3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$

* Do đó H chính là hình chiếu vuông góc của I lên CD $\Rightarrow IH \perp CD: x - 3y - 3 = 0$

$\Rightarrow$IH: $3x + y + m = 0$. Mà IH qua I(2;3) $\Rightarrow m = -9$. Vậy **IH: 3x + y – 9 = 0**

Lại có $H = IH \cap CD \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(3;0)}$$

* Ta có HI = HD = DC = $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$đường tròn (C) tâm H, bán kính $\sqrt{10}$ có tọa độ C, D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 10 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6, y = 1 \\ x = 0, y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{C(6;1), D(0;-1)}$$ (do C có tung độ dương)

* $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} HK(AB + CD) = (IK + IH)^2 = \dfrac{45}{2} \Rightarrow IK = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Mặt khác, $\dfrac{IK}{IH} = \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{ID} \Rightarrow B(3;5)$

* Đường thẳng BC qua B(3; 5) nhận $\overrightarrow{BC} = (3;-4)$ làm VTCP có dạng là :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-4} \Leftrightarrow \boxed{(BC): 4x + 3y - 27 = 0}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là** **$\boxed{(BC): 4x + 3y - 27 = 0}$

■ **CÁCH 2: Nối dài AD và BC lại cắt nhau tai E ($E = BC \cap AD$) – (kỹ thuât kẻ đường phụ)**

☺ **Ý tưởng :**

_ Tương tự cách 1 ta tìm được H, ta có

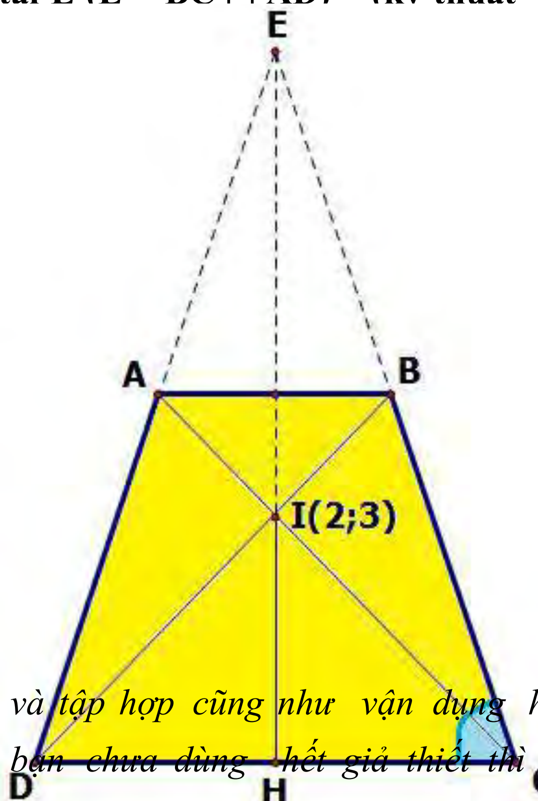
IC = 2IH = 2d[I; CD] = $2\sqrt{5}$

_ $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC.BD \sin(AC; BD)$

$\Rightarrow BD = 3\sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{IC}{AC} = \dfrac{IB}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ I là trọng tâm của $\Delta ECD \Rightarrow$ tọa độ $E \in BC$

_ Lại có $\tan ECH = \dfrac{EH}{HC} = \dfrac{EH}{IH} = 3$

$\Rightarrow \cos ECH = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 ECH}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$



theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Gọi pt BC qua E có hệ số k:

$y = k(x - x_E) + y_E$ với VTPT là $\vec{n} = (k; -1)$

_ Dùng quan hệ góc giữa (EC; CD) → dễ dàng suy ra k → pt đường BC

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi H là trung điểm CD, do nhận xét ABCD là hình thang cân nên ta có

AC = BD (có AC ⊥ BD)

⇒ ΔICD vuông cân tại I ⇒ H là hình chiếu của I lên CD

⇒ IH ⊥ CD ⇒IH: 3x + y + m = 0.

Mà IH qua I(2;3) ⇒ m = – 9. Vậy **IH: 3x + y – 9 = 0**

Lại có H = IH ∩ CD ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-3y-3=0 \\ 3x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(3;0)}$$

* Ta có $IC = IH\sqrt{2} = d\left[I;CD\right].\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$ và đồng thời

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD\sin\left(AC;BD\right) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$$

Do đó : $\frac{IC}{AC} = \frac{2}{3} = \frac{ID}{BD} \Rightarrow$ I là trọng tâm ΔICD ⇒ IE = 2HI

$\Rightarrow \overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{HI} \Rightarrow$ **E(0;9)**

* Ta có $\tan ECH = \frac{EH}{HC} = \frac{EH}{IH} = 3 \Rightarrow \cos ECH = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 ECH}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Gọi phương trình BC qua E(0;9) có hệ số k: y = k(x – 0) + 9 = kx + 9 với $\vec{n} = (k;-1)$.

* Ta có $\cos ECH = |\cos(BC;CD)| = \frac{|k+3|}{\sqrt{10}.\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{-4}{3}}$

⇒ **BC: 4x + 3y – 27 = 0**

Ta có C = BC ∩ CD ⇒ C(6;1) (thỏa yêu cầu bài toán)

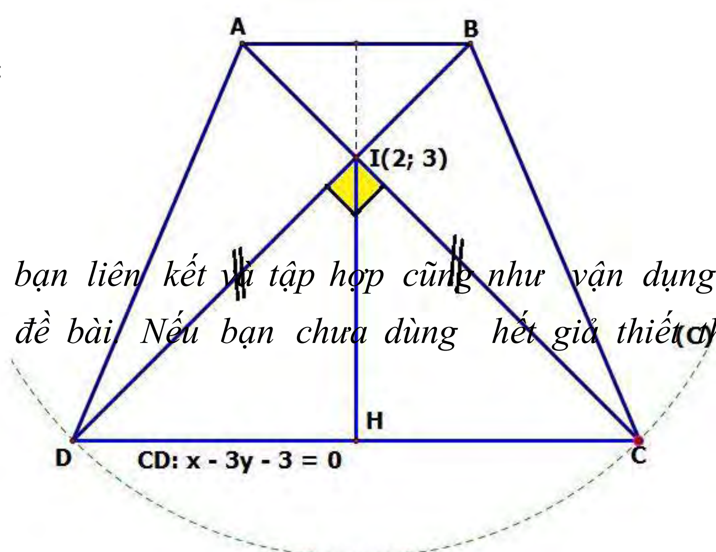
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là BC: $\boxed{4x+3y-27=0}$

■ **CÁCH 3: Tìm tọa độ điểm B và C ("nắm đấm kép") → để viết pt BC.**

☺ **Ý tưởng :**

_ Do ABCD là hình thang cân nên IA = IB, IC = ID.

Lại có AC ⊥ BD nên lần lượt các ΔICD và ΔIAB đều là Δ vuông cân



theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Phát hiện một đường tròn ẩn mình khác (C) tâm I, bán kính

ID = IC = $\dfrac{d\left[I;CD\right]}{\sqrt{2}}$

→ C và D là giao điểm giữa (C) và CD ⇒**tọa độ C và D** ⇒ độ dài ID

_ Mặt khác ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD\sin\left(AC;BD\right)$ (công thức tính diện tích tứ giác)

$\Rightarrow BD^2 = 2S_{ABCD}$ ⇒ độ dài BD.

Lập tỉ số $\dfrac{ID}{BD}$ → chuyển về đẳng thức véctơ →**tìm B**.

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Gọi H là trung điểm CD, do nhận xét ABCD là hình thang cân nên AC = BD, mà AC⊥BD nên ta có ΔICD là tam giác vuông cân tại I với

IH = $\dfrac{CD}{2}$ = d[I; CD] = $\sqrt{10}$ ⇒IC = $\sqrt{20}$

* Ta có ID = IC = $\sqrt{20}$ ⇒đường tròn (C) tâm I, bán kính $\sqrt{20}$ có tọa độ C, D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=20\\ x-3y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, x=6\\ y=-1, x=0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \boxed{C(6;1), D(0;-1)}$ **(do C có tung độ dương)**

* Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD\sin\left(AC;BD\right) \Rightarrow BD^2 = 2S_{ABCD} \Rightarrow BD = 3\sqrt{5}$.

Mặt khác $\dfrac{ID}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DI}$ ⇒**B(3; 5)**

* Đường thẳng BC qua B(3; 5) nhận nhận $\overrightarrow{BC} = (3;-4)$ làm VTCP có dạng là :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-4} \Leftrightarrow \boxed{(BC): 4x+3y-27=0}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là** **(BC): 4x + 3y – 27 = 0

■ **Lời bình**:

Với cách 1, *Ta thấy ngay rất rõ ràng ý đồ của lời giải là đi tìm tọa độ B và C nhằm mục đích viết pt BC. Trong quá trình đi tìm kết quả đó, cách 1 đã vận dụng rất nhuần nhuyễn các kỹ thuật đã được giới thiệu ở những bài toán trước*

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

*như : **"kỹ thuật dùng diện tích", "kỹ thuật lập đường tròn ẩn mình" , "kỹ thuật chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ", "kỹ thuật dùng khoảng cách".** Nhưng nhược điểm là chưa khai thác trọn vẹn những tính chất đặc trưng của hình thang cân.*

Với cách 2,*có thể thấy ngay, ưu điểm lớn nhất của cách này là việc **kẻ đường phụ** và chuyển sang tìm VTPT của đường BC. Trong quá trình tìm ra lời giải đẹp đó, ngoài những cách đã dùng ở cách 1, cách 2 còn sử dụng thêm **"kỹ thuật dùng góc"** và biến tính chất của điểm I trở thành trọng tâm của tam giác ECD.*

Với cách 3,*không quá cầu kì và phức tạp nhưng cách 3 đã sử dụng đúng và đủ những gì sẵn có của đề bài. Có thể thấy việc lập **"đường tròn ẩn mình"** ở cách 3 đã cải tiến và giúp tìm nhanh được tọa độ C và D. Điểm cộng lớn nhất của cách 3 đó chính là việc sử dụng công thức tính diện tích của một khối tứ giác tổng quát.*

$$S_{\text{tứ giác}} = \frac{1}{2}\text{(tích 2 đường chéo).sin(góc tạo bởi 2 đường chéo)}$$

BÀI TOÁN 5 (HÌNH BÌNH HÀNH). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có đỉnh*** $D(-6;-6)$***, đường trung trực của cạnh CD là*** $\Delta: 2x+3y+17=0$***, đường phân giác trong góc*** $\widehat{BAC}$ ***là*** $5x+y-3=0$***. Viết phương trình đường phân giác trong của góc*** $\widehat{BDC}$ ***?***

■ **Đặt vấn đề:***Ta vừa làm quen với vai trò của đường phân giác ở bài toán 3, còn bài toán này với yêu cầu viết phương trình đường phân giác thì ta có thể tiếp cận như thế nào? Mời các bạn xem lời giải.*

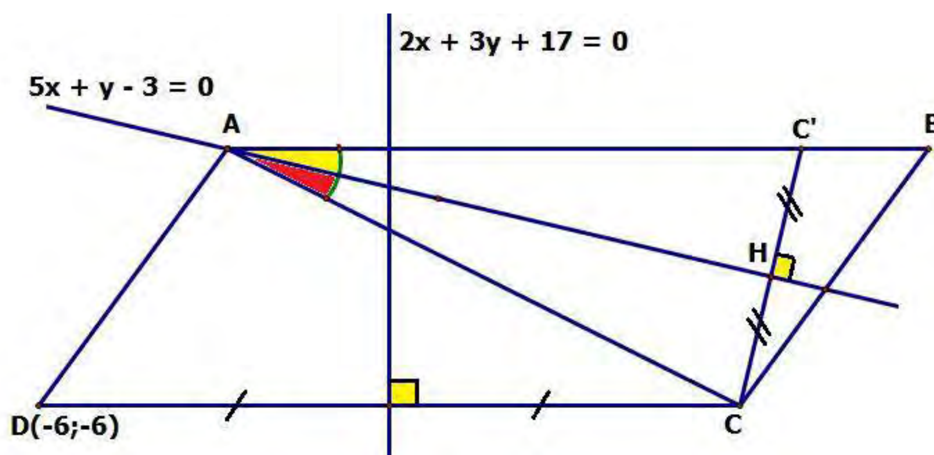
☺ **Ý tưởng :**

_ Có rất nhiều cách để lập phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BDC}$ nhưng xét trên khía cạnh các yếu tố mà đề cho thì trước tiên ta cũng sẽ phải dùng đến đường trung trực và đường phân giác trong.

_ Đường trung trực CD giúp ta viết được pt đường CD mở đường cho việc tìm ra trung điểm CD $\rightarrow$ tìm ra tọa độ điểm C.

_ Nhờ dấu hiệu của đường phân giác góc BAC nên ta có thể tìm thêm một điểm mới C' $\in$ AB đối xứng với C qua phân giác d. Dĩ nhiên sau khi có điểm C' ta dễ dàng lập được phương trình đường AB // CD qua C' $\Rightarrow$ tọa độ A = AB $\cap$ d. Đến đây thì sẽ có rất nhiều hướng đi khác cho việc lập pt đường phân giác trong góc BDC. Mời các em xem lời giải.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa



► **Hướng dẫn giải:**

* CD ⊥Δ: $2x + 3y + 17 = 0 \Rightarrow$ CD: $3x - 2y + m = 0$. Do CD qua C(–6;–6) $\Rightarrow m = 6$.

  Vậy pt đường **CD : 3x – 2y + 6 = 0**.

  Gọi I là trung điểm CD ta có I = CD ∩Δ⇒ Tọa độ I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 2x + 3y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(-4;-3)} \Rightarrow \text{tọa độ điểm } \mathbf{C(-2;0)}$$

* Gọi H là hình chiếu của C lên d và C' là điểm đối xứng của C qua phân giác d. (**C' ∈ AB** và H là trung điểm CC').

  Ta có HC ⊥ d : $5x + y - 3 = 0 \Rightarrow$ HC : $x - 5y + n = 0$.

  Do HC qua C(–2 ;0) $\Rightarrow n = 2$

  Vậy pt đường **HC : x – 5y + 2 = 0**.

  Lại có : H = HC ∩ d ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 5y = -2 \\ 5x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

  Do H là trung điểm CC'⇒**C'(3;1) ∈ AB.**

* AB // CD: $3x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow$ AB: $3x - 2y + p = 0$ $(p \neq 6)$. AB qua C'(3 ; 1) $\Rightarrow p = -7$

  Vậy pt đường **AB : 3x – 2y – 7 = 0**.

  Mặt khác A = AB ∩ d ⇒**A(1 ; –2).**

■ **CÁCH 1: Gọi K = AC ∩ BD ⇒ K là trung điểm AC** $\Rightarrow K\left(\frac{-1}{2};-1\right)$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* Phương trình đường DK qua D(–6 ;–6) và nhận $\overrightarrow{DK} = \left(\frac{11}{2}; 5\right)$ làm VTCP có dạng là: $\frac{x+6}{11/2} = \frac{y+6}{5} \Leftrightarrow \boxed{(DB): 10x - 11y - 6 = 0}$

* Phương trình các đường phân giác góc BDC tạo bởi hai đường thẳng (DC): 3x – 2y + 6 = 0 và (DB) : 10x – 11y – 6 = 0 có dạng là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Leftrightarrow \frac{10x - 11y - 6}{\sqrt{10^2 + (-11)^2}} = \pm\frac{3x - 2y + 6}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$

$\Leftrightarrow 10x - 11y - 6 = \pm\sqrt{17}(3x - 2y + 6)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(10 - 3\sqrt{17})x + (2\sqrt{17} - 11)y - 6 - 6\sqrt{17} = 0 \ (d_1) \\ (10 + 3\sqrt{17})x - (2\sqrt{17} + 11)y - 6 + 6\sqrt{17} = 0 \ (d_2)\end{array}\right.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} d[C; d_1] = \dfrac{|-20 + 6\sqrt{17} - 6 - 6\sqrt{17}|}{\sqrt{(10 - 3\sqrt{17})^2 + (2\sqrt{17} - 11)^2}} = \dfrac{26}{\sqrt{442 - 104\sqrt{17}}} \\ d[C; d_2] = \dfrac{|-20 - 6\sqrt{17} - 6 + 6\sqrt{17}|}{\sqrt{(10 + 3\sqrt{17})^2 + (2\sqrt{17} + 11)^2}} = \dfrac{26}{\sqrt{442 + 104\sqrt{17}}} \end{cases}$$

$\Rightarrow d[C; d_1] > d[C; d_2]$

Suy ra phương trình đường phân giác trong cần tìm là

$$\boxed{(10 + 3\sqrt{17})x - (2\sqrt{17} + 11)y - 6 + 6\sqrt{17} = 0 \ (d_2)}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\boxed{(10 + 3\sqrt{17})x - (2\sqrt{17} + 11)y - 6 + 6\sqrt{17} = 0 \ (d_2)}$$

■ **CÁCH 2 :“Dùng véctơ đơn vị”**.

* Ta có $\overrightarrow{DK} = \left(\frac{11}{2}; 5\right)$ và $\overrightarrow{DC} = (4; 6)$. Véctơ đơn vị trên hai cạnh AB, AC lần lượt là :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \dfrac{\overrightarrow{DK}}{|\overrightarrow{DK}|} = \dfrac{2}{\sqrt{221}}\left(\dfrac{11}{2}; 5\right) = \dfrac{1}{\sqrt{221}}(11; 10) \\ \overrightarrow{u_2} = \dfrac{\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DC}|} = \dfrac{1}{2\sqrt{13}}(4; 6) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2; 3) = \dfrac{1}{\sqrt{221}}(2\sqrt{17}; 3\sqrt{17}) \end{cases}$$

Suy ra véctơ chỉ phương của đường phân giác trong góc BDC là:

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \left(\frac{11 + 2\sqrt{17}}{\sqrt{221}}; \frac{10 + 3\sqrt{17}}{\sqrt{221}}\right)$ nên có VT pháp tuyến là

$\vec{n} = (10+3\sqrt{17}; -(11+2\sqrt{17})$

Vậy phương trình đường phân giác trong góc BDC là:

$(10+3\sqrt{17})(x+6) - (2\sqrt{17}+11)(y+6) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(10+3\sqrt{17})x - (2\sqrt{17}+11)y - 6 + 6\sqrt{17} = 0}$

■ **CÁCH 3: "Dùng tỉ số chân đường phân giác"**. Do I là trung điểm BD $\Rightarrow B(5;4)$

* Ta có BD = $\sqrt{221}$, CD = $\sqrt{52}$. Gọi E là chân đường phân giác của góc BDC, khi đó E chia BC theo tỷ số: k = $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{CE}{EB} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CE} = \dfrac{-\sqrt{17}}{2}\overrightarrow{BE} \Rightarrow E\left(\dfrac{93-14\sqrt{17}}{13}; \dfrac{68-8\sqrt{17}}{13}\right)$

Tương tự viết phương trình đường DE là phân giác trong của góc BDC ta cũng có được:

$$\boxed{(10+3\sqrt{17})x - (2\sqrt{17}+11)y - 6 + 6\sqrt{17} = 0}$$

■ **Lời bình**:*bài toán này đưa ra với ý đồ giúp các em ôn tập , nắm vững lại các kiến thức liên quan đến việc lập và sử dụng đường phân giác. Mỗi một cách làm đều có ưu và nhược điểm của chúng. Tuy vậy cách 2 là cách nhanh nhất có thể, cách 1 thì lại cho ta thêm một đường phân giác ngoài. Riêng cách 3 chỉ nên làm khi "**tỉ số chân đường phân giác**" là số đẹp.*

BÀI TOÁN6 (HÌNH THOI).*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD biết phương trình đường thẳng chứa cạnh AB và đường chéo BD lần lượt là $x+3y+1=0,\ x-y+5=0$. Đường thẳng chứa cạnh AD qua điểm $M(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng AC và tìm tọa độ điểm I là giao điểm của hai đường chéo hình thoi ABCD?*

■ **Đặt vấn đề:***ở chủ đề 1, chúng ta đã có dịp làm quen với bài toán có hình thoi. Trong bài toán này, ngoài việc các điểm đối xứng nhau qua tâm đối xứng I, các điểm trên cạnh của hình thoi cũng đối xứng qua các đường chéo vì bản chất chúng chính là những đường phân giác. Mời các em xem lời giải.*

■ **CÁCH 1 :Tìm tọa độ điểm I sau đó viết phương trình AC.**

☺ **Ý tưởng :**

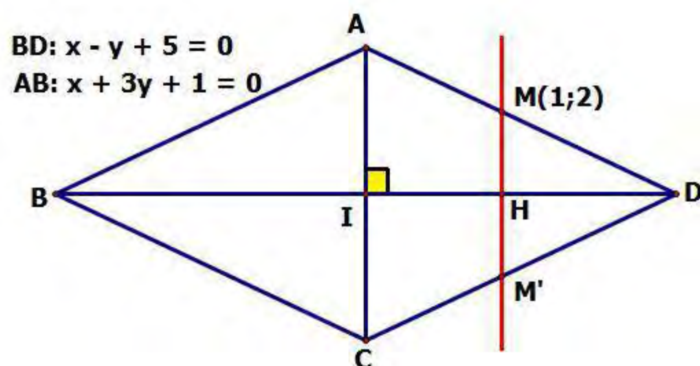
_ Do BD phân giác của góc B và D nên theo tính đối xứng của phân giác ta dễ dàng tìm được điểm M' $\in$ CD.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Do tính chất hình thoi, AB // CD $\rightarrow$ viết được pt CD.

_ $D = CD \cap BD$ và $B = BD \cap AB \Rightarrow$ tìm được I

_ Ta có AC // MH và AC qua I $\Rightarrow$ viết pt AC.



► Hướng dẫn giải cách 1:

* Ta có B = AB ∩ BD ⇒ tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-4;1)}$$

* Gọi H là hình chiếu của M lên BD và M' là điểm đối xứng của M qua BD (M'∈CD và H là trung điểm MM'). Ta có MH ⊥ BD ⇒ MH: x + y + m = 0, MH qua M(1; 2) ⇒ m = – 3.

Vậy phương trình đường **MH : x + y – 3 = 0**.

* H = MH ∩ BD ⇒ H(–1 ; 4). Lại có H là trung điểm MM' ⇒**M'(–3 ;6)**∈ CD.

* CD // AB ⇒ CD: x + 3y + n = 0. CD qua M'(–3; 6) ⇒ n = –15.

Vậy CD: x + 3y – 15 = 0.

Mặt khác D = BD ∩ CD ⇒**D(0 ;5)**. Gọi I = AC ∩ BD ⇒ I là trung điểm BD ⇒ $\boxed{\textbf{I(–2;3)}}$

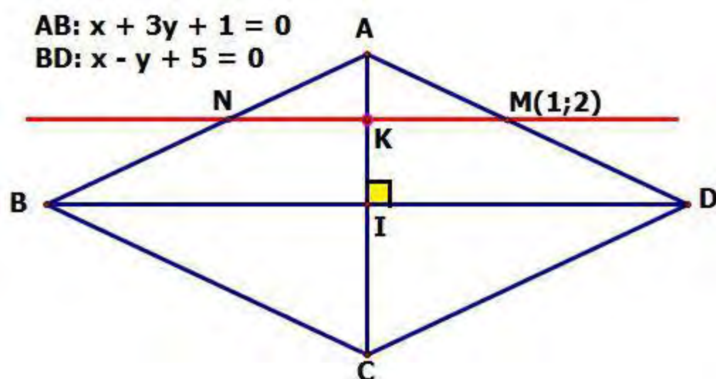
* AC // BD ⇒ AC: x + y + p = 0. AC qua I(–2; 3) ⇒ p = –1.

Vậy phương trình đường $\boxed{\textbf{AC : x + y – 1 = 0}}$.

Vậy phương trình đường thẳng và điểm cần tìm là:

$\boxed{\textit{AC : x + y – 1 = 0 và I(–2; 3).}}$

■ CÁCH 2 :Viết phương trình AC → tìm tọa độ I.



theo cách 1: **☺Ý tưởng:** *góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa*

_ Tương tự ta cũng có thể xuất từ đường chéo AC nhưng lần này sẽ kẻ MN // BD cắt AC tại K (N ∈ AB). Do AC là phân giác của góc A nên theo tính đối xứng ta dễ dàng tìm được điểm N ⇒ tọa độ điểm K.

_ Khi đó AC ⊥ BD và qua điểm K.

_ Khi đã có pt AC thì I = AC ∩ BD.

_ Bạn không cần phải giao AB và BD lại để tìm B.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Kẻ MN // BD (N ∈AB) cắt AC tại K⇒ MN ⊥AC và K là trung điểm MN (do tính đối xứng qua phân giác AC của hình thoi ABCD).

* MN // BD ⇒ MN: x – y + m = 0 (m ≠ 5). MN qua M(1 ; 2) ⇒ m = 1.
Vậy phương trình đường **MN : x – y + 1 = 0**.

* Ta có N = AB ∩ MN ⇒ Tọa độ N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N(-1;0)}$$

Lại có K là trung điểm MN ⇒ K(0;1)

* AC ⊥ BD ⇒ AC: x + y + n = 0. AC qua K(0; 1) ⇒ n = –1.
Vậy pt đường **AC : x + y – 1 = 0**.

* I = AC ∩ BD ⇒ tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(-2;3)}.$$

Vậy phương trình đường thẳng và điểm cần tìm là
AC : x + y – 1 = 0 và I(–2; 3).

■ **Lời bình**:*Như vậy chúng ta vừa khai thác thêm được thêm các yếu tố của hình thoi đặc biệt là hai đường chéo. Bài toán này bạn cũng thể giả sử một điểm bất kì thuộc AB và tìm điểm đối xứng của nó qua BD để viết phương trình BC. Hoặc cũng có thể dựa vào BD là đường phân giác nên gọi BC có véctơ pháp tuyến* $\vec{n}=(k;-1)$ *với k là hệ số góc để áp dụng "kỹ thuật dùng góc giữa (AB;BD) = góc giữa (BD; BC)".*

BÀI TOÁN 7 (HÌNH CHỮ NHẬT). ***Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD và phương trình đường tròn đường kính AB là (C):*** $(x-1)^2+(y+1)^2=4$***. Viết phương trình đường thẳng AC biết trung điểm của CD nằm trên đường thẳng*** $d: x+y+2=0$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

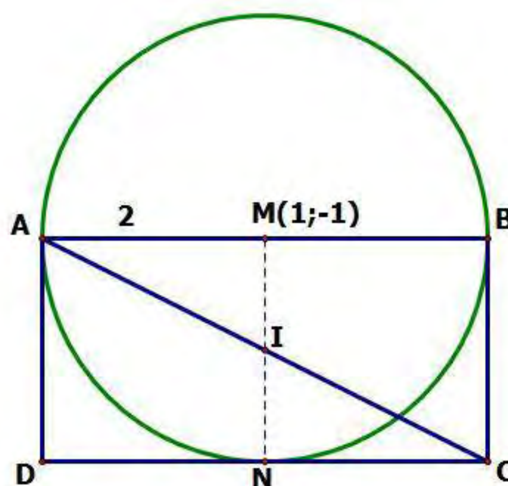
■ **Đặt vấn đề:***Có thể nói bài toán này đặc trưng mạnh nhất của nó có lẽ là "**quan sát**". Hình học xuất thân có nguồn gốc từ các đo đạc, tính toán mà trải dài xuyên suốt quá trình ấy là cả một sự "quan sát" không ngừng nghỉ. Nếu các*

*bạn chú ý một số đặc điểm ấy thì sẽ dễ dàng phát hiện ra đâu là "**mấu chốt**" của vấn đề.*

■ **CÁCH 1: (Đi tìm "cây gậy" VTPT)**

Gọi N là trung điểm CD (N ∈ d) và gọi I = AC ∩ BD

☺ **Ý tưởng :**



_ Cùng nhận xét đường tròn (C) đã đi qua điểm N nên ta có N = (C) ∩ d.

_ Do tính đối xứng của I nên ta có I là trung điểm MN ⇒ tọa độ I

→ Từ đây ta cũng viết được phương trình MN.

_ Đến đây do nhận thấy **dấu hiệu"quan hệ giữa các cạnh của HCN"**→ ta sử dụng kỹ thuật dùng góc tính cosNIC = $\frac{CN}{IN}$

_ Từ đây ta có cosNIC = |cos(AC;IN)|. Trong đó đường AC có dạng :

$$a(x - x_I) + b(y - y_I) = 0 \ (a^2 + b^2 > 0)$$

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm M(1; –1) và bán kính R = 2. Ta có AMND là hình vuông nên N thuộc đường tròn (C). Lại có N ∈ d nên tọa độ N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=4\\ x+y+2=0\end{cases} \text{ suy ra } \left[\begin{array}{l}N_1(-1;-1)\\ N_2(1;-3)\end{array}\right.$$

* Ta suy ra $\left[\begin{array}{l}I_1(0;-1)\\ I_2(1;-2)\end{array}\right.$. Xét tan NIC = $\frac{CN}{IN}$ = 2

$$\Rightarrow \cos NIC = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 NIC}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

* **TH1:** I_1N_1 có VTCP là $\overrightarrow{I_1N_1} = (1;0)$

$\Rightarrow$ VTCP $\overrightarrow{n_1} = (0;1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (a;b), (a^2+b^2 \neq 0)$ là VTPT của AC

Ta có cos NIC = $|\cos(I_1N_1 ; AC)|$ = $\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(nhận xét b ≠ 0) nên ta chọn b = 1

Suy ra $a^2 + 1 = 5 \Rightarrow a = \pm 2$. Đường AC qua $I_1(0;-1)$ có dạng là:

$$\left[\begin{array}{l}2x+y+1=0\\ 2x-y-1=0\end{array}\right.$$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* **TH2:** I_2N_2 có VTCP là $\overrightarrow{I_1N_1} = (0;-1)$

$\Rightarrow$ VTCP $\overrightarrow{n_3} = (1;0)$ và $\overrightarrow{n_4} = (m;n), (m^2 + n^2 \neq 0)$ là VTPT AC

Ta có cos NIC = |cos(I_2N_2 ; AC)| = $\dfrac{|\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_4}|}{|\overrightarrow{n_3}|.|\overrightarrow{n_4}|} = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(nhận xét $a \neq 0$) nên ta chọn a = 1

Suy ra $b^2 + 1 = 5 \Rightarrow b = \pm 2$. Đường AC qua $I_2(1; -2)$ có dạng là:

$$\left[\begin{array}{l} x + 2y + 3 = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là AC: $\left[\begin{array}{l} x + 2y + 3 = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{array}\right.$

■ **CÁCH 2: (sử dụng nắm đấm kép – tìm thêm một điểm)**

☺ **Ý tưởng :**

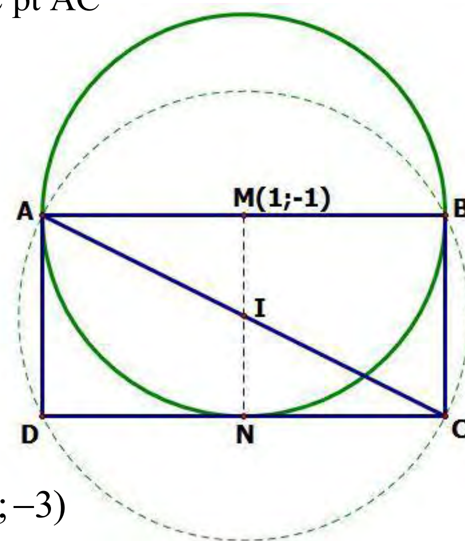
_ Cùng nhận xét đường tròn (C) đã đi qua điểm N nên ta có N = (C) ∩ d.

_ Do tính đối xứng của I nên ta có I là trung điểm MN ⇒ tọa độ I

→Dễ dàng tính được $AI = \sqrt{IM^2 + AM^2}$ ⇒ Lập pt **đường tròn ẩn mình**(C_1) có tâm I cắt đường tròn (C) tại A và B.

_ Tìm được tọa độ A và B →Dễ dàng viết được pt AC

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Tương tự như cách 1 ta có

$$\left[\begin{array}{l} N_1(-1;-1),\ I_1(0;-1) \\ N_2(1;-3),\ I_2(1;-2) \end{array}\right.$$

* **TH1:** Lại có A, B là giao điểm giữa (C) và (C_1) trong đó (C_1) là đường tròntâm I_1, bán kính $AI = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{5}$. Do đó tọa độ A và B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ x^2 + (y+1)^2 = 5 \end{cases} \text{suy ra} \left[\begin{array}{l} A_1(1;1), B_1(1;-3) \\ A_2(1;-3), B_2(1;1) \end{array}\right.$$

Đường AC qua $I_1(0; -1)$ có dạng là: $\left[\begin{array}{l} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{array}\right.$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

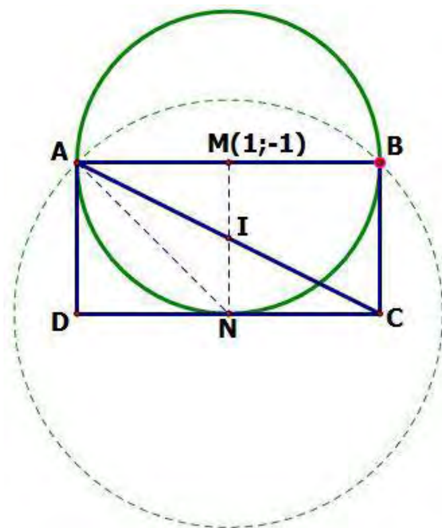
* **TH1:** Lại có A, B là giao điểm giữa (C) và (C_1) trong đó (C_1) là đường tròn tâm I_2, bán kính bằng $\sqrt{5}$. Do đó tọa độ A và B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=4\\(x-1)^2+(y+2)^2=5\end{cases} \text{suy ra} \left[\begin{array}{l}A_3(-1;-1), B_3(3;-1)\\A_4(3;-1), B_4(-1;-1)\end{array}\right.$$

Đường AC qua $I_2(1;-2)$ có dạng là: $\boxed{\left[\begin{array}{l}x+2y+3=0\\x-2y-5=0\end{array}\right.}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\boxed{AC: \left[\begin{array}{l}x+2y+3=0\\x-2y-5=0\\2x+y+1=0\\2x-y-1=0\end{array}\right.}$$



■ **Lời bình**:*Rõ ràng, là việc giải bài toán này không quá phức tạp như ta nghĩ, nhưng cái cách mà chúng ta đặt vấn đề hết sức quan trọng. Ngoài cách 2 ra chúng ta còn có thể "**lập phương trình đường tròn ẩn mình**" khác đó chính là đường tròn tâm N bán kính AN. Việc giải cũng tương tự như cách 2. Ngoài ra cũng cần nhấn mạnh về **dấu hiệu nhận biết**khi đề bài cho quan hệ giữa các cạnh hình chữ nhật ta sẽ khai thác như thế nào cho hợp lý.*

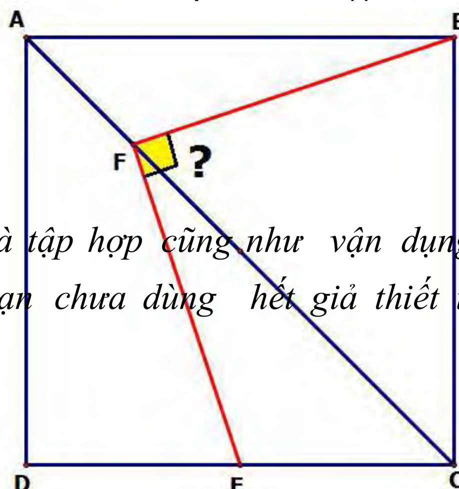
BÀI TOÁN 8 (HÌNH VUÔNG). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm $E(1;2)$ là trung điểm của cạnh CD. Gọi F là một điểm trên đoạn AC sao cho CF = 3AF. Biết phương trình đường thẳng chứa cạnh BF là $x-3y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.***

■ **Đặt vấn đề:***Tương tự như ở chủ đề 1 đề cập, việc một số bài toán trước khi tọa độ hóa thành công, ta thường phải kẻ thêm **"một số đường phụ"**nhằm mục đích **chứng minh** thêm một số tính chất hình học chưa sẵn có trong bài nhưng lại là "**mấu chốt**" giúp ta giải được và nhanh bài toán. Mời các bạn xem lời giải.*

☺ **Ý tưởng :**

_ Nhận xét quan trọng nhất trong bài này là khi vẽ hình xong ta phát hiện **BF ⊥ EF**→ dĩ nhiên nếu chứng minh được BF ⊥ EF ta sẽ đưa bài toán của mình theo một hướng khác có lợi hơn.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa



_ Vấn đề đặt ra là có những cách nào có thể có để chứng minh EF ⊥ BF. Ở đây ta có thể vận dụng một số kỹ thuật chứng minh sau:

● Chứng minh bằng **định lý đảo của Pi–ta–go**.

● Chứng minh điểm thuộc đường tròn (sử dụng **tứ giác nội tiếp**).

● Chứng minh bằng **cách dùng véctơ**.

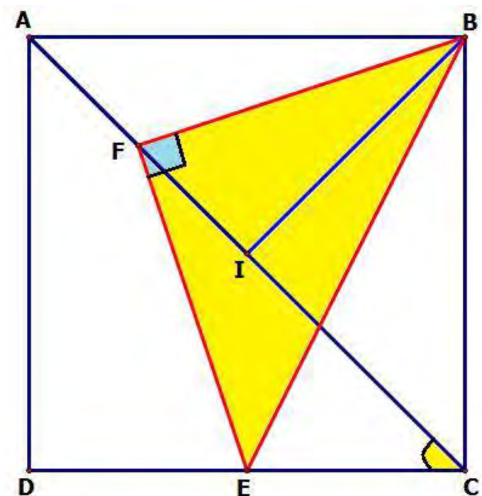
● Chứng minh bằng **cách kẻ đường phụ, đổi từ việc chứng minh vuông góc → song song**, v,v...

● Chứng minh các Δ bằng nhau, đồng dạng → cộng góc = 90°, v,v... (và nhiều cách khác nữa).

Trong bài toán này, thầy sẽ trình bày một số cách chứng minh tiêu biểu trên. Mời các bạn cùng theo dõi.

■ **CÁCH 1:** Chứng minh bằng **định lý đảo của Pi–ta–go.**

☺ **Ý tưởng:** ta sẽ chứng minh ΔBEF ⊥ F ⇒ BF ⊥ EF, để áp dụng định lý đảo của Pi–ta–go, ta sẽ tính độ dài các cạnh theo một cạnh cho trước. Ở đây vận dụng tính chất hình vuông, ta có thể đặt AB = a > 0 để tính toán các cạnh theo cạnh a đó.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đặt AB = a > 0 là độ dài cạnh hình vuông ABCD. Ta có

$$EC = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}, CF = \frac{3AC}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

* Xét ΔEFC có định lý hàm số cosin là:

$$\cos FCE = \frac{CF^2 + EC^2 - EF^2}{2FC.EC} \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{10}}{4} \text{(1)}$$

* Mặt khác ΔBIF ⊥ I có $BF = \sqrt{BI^2 + IF^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ (2)

* Mặt khác ΔBEC ⊥ C có $BE = \sqrt{BC^2 + EC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (3)

* Từ (1), (2), (3) suy ra $BE^2 = EF^2 + BF^2$ ⇒ΔBEF vuông cân tại F ⇒ **BF ⊥ EF**

■ **CÁCH 2:** Chứng minh bằng **cách dùng véctơ**

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

☺ **Ý tưởng:** để chứng minh BF ⊥ EF ⇔ ta cần chứng minh $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}=0$. Để làm được điều đó, ta sẽ vận dụng một số kiến thức cơ bản của véctơ như "**quy tắc chèn điểm** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IN}$", tích vô hướng giữa hai véctơ

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=|MN|.|MP|.\cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}).$$

Cụ thể trong bài này ta sẽ chèn điểm C vào trong 2 véctơ vì xét thấy góc C bằng 90°.(Bạn cũng có thể thử chèn tại những điểm khác mà có góc vuông)

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta xét: $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}).(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CB}$

* Trong đó
$$\begin{cases}\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{FC}=EC.FC.\cos FCE=\dfrac{CD}{2}.\dfrac{3CD\sqrt{2}}{4}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3CD^2}{8}\\ \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CB}=CF.CB.\cos FCB=CD.\dfrac{3CD\sqrt{2}}{4}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3CD^2}{4}\\ \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CB}=0 \text{ do } EC\perp CB\\ \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{FC}=-\overrightarrow{CF}^2=-\dfrac{9CD^2}{8}\end{cases}$$

* Do đó:
$$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CB}=\frac{3CD^2}{8}+0-\frac{9CD^2}{8}+\frac{3a^2}{4}=0$$

⇒ $\boxed{\mathbf{EF\perp FB}}$

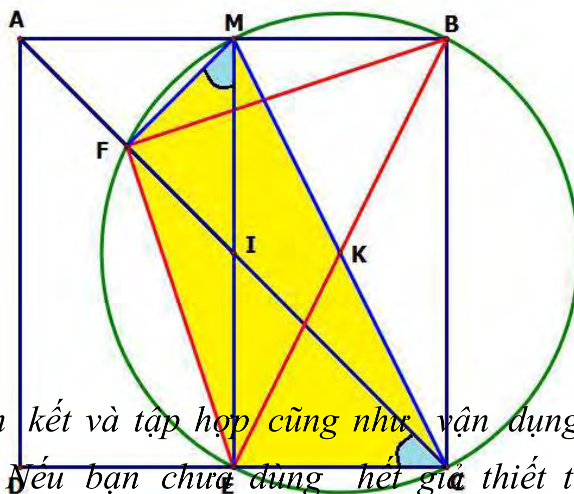
■ **CÁCH 3:** Chứng minh điểm thuộc đường tròn (sử dụng **tứ giác nội tiếp**).

☺ **Ý tưởng :**

_ *Để chứng minh BF ⊥ BE ta chứng minh góc BFE nhìn BE làm đường kính. Xét thấy góc BCE cũng nhìn BE theo một đường kính. Nếu gọi M là trung điểm AB thì ta cũng có BME nhìn BE theo một đường kính → chứng minh B, M, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.*

_ *Như vậy ta cần chứng minh FMCE là "tứ giác nội tiếp". Để chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp ta có những cách quen thuộc như:*

- *C/m 2 góc liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh bằng nhau.*
- *C/m góc ngoài bằng góc đối trong.*
- *C/m tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°, v,v...*



theo cách 4 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ *Ở đây ta phát hiện góc* $\widehat{FME} = \widehat{FCE} = 45^o \rightarrow$ *dễ dàng chứng minh được tứ giác FMCE là tứ giác nội tiếp* $\Rightarrow$ *góc FBE nhìn BE làm đường kính* $\Rightarrow BF \perp EF$.

► **Hướng dẫn giải cách 3:** Gọi I là tâm hình vuông ABCD và M là trung điểm AB.

* Ta có MBCE là hình chữ nhật nên MBCE là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm K bán kính BE**(1).**

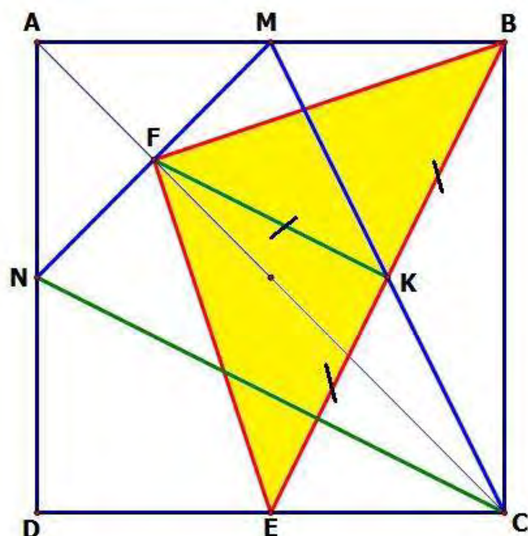
Lại có CF = 3AF ⇒ FI = AF ⇒ F là trung điểm AI mà ΔAMI vuông cân tại M ⇒góc FME = 45°

Mặt khác lại có: góc FCE = 45° và góc FCE , góc FME cùng chắn EF ⇒ MFEC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC tâm K **(2)**.

* Từ (1) và (2) ⇒ F, M, B, C, E cùng thuộc đường tròn tâm K, bán kính EB (do EB = MC) và do góc EFB nhìn đường kính AB ⇒ $\widehat{BFE} = 90^o \Rightarrow$ **BF ⊥ FE**.

■ **CÁCH 4:** Chứng minh bằng **cách kẻ đường phụ.**

☺ **Ý tưởng :**



_ *Để chứng minh ΔFBE ⊥ F ta có thể chứng minh* $FK = \frac{BE}{2}$ ***(đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)***

_ *Nếu gọi M, N, K lần lượt là trung điểm AB, AD, BE thì ta dễ dàng chứng minh được FK là đường trung bình của ΔMNC* $\Rightarrow$ *FK // NC và* $FK = \frac{NC}{2}$ *(mà NC = BE)* $\Rightarrow FK = \frac{BE}{2}$.

_ *Chú ý: NC ⊥ BE là một trong những kết quả mà ta vẫn thường hay sử dụng trong hình vuông. Việc chứng minh này xin dành cho bạn đọc !*

► **Hướng dẫn giải cách 4:**Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, AD, BE.

* Dễ dàng chứng minh được F là trung điểm MN và do K là trung điểm BE

Suy ra FK là đường trung bình của ΔMNC ⇒ FK // NC và $FK = \frac{NC}{2}$.

* Do ΔEBC = ΔNCD (c–g–c) ⇒ NC = BE ⇒ $FK = \frac{BE}{2}$

⇒ΔFBE ⊥ F ⇒ **BF ⊥ FE**

theo cách F góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

■ **CÁCH 5:** Chứng minh bằng cách **dựng hệ trục tọa độ mới.**

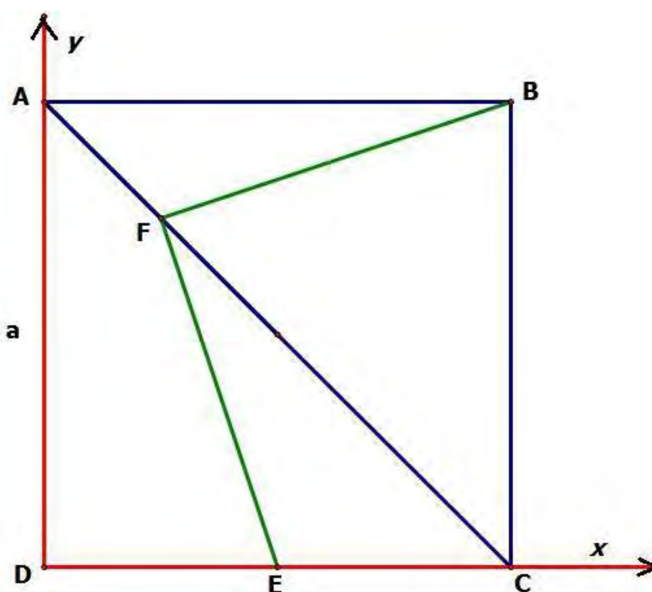
☺ **Ý tưởng :**

_ Chúng ta sẽ tạm quên hết các dữ kiện về phương trình đang có được trong mặt phẳng Oxy, chỉ giữ lại các yếu tố về hình phẳng.

_ Dựng hệ trục tọa độ mới Dxy như hình vẽ, đặt cạnh hình vuông bằng a (a > 0). Tọa độ hóa các điểm đã cho và xét $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}$.

_ Khi đó ta có

$$E=\left(\frac{a}{2};0\right), B(a;a), F\left(\frac{a}{4};\frac{3a}{4}\right)$$



_ Nên ta có: $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{-a}{4};\frac{3a}{4}\right), \overrightarrow{FB}=\left(\frac{3a}{4};\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}=0 \Rightarrow EF \perp BE$

Trên đây là một số cách chứng minh điển hình khi muốn chứng minh vuông góc. ***Trở lại bài toán, sau khi chứng minh được BF ⊥ FE thì ta sẽ tận dụng điều này như thế nào để viết phương trình AB****?*

☺ **Ý TƯỞNG VIẾT PHƯƠNG TRÌNH AB?**

● **Ý TƯỞNG 1 (ứng với cách 1):** Chúng ta lập được ngay **phương trình FE** do FE⊥ BF và qua E → FE ∩ BF = F. Nếu gọi M là trung điểm AB thì ta có AB qua M và AB ⊥ ME → tìm M? → MF và ME bằng độ dài cụ thể vì theo cách 1 ta đã tính được các cạnh của hình vuông theo độ dài a. Mời các em xem lời giải:

* Do EF ⊥ BF: x – 3y – 5 = 0 ⇒ EF: 3x + y + m = 0. EF qua E(1;2) ⇒ m = – 5. Vậy EF: 3x + y – 5 = 0. Ta có tọa độ F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-3y-5=0 \\ 3x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(2;-1)}$$

* Ta có độ dài EF $=\frac{a\sqrt{10}}{4}=\sqrt{10} \Rightarrow$ a = 4. Gọi M(x ; y) là trung điểm AB ta có:

$$\begin{cases} MF=\frac{AC}{4}=\sqrt{2} \\ ME=BC=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=16 \\ (x-2)^2+(y+1)^2=2 \end{cases}$$ *(xin dành cho bạn đọc)*

Suy ra $M_1(1;2)$ hay $M_2\left(\frac{17}{5};\frac{-6}{5}\right)$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất

* TH1: AB qua $M_1(1;2)$ nhận $\overrightarrow{M_1E}=(0;4)$ làm VTPT có phương trình: y + 2 = 0

cả những giả thiết do được từ đề bài. Nếu là bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* TH2: AB qua $M_2\left(\frac{17}{5};\frac{-6}{5}\right)$ nhận $\overrightarrow{M_1E}=\left(\frac{-12}{5};\frac{16}{5}\right)$ làm VTPT có phương trình: **3x – 4y + 15 = 0**.

Vậy phương trình đường thẳnglà AB : y + 2 = 0 hay AB: 3x – 4y + 15 = 0

- **Ý TƯỞNG 2 (ứng với cách 3 và 4):** Lập được phương trình FE và tìm được tọa độ F như cách 1 → độ dài EF, và nhận xét ΔEFB vuông cân tại F nên ta lập phương trình đường tròn (C) tâm F bán kính EF. Cho (C) ∩ BF ⇒ tọa độ điểm B. Đến đây ta có thể viết phương trình AB qua B và có dạng $a(x - x_B) + b(y - y_B) = 0$ hoặc $y = k(x - x_B) + y_B$. Khả dĩ nhất ở đây là sử dụng góc hoặc khoảng cách để đi tiếp hay cũng có thể:

  Gọi G = IC ∩ EK ⇒ G là trọng tâm ΔMEC ⇒ GE = $\frac{2EK}{3}=\frac{EB}{3}$ (Do đã có tọa độ B ⇒ tọa độ G dễ dàng)

  Ta có $IF=\frac{IA}{2}$ và $IG=\frac{2IF}{3}$ ⇒ tọa độ I. (Có I ta dễ dàng viết được pt AB qua B ⊥ IE)

  (phần này xin dành cho bạn đọc).

- ■ **Lời bình**: *Bài toán này chủ yếu muốn nói kỹ về* ***vấn đề chứng minh vuông góc****. Bạn thấy đấy mỗi một cách đều có thế mạnh riêng của chúng. Tùy vào từng tình huống cụ thể mà ta lựa chọn cách tiếp cận phù hợp. Tất nhiên sẽ còn nhiều lời giải khác nữa (bạn đọc có thể tìm hiểu thêm). Qua bài toán trên ta thấy được việc viết phương trình một đường đôi khi không đơn giản là việc đi tìm "nắm đấm" (điểm) và "cây gậy" (VTPT–VTCP) mà trước đó ta còn phải trải qua một quá trình* ***"chứng minh một kết quả quan trọng khác****" mà do một quá trình quan sát, thực nghiệm vẽ hình kết luận được. Cũng phải nói luôn với cách chứng minh vuông góc thứ 2, khi sử dụng véctơ để chuyển tích vô hướng bằng 0, tuy lời giải đẹp nhưng lại không giúp ta khai thác tiếp được các yếu tố còn lại như nhận xét ΔBEF vuông cân, hay độ dài các cạnh của hình vuông. Việc này gây trở ngại cho ta ở phần sau đó rất nhiều khi viết phương trình AB.*

BÀI TOÁN 9 (VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA CÁC ĐƯỜNG TRÒN).*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1), (C_2) có phương trình*

$$(C_1): x^2+y^2-2x+2y-2=0,\ \ (C_2): x^2+y^2+4x-6=0$$

Biết rằng điểm M(1;1) là điểmchung của (C_1) và (C_2). Viết phương trình đường thẳng d qua M cắt (C_1) và (C_2) lần lượt tại A_1 và A_2(A_1khác A_2) sao cho M là trung điểm của A_1A_2.

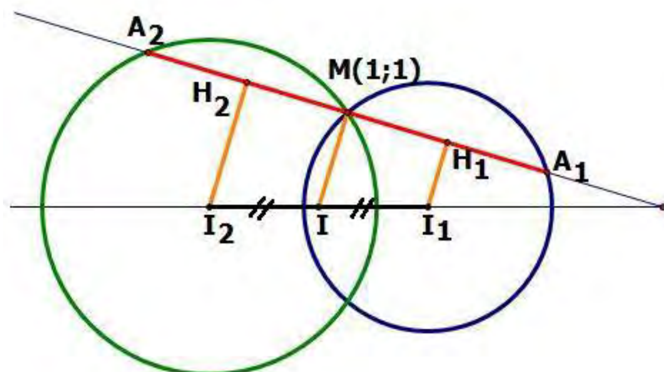
theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

■ **Đặt vấn đề:** *khi xét đến các bài toán về đường tròn thì một trong những chủ đề thường được quan tâm đó là "bài toán về vị trí tương đối giữa điểm, đường*

thẳng, đường tròn so với đường tròn. Trong phần lý thuyết chương dù đã có đề cập đến một số kiên thức cơ bản, tuy vậy trong quá trình giải các bạn cần lưu ý những gì? Mời các bạn xem lời giải.

■ **CÁCH 1: Sử dụng phương pháp Thales**

☺ **Ý tưởng:**



_ Đầu tiên tìm được tâm và bán kính của hai đường tròn, từ đó tính $R_1 + R_2$, $|R_1 - R_2|$ và I_1I_2 để kết luận vị trí tương đối giữa 2 đường tròn.

_ Sau đó, lần lượt gọi H_1, H_2 là hình chiếu của I_1, I_2 lên đường d $\Rightarrow I_1H_1 // I_2H_2$ và do M là trung điểm A_1A_2 nên M cũng là trung điểm H_1H_2.

_ Đến đây ta thấy để lập phương trình d qua M thì hoặc cần tìm 1 điểm nữa (“**nắm đấm kép**”) hoặc cần tìm một vtpt (**“cây gậy”**) → nếu gọi I là trung điểm I_1I_2 theo định lý đảo của Thales ta sẽ có: $I_1H_1 // I_2H_2 // MI \Rightarrow MI \perp d$ ⇒ta tìm được vtpt.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C_1) có $\begin{cases} I_1(1;-1) \\ R_1 = \sqrt{1+1+2} = 2 \end{cases}$ và (C_2) có $\begin{cases} I_2(-2;0) \\ R_2 = \sqrt{4+6} = \sqrt{10} \end{cases}$

Nên ta có: $\begin{cases} R_1 + R_2 = 2 + \sqrt{10} \\ |R_1 - R_2| = \sqrt{10} - 2 \text{ suy ra } |R_1 - R_2| \le I_1I_2 \le R_1R_2 \\ I_1I_2 = \sqrt{10} \end{cases}$

Suy ra (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm trong đó đã có một điểm chung M(1 ; 1).

* Gọi H_1, H_2, I lần lượt là trung điểm của MA_1, MA_2, I_1I_2.

Vì H_1, H_2 là trung điểm của hai dây cung MA_1, $MA_2 \Rightarrow I_1H_1 \perp MA_1$, $I_2H_2 \perp MA_2$ (***định lý đường kính và dây cung***)$\Rightarrow I_1H_1 // I_2H_2$.

Do M là trung điểm A_1A_2, I là trung điểm I_1I_2

$\Rightarrow$ MI là đường trung bình của hình thang $I_1I_2H_1H_2 \Rightarrow MI // I_1H_1 // I_2H_2 \Rightarrow MI \perp d$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* Ta có I là trung điểm $I_1I_2 \Rightarrow I\left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$

Đường thẳng d qua M(1; 1) nhận $\overrightarrow{IM} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$\frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là **d: x + y – 2 = 0**

■ **CÁCH 2: Sử dụng phương pháp gọi điểm.**

☺ **Ý tưởng:** Xét về bản chất, cách này mục đích là đi tìm điểm A_1, A_2 nhưng xét thấy không thể tìm trực tiếp được, nên ta thử đặt tọa độ cho A_1, A_2→ rồi lần lượt thay vào phương trình của hai đường tròn (C_1), (C_2) → mục đích là để tìm tập hợp điểm quỹ tích chứa điểm A_1 và A_2→ dự đoán ở đây chính là đường thẳng d cần tìm. Mời các em xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm (***xem cách 1***).

* Gọi $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$. Do M là trung điểm A_1A_2

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_M = 2 \\ y_1 + y_2 = 2y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 \\ y_2 = 2 - y_1 \end{cases}$$

* Ta có: $\begin{cases} A_1 \in (C_1) \\ A_2 \in (C_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 2y_1 - 2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + 4x_2 - 6 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 2y_1 - 2 = 0 \\ (2-x_1)^2 + (2-y_1)^2 + 4(2-x_1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 2y_1 - 2 = 0 \ (1) \\ x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 - 4y_1 + 10 = 0 \ (2) \end{cases}.$$

* Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2) ta được: $x_1 + y_1 - 2 = 0$ (*)

* Đặt d: x + y – 2 = 0. Ta có: $\begin{cases} A_1 \in d \ (do(*)) \\ M \in d \end{cases}$

⇒ d: x + y – 2 = 0 là phương trình đường thẳng cần tìm

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là **d: x + y – 2 = 0**

■ **CÁCH 3 :Sử dụng phương pháp khoảng cách.**

☺ **Ý tưởng :**khác cách 2, nhưng cùng tư tưởng với cách 1, thay vì tìm được trực tiếp vtpt của d thì ta sẽ thử gọi $\vec{n} = (a; b)$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$ → viết dạng pt tổng quát của d. Ở đây do biết được độ dài bán kính của mỗi đường tròn và mối liên hệ giữa hai dây cung của đường tròn → chuyển bài toán về khoảng cách.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm (***xem cách 1***).

* Gọi $\vec{n} = (a;b),\ (a^2 + b^2 \neq 0)$ là véctơ pháp tuyến (vtpt) của đường thẳng d. Đường thẳng d qua M(1;1) có dạng tổng quát là: a(x – 1) + b(y – 1) = 0

$\Rightarrow$ **d: ax + by – a – b = 0**

* Theo định lý Pi–ta–go ta có: $\begin{cases} R_1^2 = [d(I_1;d)]^2 + \dfrac{MA_1^2}{4} \\ R_2^2 = [d(I_2;d)]^2 + \dfrac{MA_2^2}{4} \end{cases}$ mà $MA_1 = MA_2$

Suy ra $R_1^2 - [d(I_1;d)]^2 = R_2^2 - [d(I_2;d)]^2 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{(-2b)^2}{a^2+b^2} = 10 - \dfrac{(-3a-b)^2}{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (3a+b)^2 - 4b^2 - 6(a^2+b^2) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 6ab - 9b^2 = 0\ (*)$

Nhận xét b = 0 $\xrightarrow{(*)}$ a = 0 (loại vì $a^2 + b^2 \neq 0$) nên với b ≠ 0, ta chọn b = 1

Do đó (*) $\Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow$ **a = 1 hay a = – 3.**

* TH1: với a = 1, b = 1 $\Rightarrow d_1$: x + y – 2 = 0.

TH2: với a = –3, b = 1 $\Rightarrow d_2$: 3x – y – 2 = 0 (loại do ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = (-3;1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{n_{I_1I_2}} = (1;3)$ nên $\overrightarrow{n_{I_1I_2}}.\vec{n} = 0$, Khi đó đường thẳng d trở thành đường thẳng chưa dây cung chung của (C_1), (C_2))

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là d: x + y – 2 = 0

■ **CÁCH 4 :Sử dụng phép biến hình (phép đối xứng tâm).**

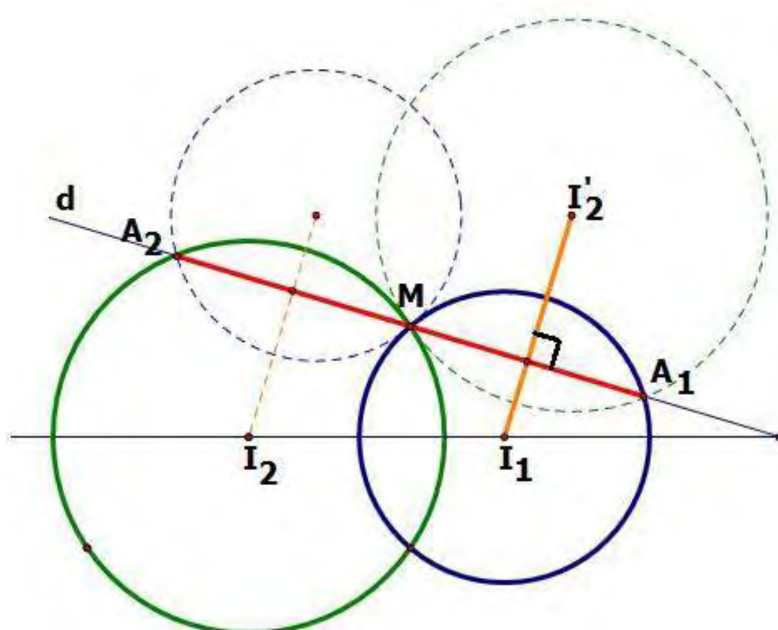
☺ **Ý tưởng :**

_ Do M là trung điểm A_1A_2 nên theo phép đối xứng tâm M ta có thể tâm I_2 thành I_2’, biến điểm A_2 thành điểm $A_1 \Rightarrow A_1 \in (C_2)$’. (phép đối xứng tâm là phép biến hình bảo toàn khoảng cách (đẳng cự)).

_ Khi đó (C_1) và (C_2)’ có hai điểm chung tạo thành dây cung MA_1. Theo tính chất của dây cung chung của 2 đường tròn thì ta có được $I_1I_2' \perp MA_1$

_ Đến đây đường thẳng d qua M và nhận I_1I_2’ làm vtpt. Mời các em xem lời giải.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa



► Hướng dẫn giải cách 4:

* Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm (***xem cách 1***).

* Xét phép đối xứng tâm M(1;1): $Đ_M$ biến điểm $I_2(-2; 0)$ thành điểm $I_2'(4;2)$, biến đường tròn (C_2) thành đường tròn (C_2') và biến điểm $A_2 \in (C_2)$ thành điểm $A_1 \in (C_2')$.

* Khi đó (C_1) và (C_2') có dây cung MA_1 chung $\Rightarrow I_1I_2' \perp MA_1$

* Đường thẳng d qua M(1; 1) nhận $\overrightarrow{I_1I_2'} = (3;3)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$3(x-1)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{d: x+y-2=0}$

■ **Lời bình**:

Với cách làm trên, chúng ta xét thấy ở cách 1, là một cách hay nhưng đòi hỏi cách bạn phải biết cách vận dụng nhuần nhuyễn định lý Thales.

Ở cách 2, thật ra chúng ta cũng có thể giải tiếp để tìm tọa độ A_1 và A_2 rồi sau đó viết phương trình đường thẳng d nhưng lại làm bài toán dài thêm.

Ở cách 3, tuy khá hay nhưng nhược điểm lớn nhất là không lường trước được sai lầm khi nhận hết các trường hợp (Khâu kiểm tra lại kết quả cực kì quan trọng phải không các bạn?).

Ở cách 4,tuy cực kì sáng tạo nhưng sẽ không ít bạn nghĩ đến cách làm này, để vận dụng một cách tối ưu nhất các bạn nên xem lại lý thuyết của phần này ở chương 1.

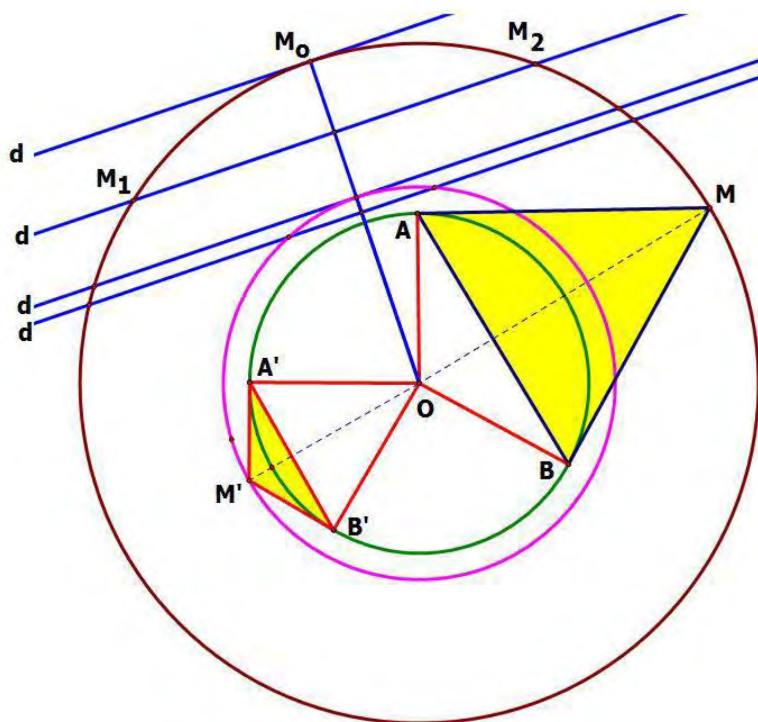
Cũng cần lưu ý về cách xét vị trí tương đôi giữa 2 đường tròn (xem lại phần lý thuyết chương 1 các bạn nhé). **Có một câu hỏi đặt ra là nếu đường thẳng d qua M và cắt hai đường trònlần lượt tại A và B sao cho MA = kMB (k > 0) thì khi đó cách làm nào là tốt nhất**? khi đó cách 1 sẽ là cách làm tốt nhất.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

BÀI TOÁN 10 (VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Tìm các giá trị của m trên đường thẳng d: y = m tồn tại đúng hai điểm phân biệt M_1, M_2 mà từ mỗi điểm đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^o.***

■ **Đặt vấn đề:** Bản chất của tiếp tuyến thật ra cũng chỉ là một đường thẳng nhưng có kèm theo điều kiện tiếp xúc (khoảng cách từ tâm đến đường thẳng bằng bán kính), vì vậy để thiết lập phương trình tiếp tuyến ta cũng vẫn phải bắt đầu từ việc thiết lập phương trình đường thẳng với đầy đủ các yếu tố đã học (đó chính là "nắm đấm và cây gậy", hay "nắm đấm kép" hay đường thẳng có hệ số góc k, v,v…) Trong bài toán định m này, thì với mỗi giá trị m tìm được ta xác định một đường thẳng tương ứng. Mấu chốt của bài toán này nằm ở đâu? Và liệu có thể tổng quát bài toán này lên với góc α bất kì được không? Mời bạn đọc cùng theo dõi lời giải.

☺ **Ý tưởng :**



_ Trước khi bước vào phân tích tìm lời giải cho bài toán trên, phải nói rằng nếu ta không **"dịch"** cho bằng được thứ **ngôn ngữ "chữ" của bài toán** sang **ngôn ngữ "kí hiệu" của hình học** thì biết đâu sẽ cũng có nhiều bạn không định hướng được? Ai đó đã nói rằng, **"Toán học là trò chơi của ngôn ngữ"** một bài toán ẩn dưới dạng ngôn ngữ chữ bao giờ cũng khó hơn bài toán ẩn dưới dạng kí hiệu Toán học. Vì vậy, tác giả đề nghị chúng ta dựng hình và phác thảo ý tưởng trên hình vẽ.

theo cách đó góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Như các bạn đã biết, góc tạo bởi hai đường thẳng trong mặt phẳng có thể là **α hoặc 180º – α** (α tính theo độ). Với nhận xét này ta có hai trường hợp tương ứng. Với trường hợp 1, khi α = 60º, ta suy ra góc AMO = 30º

$\Rightarrow$ OM = 2OA = 2R = 1 $\Rightarrow$ quỹ tích của những điểm M chính là đường tròn (C_1) tâm O bán kính $R_1 = 2$.

_ Tương tự với trường hợp 2, khi α = 120º, ta suy OM' = $\frac{2OA}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ quỹ tích của những điểm M' chính là đường tròn (C_2) tâm O bán kính $R_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

_ Với yêu cầu bài toán thì **đường thẳng d chỉ có thể cắt (C_1) và không cắt (C_2)**.

► **Hướng dẫn giải:**

* Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ có tâm O(0; 0) và bán kính R = 1.Góc hợp giữa hai tiếp tuyến kẻ từ M có thể là 60º hoặc 120º. Vậy ta có tương ứng hai trường hợp.

* TH1: góc $AMB = 60^o$, xét ΔOAM ⊥ A $\Rightarrow$ sin $AMO = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ OM = 2OA = 2R = 2.

Suy ra **M thuộc đường trong (C_1) có tâm O và bán kính $R_1 = 2$**

* TH2: góc $AM'B = 120^o$, xét ΔOA'M' ⊥ A' $\Rightarrow$ sin $A'M'O = \frac{OA'}{OM'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ OM' = $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Suy ra **M thuộc đường trong (C_2) có tâm O và bán kính $R_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$**

* Đường thẳng d: y – m = 0. Để có 2 điểm M thỏa yêu cầu bài toán thì **điều kiện cần và đủ** là **đường thẳng d cắt (C_1) tại 2 điểm phân biệt và d không cắt (C_2).**

Suy ra $\left[\begin{array}{l} d[O;d] < R_1 \\ d[O;d] > R_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |-m| < 2 \\ |-m| > \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ m < \frac{-2}{\sqrt{3}} \vee m > \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ m < \frac{-2}{\sqrt{3}} \vee m > \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right.}$

■ **Lời bình**:Trước tiên nếu xét các trường hợp còn lại (xem hình vẽ), ta có:

+ Tìm m để có duy nhất một điểm M mà tại đó kẻ được 2 tiếp tuyến hợp với nhau góc 60º $\Rightarrow$ d tiếp xúc với đường tròn (C_1) $\Rightarrow$ $d[O;d] = R_1$.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

+ Tìm m để có 2 điểm M_1, M_2 phân biệt mà tại đó kẻ được 2 tiếp tuyến hợp với nhau góc $60^o \Rightarrow$ tương tự như bài toán trên.

+ Tìm m để có 3 điểm M_1, M_2, M_3 phân biệt mà tại đó kẻ được 2 tiếp tuyến hợp với nhau góc $60^o \Rightarrow$ d cắt (C_1) tại M_1, M_2 và tiếp xúc ngoài với (C_2) tại M_3 $\Rightarrow d[O;d] = R_2$.

+ Tìm m để có 4 điểm M_1, M_2, M_3, M_4phân biệt mà tại đó kẻ được 2 tiếp tuyến hợp với nhau góc $60^o \Rightarrow$ d cắt (C_2) tại 2 điểm phân biệt $\Rightarrow d[O;d] < R_2$.

Như vậy có thể thấy bài toán trên, có mấy vấn đề cần rút ra:

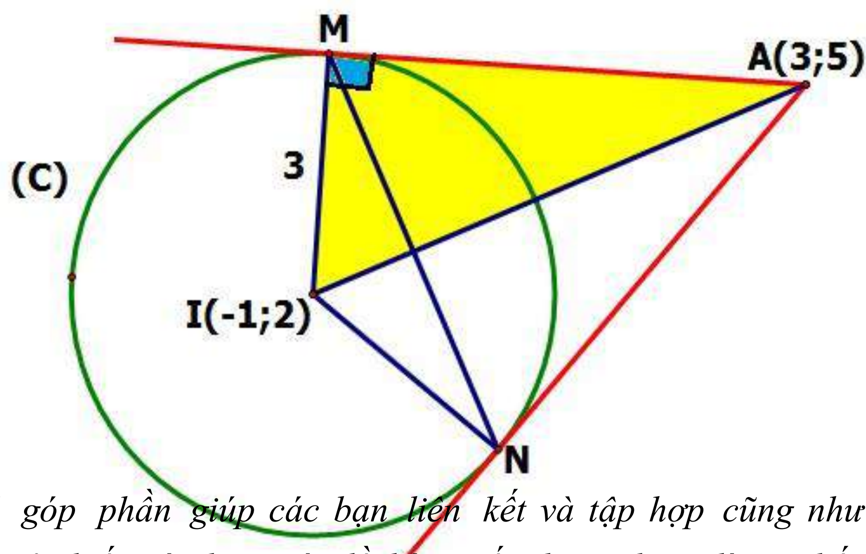
Một là, việc xét vị trí tương đối giữa điểm M và đường tròn (C) rất quan trọng vì nếu biết được độ dài OM ta sẽ có được quỹ tích tập hợp điểm M (Ở đây chính là đường tròn đồng tâm với (C) nhưng bán kính bằng OM) , trong quá trình giải bài tập chọn lọc – tự luyện, cũng như giải các đề thi chính quy đại học, các đề thi thử, bạn sẽ thấy rất rõ nét yếu tố trên.

Hai là, bài toán mặc dù đề cập đến thiết lập tiếp tuyến cho đường tròn thỏa yêu cầu cho trước nhưng khi cần phải biện luận ta vẫn rất cần sử dụng đến **d[tâm; đường thẳng đang xét]**.

BÀI TOÁN 11 (TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn*** $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ***và tọa độ điểm*** $A(3;5)$. ***Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ A đến (C). Giả sử các tiếp điểm là M, N. Tính độ dài MN.***

- **Đặt vấn đề:**tương tự như câu 10 vừa rồi, để viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn ta có thể có những cách giải nào? Mời các bạn xem lời giải

- **CÁCH 1 :Gọi** $\vec{n} = (a;b)$ **($a^2 + b^2 > 0$) là vtpt của tiếp tuyến d kẻ từ A đến đường tròn (C).**



theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

☺**Ý tưởng :**

_ Đầu tiên ta kiểm tra vị trí tương đối giữa điểm A và đường tròn (C) → kết quả cho A ngoài đường tròn (C) ⇒ có 2 tiếp tuyến cần tìm.

_ Nhận xét tiếp tuyến đã qua điểm A nên chỉ cần tìm thêm một điểm nữa hoặc một véctơ pháp tuyến nữa là có thể lập được pt tiếp tuyến.

_ Ở đây ta đi theo hướng lập vtpt $\vec{n} = (a;b)$. Dùng điều kiện tiếp xúc để giải tìm quan hệ a và b.

_ Tuy nhiên cần lưu ý đến điều kiện $a^2 + b^2 > 0$.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(–1;2) và bán R = $\sqrt{1+4+4} = 3$ và $\overrightarrow{IA} = (4;3)$

$\Rightarrow IA = 5 > R$.

Suy ra A nằm ngoài đường tròn (C) ⇒ qua A ta kẻ được hai tiếp tuyến đến (C).

* Ta có tiếp tuyến d qua A(3;5) nên có dạng: $a(x-3) + b(y-5) = 0$

⇔ $\mathbf{ax + by - 3a - 5b = 0.}$

* Do d tiếp xúc với (C) ⇔ d[I;d] = R

$$\Leftrightarrow \frac{|-a+2b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|4a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow (4a+3b)^2 = 9(a^2+b^2) \Leftrightarrow 7a^2 + 24ab = 0 \ (*)$$

* Nhận xét nếu b = 0 thì (*)

⇒ a = 0 (vô lí vì $a^2 + b^2 > 0$) nên **với b ≠ 0 ta chọn b = 7.**

Do đo (*) ⇔ $a^2 + 24a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -24 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} d_1 : y - 5 = 0 \\ d_2 : 24x - y - 37 = 0 \end{array}\right.$.

* Gọi H = MN ∩ IA ta có MN = 2MH. ΔIMA ⊥ M có $MA^2 = IA^2 - IM^2$

⇒ MA = 4.

Lại có MH.IA = IM.MA ⇒ $MH = \frac{12}{5} \Rightarrow MN = \frac{24}{5}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\left[\begin{array}{l} d_1 : y - 5 = 0 \\ d_2 : 24x - y - 37 = 0 \end{array}\right.$ ***và độ dài*** $\boxed{MN = \frac{24}{5}}$

■ **CÁCH 2 : Tìm tọa độ 2 tiếp điểm M và N⇒viết phương trình 2 tiếp tuyến tương ứng.**

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

☺ **Ý tưởng :**

_ Để tìm M, N ta có thể xét {M; N} = (C)∩(C_1) trong đó (C_1) là đường tròn tâm A bán kính MA.

_ Khi có M, N thì việc lập phương trình đường tiếp tuyến hay tính độ dài MN quá đơn giản.

_ Phần giải cách 2 xin dành cho bạn đọc.

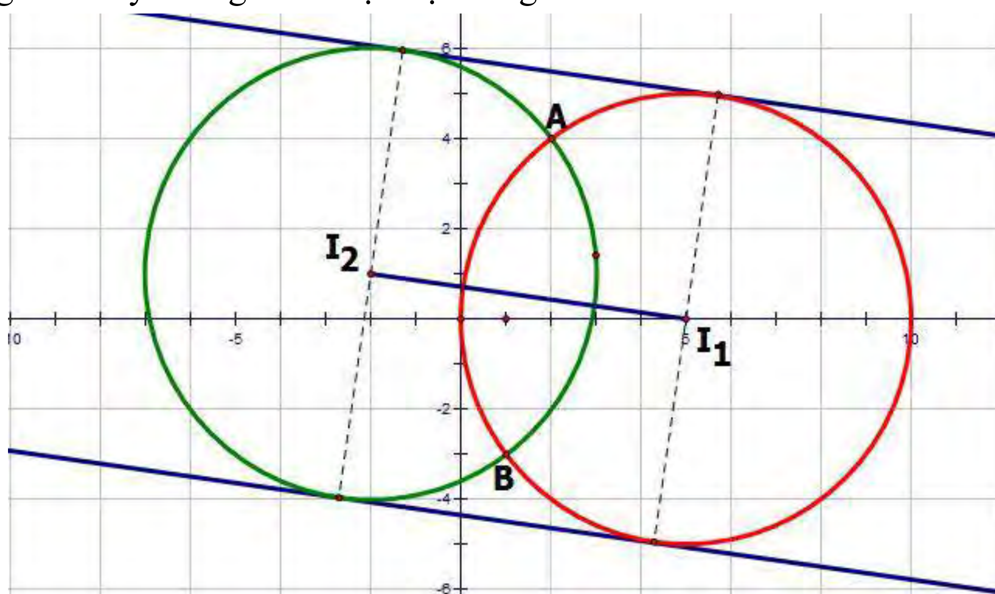
■ **Lời bình**: Trong bài toán này, không bàn về phương pháp giải mà chỉ nói về một số lưu ý.

Một là, với dạng hình từ một điểm ngoài đường tròn kẻ được hai tiếp tuyến chúng ta cần lưu ý đến "hệ thức lượng trong tam giác vuông IBM hay IMA tại các tiếp điểm A, B. Bởi khi đó ta có thể sử dụng các công thức để liên hệ với bán kính.

Hai là, đối với một điểm, một đường thẳng hay một đường tròn thì "xét vị trí tương đối của chúng" với đường tròn là cực kì là quan trọng.

BÀI TOÁN 12 (TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn*** $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$. ***Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C₁) và (C₂).***

■ **Đặt vấn đề :** Viết phương trình "tiếp tuyến chung của hai đường tròn" là một trong những chủ đề thường gặp trong các đề thi đại học bởi lẽ nó "chạm đến" những vấn đề liên quan như "vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn", "lập phương trình của một đường thẳng", v,v... Với chủ đề này thì có thể có những cách thức tiếp cận nào? Và có thể có một phương pháp tổng quát để giải dạng toán này không? Mời bạn đọc cùng theo dõi.



☺ **Nhận xét :**Như nhận xét ở chủ đề 2 ("viết phương trình đường thẳng") thì bản chất của tiếp tuyến thật ra cũng chỉ là một đường thẳng →cũng cần phải hội đủ các yếu tố như đi qua một điểm và nhận một véctơ nào đó làm véctơ pháp tuyến (hoặc véctơchỉ phương).

☻ **Ý tưởng**:

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Do hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A và B → có 2 tiếp tuyến cần tìm.

_ Tiếp tuyến chưa đi qua điểm nào? và cũng chưa có véctơ pháp tuyến hoặc véctơ chỉ phương. Vì vậy ta có thể triển khai theo hai hướng sau:

\+ **Hướng thứ 1**, gọi dạng phương trình tiếp tuyến y = ax + b →Δ: ax – y + b = 0 → dùng "điều kiện tiếp xúc giữa Δ và (C_1), (C_2) → giải tìm quan hệ a, b → phương trình Δ.

\+ **Hướng thứ 2**, phát hiện hai đường tròn có cùng bán kính ($R_1 = R_2$) → tiếp tuyến Δ là hai đường thẳng song song với $\overrightarrow{I_1I_2}=(-7;1)$ →Δ: x + 7y + m = 0 → tương tự dùng "**điều kiện tiếp xúc**" → giải tìm m → phương trình Δ.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do (C_1) cắt (C_2) tại A, B nên có 2 tiếp tuyến chung. Giả sử phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) có dạng: **y = ax + b⇔Δ: ax – y + b = 0**

* Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2)

$$\Rightarrow\begin{cases} d[I_1;\Delta]=R_1 \quad (1)\\ d[I_2;\Delta]=R_2 \quad (2)\end{cases} \Leftrightarrow d[I_1;\Delta]=d[I_2;\Delta]=5 \Leftrightarrow \frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|-2a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 5a+b=-2a-1+b \Rightarrow a=\dfrac{-1}{7}\\ 5a+b=2a+1-b \Rightarrow b=\dfrac{-3a+1}{2}\end{array}\right.$

* Thay $a=\dfrac{-1}{7}$ vào (1) ta có $b=\dfrac{5\pm 25\sqrt{2}}{7}$

* Thay $b=\dfrac{-3a+1}{2}$ vào (1) ta được:

$$|5a+b|=5\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow \left|5a+\frac{-3a+1}{2}\right|=5\sqrt{a^2+1}$$

Suy ra $\Leftrightarrow (7a+1)^2=100(a^2+1) \Leftrightarrow 51a^2-14a+99=0\,(VN)$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l} x+7y-5+25\sqrt{2}=0\\ x+7y-5-25\sqrt{2}=0\end{array}\right.$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Do $R_1 = R_2$ và hai đường tròn cắt nhau nên ta suy ra hai tiếp tuyến chung là 2 đường thẳng song song $\overrightarrow{I_1I_2}=(-7;1) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ có dạng **x + 7y + m = 0**

theo cách lẻ góp phần giúp các bạn liên kết và tận hiệp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* Điều kiện tiếp xúc là $d[I_1;\Delta]=5 \Leftrightarrow |5+m|=25\sqrt{2} \Leftrightarrow m=-5\pm 25\sqrt{2}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l} x+7y-5+25\sqrt{2}=0 \\ x+7y-5-25\sqrt{2}=0 \end{array}\right.$

■ **Lời bình**: Từ bài toán tiếp tuyến chung này ta đặt ra hai tình huống xảy ra:

Một là, trường hợp **2 đường tròn có $R_1 = R_2$ nhưng không cắt nhau** thì khi đó việc giải sẽ như thế nào? → Khi đó sẽ có đến **4 tiếp tuyến chung** thỏa yêu cầu bài toán (**bạn đọc có thể xem câu 5 của đề dự bị 2 – ĐH B2002 ở chương 3 để hiểu rõ hơn**)

Hai là, trường hợp 2 đường tròn có $R_1 \neq R_2$và cắt nhau thì khi đó ta sẽ giải như thế nào? → khi đó ta vẫn sẽ có 2 tiếp tuyến chung, tuy nhiên 2 tiếp tuyến này sẽ **cắt nhau** và **đồng quy** với đường thẳng I_1I_2 tại điểm M → ta có thể vận dụng định lý Thales để tìm tọa độ điểm M → viết phương trình Δ qua M và khuyết véctơ pháp tuyến.

BÀI TOÁN 13 (TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có*** $A(-2;-1)$***, trực tâm*** $H(2;1)$ ***và độ dài cạnh BC bằng*** $2\sqrt{5}$***. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B và C. Biết trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng*** $d: x-2y-1=0$ ***và EF đi qua điểm*** $N(3;-4)$***. Viết phương trình đường thẳng BC.***

■ **Đặt vấn đề :** Đối với bài toán liên quan đến đường tròn ngoài các phương trình tiếp tuyến, phương trình dây cung của đường tròn, phương trình tiếp tuyến chung , dây cung chung của hai đường tròn cũng là một dạng toán khó. Để xử lý bài toán này, tác giả sẽ đề cập đến phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn . Vậy trục đẳng phương là gì? tính chất ra sao? vận dụng như thế nào trong các bài toán liên quan đến đường tròn. Mời bạn đọc cùng theo dõi

☺ **Nhận xét :**Trước tiên chúng ta cần hiểu thế nào là trục đẳng phương?

♥ Định nghĩa **phương tích**: Cho đường $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Khi đó $P_{M/(C)}=\overline{MA}.\overline{MB}$ không phụ thuộc vào phương của cát tuyến MAB của đường tròn mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Cụ thể nếu $M(x_o; y_o)$ thì $P_{M/(C)}={x_0}^2+{y_0}^2+2ax_0+2by_0+c=0$.

♥ Định nghĩa **trục đẳng phương**: Cho 2 đường tròn $(C_1), (C_2)$, khi đó: Tập $d=\{M \mid P_{M/(C_1)}=P_{M/(C_2)}\}$ là một đường thẳng và đó gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.

theo cách . Góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Giả sử $\begin{cases}(C_1): x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0\\ (C_2): x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0\end{cases}$

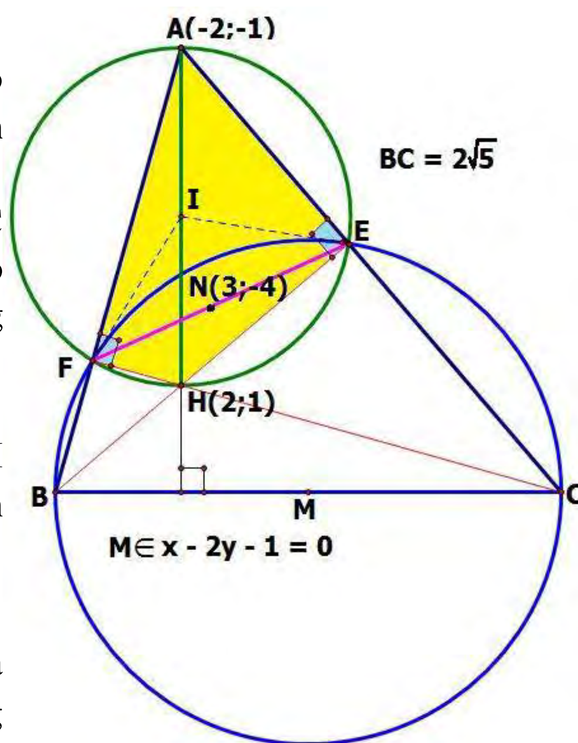
Thì phương trình trục đẳng phương là: $\boxed{2(a_1 - a_2)x + 2(\text{b}_1 - b_2)x + \text{c}_1 - c_2 = 0}$

♥ Chú ý:

+ Khi 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm A, B thì AB chính là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)

+ Khi 2 đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm A thì trục đẳng phương của 2 đường tròn chính là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn tại điểm A.

☻ **Ý tưởng**:



_ Nhận xét đầu tiên khi dựng hình đó chính là đường BC ⊥ AH nên ta đã sẵn có véctơ pháp tuyến của BC.

_ Để viết phương trình đường thẳng BC thì chắc chắn ta phải đi tìm điểm M, do M thuộc đường thẳng d nên ta dễ dàng tham số hóa điểm M.

_ Vấn đề đặt ra lúc này là ta cần 1 phương trình có liên quan đến điểm M → đó là phương trình nào? và nó liên hệ gì với những giả thiết còn lại?

_ Phân tích các giả thiết còn lại ta có N ∈ EF (1), độ dài BC = $2\sqrt{5}$ cùng với tọa độ của điểm A và H đang có. Trong những dữ kiện này, dữ kiện N ∈ EF là đặc biệt nhất, đó phải chăng là lời gợi ý của người ra đề cho chúng ta → hãy lập phương trình đường EF?

_ Đến đây thì mọi thứ vẫn chưa thật sự rõ ràng? nhưng nếu bạn chú ý một chút thì F và E đang nhìn BC dưới một góc vuông → BFEC chính là tứ giác nội tiếp và đường tròn (C) tâm M bán kính BM sẽ đi qua E và F nên lúc này EF chính là dây cung của đường tròn (C).

_ Không dừng lại ở đó, ta cũng phát hiện thêm E và F cũng đang nhìn AH dưới một góc vuông → AEHF cũng là một tứ giác nội tiếp và đường tròn (C') tâm I (trung điểm AH) bán kính IA sẽ đi qua E và F nên lúc này EF chính là dây cung của đường tròn (C')

_ Hóa ra EF chính là dây cung chung của hai đường tròn (C) và (C') và theo như nhận xét về lý thuyết đã giới thiệu ở trên EF chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và C').

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

► **Hướng dẫn giải :**

* $M \in d: x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow M(2m + 1; m)$
* Ta có E và F cùng nhìn BC dưới một góc vuông ⇒ BFEC là một tứ giác nội tiếp đường tròn (C) có tâm là điểm M và bán kính R = $BM = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{5}$

  $\Rightarrow (C): (x - 2m - 1)^2 + (y - m)^2 = 5$
* Ta có E và F cùng nhìn AH dưới một góc vuông ⇒ AFHE là một tứ giác nội tiếp đường tròn (C') có tâm là I(0;0) là trung điểm AH và bán kính

  R' = $AI = \dfrac{AH}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow (C'): x^2 + y^2 = 5$
* Nhận xét E, F chính là giao điểm chung của hai đường tròn (C) và (C') ⇒ EF chính là trục đẳng phương của hai đường tròn trên nên EF có dạng:

  $$(x - 2m - 1)^2 + (y - m)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2(2m + 1)x + 2my - 5m^2 + 4m - 1 = 0$$
* Mặt khác $N(3;-4) \in EF$

  $$\Rightarrow 2(2m+1)3 + 2m.(-4) - 5m^2 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(-1;-1) \\ M_2(3;1) \end{array}\right.$$
* TH1: Đường thẳng BC qua $M_1(-1; -1)$ nhận $\overrightarrow{AH} = (4;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $BC: 2(x+1) + 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$
* TH2: Đường thẳng BC qua $M_2(3; 1)$ nhận $\overrightarrow{AH} = (4;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $BC: 2(x-3) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$

  Vậy phương trình đường thẳng BC cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} 2x + y + 3 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{array}\right.}$

■ **Lời bình:** Có thể thấy được một số vai trò tiêu biểu của trục đẳng phương của hai đường tròn trong việc giải quyết các bài toán đường tròn cắt nhau. Việc phát hiện các tứ giác nội tiếp từ các chân đường cao cùng với việc lập phương trình "đường tròn ẩn mình" giúp cho ta thấy được một hướng khai thác khác của bài toán. Trong quá trình đi tìm lời giải cho 1 bài toán, thì những dữ kiện mà đề bài cho tưởng chừng như không liên hệ gì cả nhưng luôn có một sợi dây vô hình liên kết chúng lại. Và nhiệm vụ của ta làm khám phá ra sợi dây liên kết đó.

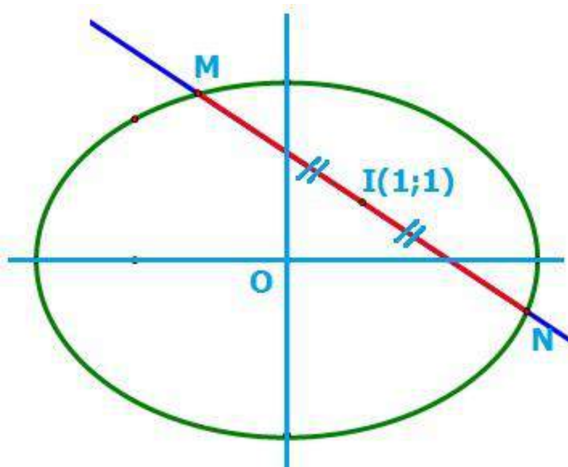
BÀI TOÁN 14 (ĐƯỜNGELIP). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Elip (E):*** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. ***Viết phương trình đường thẳng d qua I (1; 1) cắt (E) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho IM = IN.***

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

■ **Đặt vấn đề:** *Ngoài bài toán tìm điểm thuộc (E), thì bài toán xét vị trí tương đối giữa điểm, đường thẳng, đường tròn, đường elip so với elip cũng khá phổ biến. Cụ thể trong bài toán trên, thì ta có thể tiếp cận như thế nào? Như ta đã biết* ***phép co của một đường tròn*** *sẽ tạo thành Elip . Vậy các kết quả, cách làm của bên đường tròn có thể ứng dụng gì bên elip không? Mời các em xem lời giải.*

■ **CÁCH 1 :Sử dụng phương pháp gọi điểm.**

☺ **Ý tưởng :**



_ Ta gọi $M(x; y) \in (E)$, do IM = IN

$\Rightarrow$ I là trung điểm MN

$\Rightarrow$ tọa độ N theo tọa độ M

_ Lần lượt cho M, N thuộc (E)

$\rightarrow$ biến đổi để tìm quỹ tích của MN chính là đường thẳng d cần tìm.

_ Kiểm tra đường thẳng có là đường thẳn cần tìm bằng cách thay tọa độ I vào.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm thuộc (E). Do I(1; 1) là trung điểm MN

$\Rightarrow N(2 - x_1; 2 - y_1) \in (E)$

* Mặt khác ta có M và N đều thuộc (E) nên ta có :

$$\begin{cases} M \in (E) \\ N \in (E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1 \\ \dfrac{(2-x_1)^2}{9} + \dfrac{(2-y_1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

* $$\begin{cases} 4x_1^2 + 9y_1^2 = 36 \\ 4(2-x_1)^2 + 9(2-y_1)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1^2 + 9y_1^2 = 36 & (1) \\ 4x_1^2 + 9y_1^2 - 16x_1 - 36y_1 + 52 = 36 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow 4x_1 + 9y_1 - 13 = 0$ (*)

* Đặt d: 4x + 9y – 13 = 0. Ta có: $\begin{cases} M \in d \ (\text{do}(*)) \\ I \in d \end{cases}$

$\Rightarrow$ d: 4x + 9y – 13 = 0 là phương trình đường thẳng cần tìm

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là ***d: 4x + 9y – 13 = 0***

■ **CÁCH 2: Sử dụng cách thiết lập đường thẳng theo hệ số góc k (tìm "cây gậy vtpt").**

☺ **Ý tưởng :**

Do đường thẳng d đã qua điểm I nên sẽ ta sẽ gọi dạng phương trình đường có hệ số k. (tuy vậy cần xét hai trường hợp k = 0 và k ≠ 0).

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Chuyển bài toán viết phương trình đường thẳng thành bài toán biện luận k để hệ phương trình trên có hai nghiệm (nghĩa là ta đang xét sự tương giao giữa đường thẳng và đường elip).

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* TH1: Đường thẳng Δ đi qua I(1; 1) và song song với Oy ⇔**Δ: x = 1**.

Ta có M, N là giao điểm giữa Δ và (E) nên ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \\ x=1 \Rightarrow y=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$$

Suy ra $M\left(1;\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ và $N\left(1;\dfrac{-4\sqrt{2}}{3}\right)$ (loại vì trung điểm của MN khác I).

* TH2: Đường thẳng Δ đi qua I(1; 1) có hệ số góc k ⇔**Δ: y = k(x – 1) + 1**.

Ta có M, N là giao điểm giữa Δ và (E) nên ta có $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 & (1) \\ y=k(x-1)+1 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{k^2(x-1)^2+2k(x-1)+1}{4}=1$

⇔ $(9k^2+4)x^2+(18k-18k^2)x+9k^2-18k-27=0$ với x_M, x_N là hai nghiệm của phương trình trên.

Ta có $x_M + x_N = \dfrac{-b}{a}=\dfrac{18k^2-18k}{9k^2+4}=2y_I=2 \Rightarrow k=\dfrac{-4}{9}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là **d: 4x + 9y – 13 = 0**

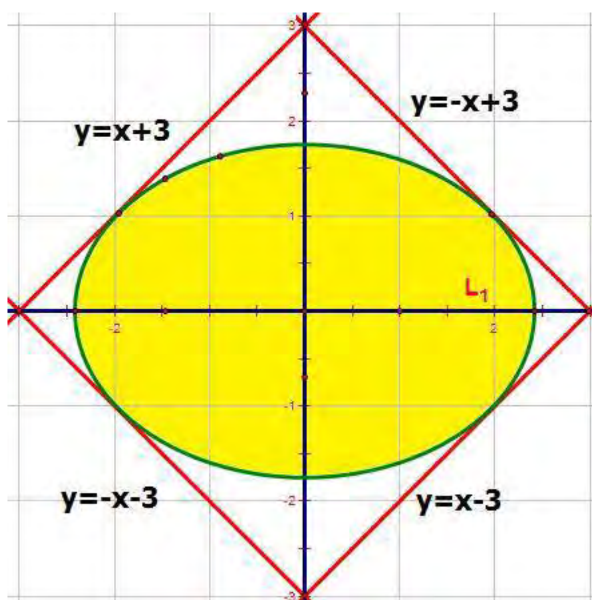
■ **Lời bình**:Nếu xem xét lại bài toán 9 (đường tròn) thì ở cách 2 ta cũng có thể thực hiện tương tự. Ở bài toán này, phép đối xứng tâm I biến điểm M thành N, biến elip cũ thành elip mới cũng tương tự như bạn làm với phương pháp gọi điểm (bạn đọc có thể làm thử).

BÀI TOÁN 15 (TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG ELIP). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phương trình đường elip*** $(E):\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$***. Xét một hình vuông ngoại tiếp elip (tức là các cạnh của hình vuông đều tiếp xúc với elip). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.***

(trích đề thi trường Đại học Kiến Trúc 1994)

theo cách giải ... vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

■ **Đặt vấn đề:**"viết phương trình tiếp tuyến của đường elip" là một nội dung thường gặp trong chương trình trước cải cách, điển hình là những đề thi đại học đầu tiên của "kì thi 3 chung", Bộ GD&ĐT đã đề cập đến những vấn đề này. Xét góc độ học thuật (không phải góc độ thi cử), tác giả cũng muốn giới thiệu đến bạn đọc tiếp tuyến của đường elip là như thế nào? Mời bạn đọc xem lời giải.



☺**Ý tưởng :**

_ Các tiếp tuyến tạo lập thành hình vuông ngoại tiếp hình elip → vì vậy chúng không thể song song với 2 trục tọa độ (do khi đó các tiếp tuyến ấy sẽ tạo thành hình chữ nhật) → Với nhận xét trên ta gọi dạng hai phương trình tiếp tuyến liên tiếp của 2 cạnh hình vuông là

$d: y = k_1x + m_1,\ d': y = k_2x + m_2$

_ Một đường thẳng Δ: mx + ny + p = 0 và elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì điều kiện để Δ tiếp xúc (E) là:

$$\boxed{a^2m^2 + b^2n^2 = p^2}$$

_ Dựa vào điều kiện tiếp xúc đó ta có d tiếp xúc (E) (1), d' tiếp xúc (2), d ⊥ d' (3) và (E) và hình vuông có cùng tâm nên khoảng cách từ O đến d và d' bằng nhau.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi phương trình $d: y = k_1x + m_1,\ d': y = k_2x + m_2$ lần lượt là hai đường thẳng chứa hai cạnh liên tiếp của hình vuông ngoại tiếp elip đã cho.
* Theo để bài ta có:

$$\begin{cases} d\ \text{tiep xuc}\,(E) \\ d'\ \text{tiep xuc}\,(E) \\ d \perp d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2.k_1^{\ 2} + b^2 = m_1^{\ 2} \\ a^2.k_2^{\ 2} + b^2 = m_2^{\ 2} \\ k_1.k_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k_1^{\ 2} + 3 = m_1^{\ 2} & (1) \\ 6k_2^{\ 2} + 3 = m_2^{\ 2} & (2) \\ k_1.k_2 = -1 & (3) \end{cases}$$

* Mặt khác, do hình vuông ngoại tiếp (E) và có cùng tâm với (E)

Suy ra d[O;d] = d[O;d'] ⇔ $|m_1| = |m_2|$ (4)

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* Do $|m_1| = |m_2| \Rightarrow k_1^{\ 2} = k_2^{\ 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = k_2 \xrightarrow{(3)} k_1^{\ 2} = -1\ (VN) \\ k_1 = -k_2 \xrightarrow{(3)} k_1^{\ 2} = 1 \end{array}\right.$

* Khi $k_1 = 1 \Rightarrow m = \pm 3$, ta được hai phương trình hai cạnh hình vuông song song với nhau là: y = x + 3 hay y = x – 3

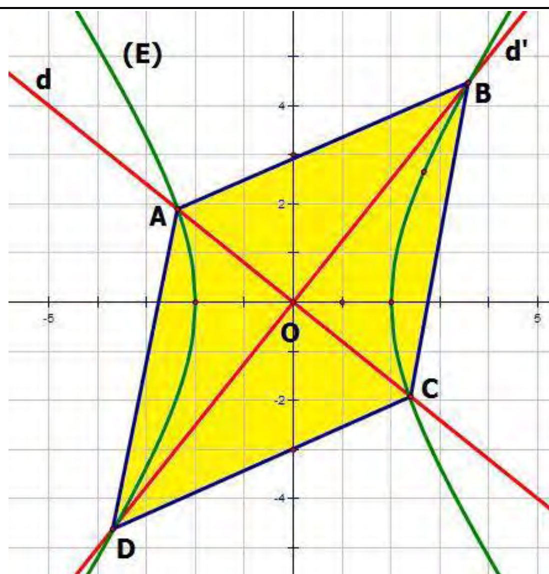
* Khi $k_1 = -1 \Rightarrow m = \pm 3$, ta được hai phương trình hai cạnh hình vuông song song với nhau là: y = – x + 3 hay y = – x – 3

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{y = x \pm 3,\ y = -x \pm 3}$

■ **Lời bình**: Đây là một dạng toán không quá xa lạ gì với chương trình cũ, nhưng với chương trình mới chắc chắn các bạn sẽ rất bỡ ngỡ vì chưa bao giờ được "va chạm" với kiến thức này. Vẫn phải nhấn mạnh một lần nữa, bài toán này không phục vụ mục đích "thi cử" mà chỉ phục vụ múc đích "học thuật" nhé các bạn.

BÀI TOÁN 16 (ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐƯỜNG HYPEBOL). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol (H):*** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. ***Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số k. Đường thẳng d' cũng đi qua gốc toa độ và vuông góc với đường thẳng d. Gọi A, C, B, D lần lượt là giao điểm giữa d và (H), d' và (H). Tìm k để diện tích hình thoi ABCD bằng*** $\frac{144}{5}$.

☺**Ý tưởng :**



_ Do hai đường thẳng d và d' vuông góc nên ta cũng có được hệ số góc của đường d'.

_ Mỗi một đường thẳng đều cắt (H) tại 2 điểm phân biệt → tìm điều kiện của k để chúng cắt nhau.

_ Tính theo k diện tích hình thoi, ở đây ta có $S_{ABCD} = 4S_{\Delta OAB} = 4.OC.OB$ → tính OA, OC theo k

_ Dựa vào dữ kiện của đề bài cho tính ra giá trị k (so với điều kiện ban đầu).

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có phương trình d: y = kx, do d' ⊥ d ⇒ d': x = ky.

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (H):

$$9x^2 - 4k^2x^2 = 36 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36$$

Phương trình này có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{-3}{2} < k < \frac{3}{2}}$ (1)

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Xét phương trình tung độ giao điểm giữa d' và (H):

$$9k^2x^2 - 4x^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)x^2 = 36$$

Phương trình này có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \boxed{k < \frac{-2}{3} \vee k > \frac{2}{3}}$ (2)

Kết hợp (1) và (2), ta được $\boxed{k \in \left(\frac{-3}{2}; \frac{-2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \ (*)}$

* Ta có ABCD là hình thoi $\Rightarrow S_{ABCD} = 4S_{\Delta OAB} = 2.OC.OB$

B có tọa độ $\begin{cases} x_B = \frac{6}{\sqrt{9-4k^2}} \\ y_B = \frac{6k}{\sqrt{9-4k^2}} \end{cases}$. Do đó $OB^2 = {x_B}^2 + {y_B}^2 = \frac{36(1+k^2)}{9-4k^2}$

Tương tự C có tọa độ $C\left(\frac{-6k}{\sqrt{9k^2-4}}; \frac{-6}{\sqrt{9k^2-4}}\right) OC^2 = \frac{36(1+k^2)}{9k^2-4}$

* Do đó

$${S_{ABCD}}^2 = \left(\frac{144}{5}\right)^2 \Leftrightarrow OB^2.OC^2 = \left(\frac{144}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{72^2(1+k^2)^2}{(9-4k^2)(9k^2-4)} = \left(\frac{144}{5}\right)^2$$

Suy ra

$$\frac{(1+k^2)^2}{(9-4k^2)(9k^2-4)} = \frac{4}{25} \Leftrightarrow 25(1+2k^2+k^4) = 4(97k^2 - 36k^4 - 36) \Leftrightarrow k^2 = 1$$

* Do đó k = ± 1 (nhận vì thỏa điều kiện (*)

Vậy giá trị k cần tìm chính là $\boxed{k = \pm 1}$

■ **Lời bình**:Bài toán này có thể có thay đổi câu hỏi là tìm k để diện tích hình thoi trên là nhỏ nhất. Khi đó bạn sẽ xử lý như thế nào? (Các bạn có thể xem tiếp ***"chủ đề 5 – chương 2 – max – min cực trị hình học trong mặt phẳng Oxy"*** để hiểu rõ hơn)

BÀI TOÁN 17 (ĐƯỜNG PARABOL).*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P):* $y = \frac{x^2}{2}$ ***và đường thẳng*** $d: 2mx - 2y + 1 = 0$***. Chứng minh rằng với mọi giá trị m, đường thẳng d luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. tìm quĩ tích trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

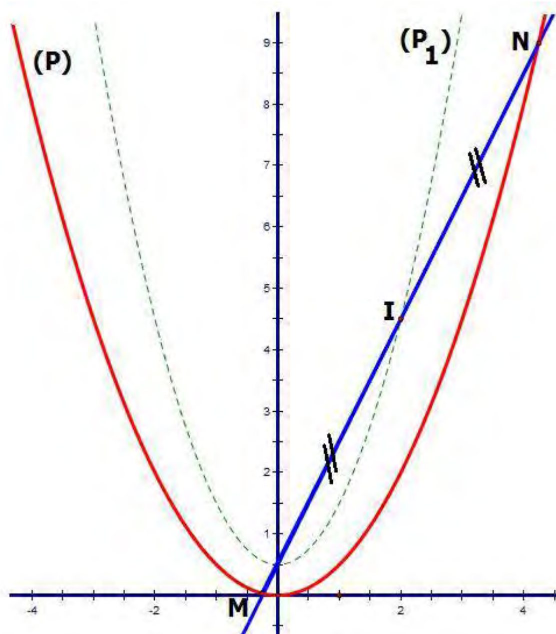
theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

_ Để chứng minh d luôn đi qua tiêu điểm F của (P)→ta chứng minh $F \in d, \forall m \in R$ → điều này chỉ cần tính tọa độ tiêu điểm F và thay vào phương trình đường d để kiểm tra.

_ Việc chứng minh d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt tương tự như ta xét phương trình hoành độ giao điểm giữa d và elip (E), d và hypebol (H) (phần này xin dành cho bạn đọc).

_ Cuối cùng là ý tưởng chứng minh quĩ tích điểm M, khi m thay đổi, đây là một dạng toán khó, đòi hỏi ở học sinh một số kỹ năng quan trọng. Cụ thể mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải:**



* (P): $y = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2y$. Đây là phương trình chính tắc của (P) nhận $F\left(0;\frac{1}{2}\right)$ làm tiêu điểm.

Thay tọa độ F vào đường thẳng d ta thấy d luôn đi qua F với mọi giá trị m (đpcm).

* Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và d: $y = \frac{2mx+1}{2}$ ta có:

$x^2 - 2mx - 1 = 0$ (*) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0$, $\forall m \in R \Rightarrow$ pt (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt

Suy ra d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N với mọi giá trị $m \in R$.

* Ta có I là trung điểm MN $\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = m \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = mx_I + \frac{1}{2} \end{cases}$ (để tìm quỹ tích của I → ta tìm cách khử m khỏi hệ phương trình)$\Rightarrow y_I = x_I^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow$Quỹ tích của điểm I chính là Parabol (P_1): $\boxed{y = x^2 + \frac{1}{2}}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{(P_1): y = x^2 + \frac{1}{2}}$

theo [illegible] góp phần giúp [illegible] kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

■ **Lời bình**: Bài toán về quỹ tích là bài toán thật sự khó, nếu xét về khía cạnh hình học phẳng chưa có tọa độ. Còn khi đã có tọa độ vào thì việc tìm quỹ tích của

những điểm khi các giá trị tham số liên quan thay đổi trở nên bớt "phức tạp" hơn. (Với những bạn nào thật sự yêu thích phần tìm quỹ tích của tập hợp điểm các bạn có thể tham khảo chương 3: Ứng dụng hệ trục tọa độ vào việc giải bài toán hình học phẳng".

BÀI TẬP CHỌN LỌC – TỰ LUYỆN CHỦ ĐỀ 2

Câu 1: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có* $A(1;4), B(3;-1), C(6;2)$

a. *Lập phương trình tổng quát của đường thẳng AB.*

b. *Lập phương trình chính tắc của đường thẳng BC.*

c. *Lập phương trình tham số của đường CA.*

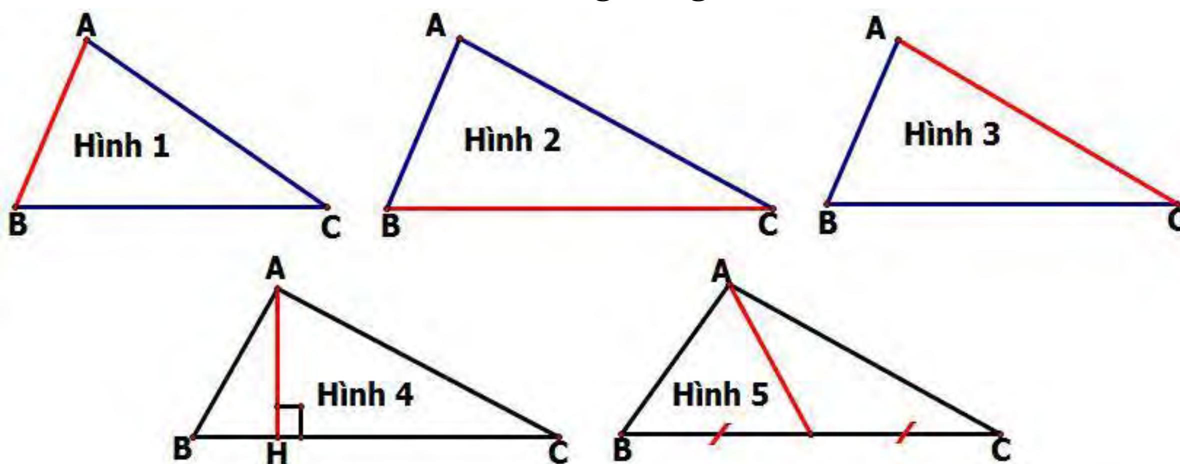
d. *Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.*

e. *Lập phương trình đường thẳng chứa trung tuyến AM.*

(**ĐS**: $a)AB: 5x+2y-13=0,\ b)BC: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}$,

$$c)AC: \begin{cases} x=1+5t \\ y=4-2t \end{cases} (t\in R),\ d)AH: x+y-5=0)$$

☺ **Hướng dẫn giải**



■ **Nhận xét:** *câu 1 trong bài toán chọn lọc ở chủ đề 2 là mở màn cho việc thiết lập một số dạng phương trình đường thẳng đã giới thiệu ở phần lý thuyết chương 1 cũng như phương pháp ở chương 2. Mời bạn đọc cùng nhận xét.*

* Đường thẳng AB qua A(1;4) nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;5)$ làm véctơ chỉ phương nên có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{AB}}=(5;2)$ có dạng tổng quát là: $5(x-1)+2(y-4)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{AB: 5x+2y-13=0}$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

* Đường thẳng BC qua B(3; –1) nhân $\overrightarrow{BC}=(3;3)$ làm véctơ chỉ phương có dạng chính tắc là: $\boxed{\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}}\Leftrightarrow x-y-4=0$

* Đường thẳng AC qua A(1; 4) nhận $\overrightarrow{AC}=(5;-2)$ làm véctơ chỉ phương có dạng tham số là: $\boxed{\begin{cases}x=1+5t\\y=4-2t\end{cases}(t\in R)}$

* Ta có AH $\perp BC: x-y-4=0\Rightarrow AH: x+y+m=0$, AH qua A(1; 4)

$\Rightarrow$ m = –5

Vậy phương trình $\boxed{AH: x+y-5=0}$

* Gọi M là trung điểm BC$\Rightarrow M\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.Đường thẳng AM qua A(1 ; 4) nhận $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{-7}{2}\right)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-1}$

$\Leftrightarrow\boxed{AM: x+y-5=0}$ (đến đây ta phát hiện trung tuyến AM và đường cao AH trùng nhau)

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{\begin{cases}AB: 5x+2y-13=0\\ BC:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}\\ AC:\begin{cases}x=1+5t\\y=4-2t\end{cases}(t\in R)\\ AH: x+y-5=0\end{cases}}$

■ **Lời bình:**Qua bài toán trên, ta rút ra một số lưu ý sau:

Một là, để chuyển đổi giữa véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ sang véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ ta có thể áp dụng nguyên tắc **"đổi chỗ, đổi một dấu"** (cơ sở dựa trên tích vô hướng giữa hai véctơ bằng 0) nên ta có hoặc $\vec{u}=(b;-a)$ hoặc $\vec{u}=(-b;a)$.

Hai là, đối với một đường thẳng thì có vô số các véctơ pháp tuyến và chỉ phương vì vậy ta có thể chọn các véctơ cùng phương với chúng sao cho có **"tọa độ đẹp"** nhằm góp phần tạo thuận lợi cho việc tính toán. (ví dụ như ở câu b, ta có chỉ phương $\overrightarrow{BC}=(3;3)=3(1;1)$ nên ta có thể chọn $\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)$ làm véctơ

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

chỉ phương, tương tự ở câu f, ta có chỉ phương $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{7}{2};\frac{-7}{2}\right)=\frac{7}{2}(1;-1)$ nên ta có thể chọn $\overrightarrow{u_{AM}}=\left(1;-1\right)$ làm véctơ chỉ phương.

Ba là, đối với dạng chính tắc của đường thẳng thì nếu véctơ chỉ phương có dạng: $\vec{u}=(\text{a};0),\ (a\neq 0)$ hay $\vec{u}=(0;\text{b}),\ (\text{b}\neq 0)$ thì ta không thể biểu diễn nó ở dạng chính tắc được do biểu diễn của dạng chính tắc có dạng phân thức nên bắt buộc cả a và b khác 0.

Bốn là, trong quá trình lập phương trình đường thẳng, nếu phát hiện đường thẳng của mình vuông góc hoặc song song với đường thẳng d: ax + by + c = 0 thì ta có thể đổi trực tiếp bằng cách:

$$\Delta\perp d: ax+by+c=0 \Rightarrow \Delta: bx-ay+m=0\ hay\ \Delta: -bx+ay+m=0$$

$$\Delta//d: ax+by+c=0 \Rightarrow \Delta: ax+by+n=0,\ (c\neq n)$$

Câu 2: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng d qua M(1; 4), cắt nửa trục dương Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.*

(**ĐS**: $d:\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1 \Leftrightarrow d: 4x+y-16=0$)

☺ **Hướng dẫn giải**

■ **Đặt vấn đề:***với câu thứ hai này, tác giả chọn ra nhằm hướng đến việc giới thiệu lại phương trình đoạn chắn hai trục tọa độ, đồng thời lồng bài toán max – min cực trị hình học vào. Các bạn có thể vận dụng các kiến thức của Đại số – giải tích để xử lý bài toán max – min này.*

● Ta có phương trình đường thẳng d qua M(1; 4) cắt nửa trục dương Ox, Oy tại A, B. Giả sử A(a; 0), B(0; b). (a > 0, b > 0)

Khi đó phương trình d qua A, B, M có dạng là:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\ (1)\ (\text{a}>0,\text{b}>0)}$$

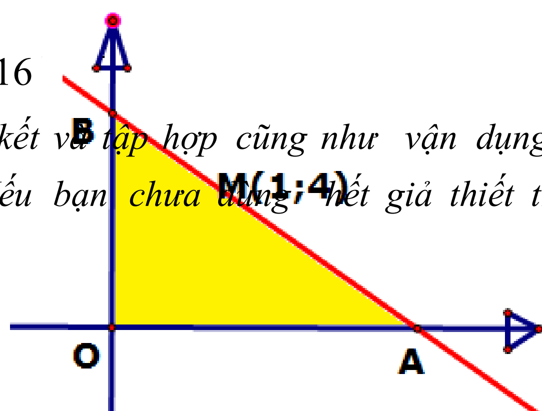
● Mặt khác diện tích tam giác OAB là: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.a.b\ \ (*)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{1}{a},\frac{4}{b}$ ta có:

$$1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}} \Leftrightarrow 1\geq \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab\geq 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ab\geq 8 \Leftrightarrow \boxed{S_{\Delta OAB}\geq 8}$$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa



- Vậy diện tích tam giác OAB nhỏ nhất khi

  S = 8 khi và chỉ khi $\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$ (2) .

  Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{4}{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=8\end{cases}$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{d:\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1 \Leftrightarrow d:4x+y-16=0}$

► ***Ngoài ra ta cũng có một cách khác để tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích !***

- Từ (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{a}=1-\frac{4}{b} \Leftrightarrow a=\frac{b}{b-4}$ (3) thay vào (*) ta được:

  $$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.a.b=\frac{1}{2}\frac{b}{b-4}.b=\frac{b^2}{2b-8}$$

  Đặt $f(b)=\frac{b^2}{2b-8}$ $(b>4)$ do $a>0 \Leftrightarrow \frac{b}{b-4}>0 \Leftrightarrow b>4$

  Khi đó $f'(b)=\frac{2b^2-16b}{(2b-8)^2}$, $f'(b)=0 \Leftrightarrow 2b^2-16b=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\ (ktm)\\ b=8\ (tm)\end{array}\right.$.

  Dựa vào bảng biến thiên ta có $\boxed{S_{\min}=\min\limits_{b>4} f(b)=8 \Leftrightarrow b=8 \Rightarrow a=2}$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{d:\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1 \Leftrightarrow d:4x+y-16=0}$

■ **Lời bình:***Có thể thấy trọng tâm của bài toán này là việc xử lý dữ kiện diện tích tam giác OAB nhỏ nhất. Tuy nhiên trong trường hợp mà đường thẳng d không cắt nửa trục dương Ox, Oy mà chỉ đơn thuần cắt 2 trục tọa độ thì sẽ phát sinh khá nhiều trường hợp. Bài toán cũng có thể tổng quát lên nếu ta giả sử M(a; b) bất kì.*

Câu 3: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua* $A(1;2)$ *tạo với đường thẳng d' có phương trình* $3x-2y+1=0$ *một góc 45°.*

(**ĐS**: $5x+y-7=0$ *hay* $x-5y+9=0$)

© **Hướng dẫn giải**

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết với tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- **Nhận xét:** *đây là một dạng câu khá là quen thuộc không hề xa lạ trong các bài tập ở trường phổ thông, và bạn cũng có thể tổng quát bài toán này lên nếu cần thiết. Mời bạn đọc xem lời giải.*

- Phương trình đường thẳng d qua A có dạng

  $$d: a(x-1)+b(y-2)=0\ (a^2+b^2>0)$$

  Trong đó: $\vec{n}=(a;b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng d.

- Ta có d tạo với d' một góc 45^0 nên ta có:

  $$\cos(d;d')=|\cos(\vec{n};\overrightarrow{n_{d'}})|=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{n_{d'}}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n_{d'}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{|3a-2b|}{\sqrt{4+9}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

  Do đó, $2(3a-2b)^2=13(a^2+b^2)\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0$ (*)

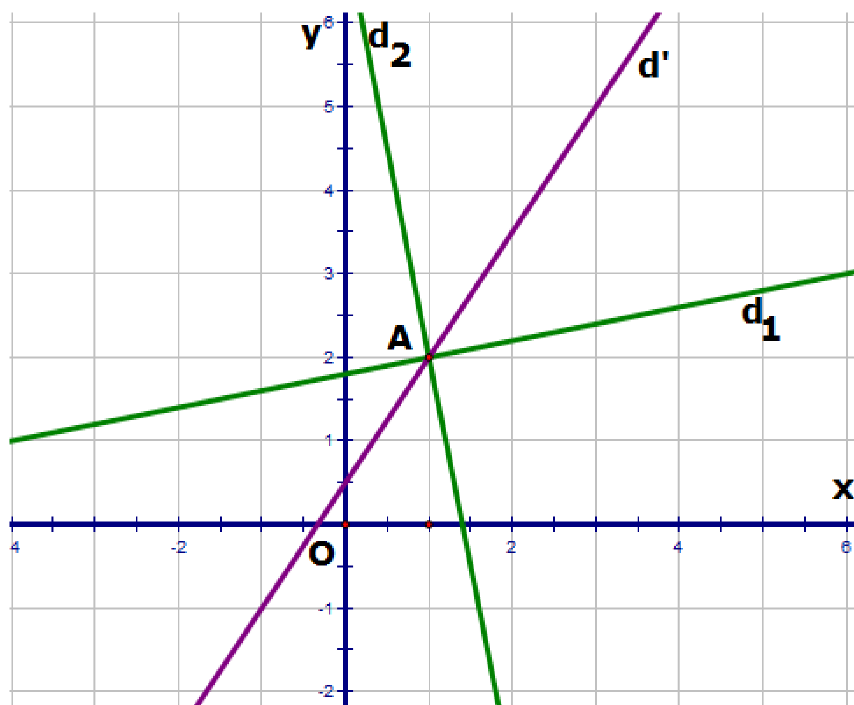
  Với b = 0 thì phương trình (*) suy ra a = 0 (không thỏa) nên ta chọn b = 5

  Khi đó $(*)\Leftrightarrow a^2-24a-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=25\\a=-1\end{array}\right.$

- Với a = 25, b = 5 ta có $d: 5(x-1)+1(y-2)=0\Leftrightarrow\boxed{5x+y-7=0}$

- Với a = –1, b = 5 ta có $d: -1.(x-1)+5(y-2)=0\Leftrightarrow\boxed{x-5y+9=0}$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{5x+y-7=0\ hay\ x-5y+9=0}$



theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Câu 4: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình* $BC: 2x-3y-5=0$ *và* $AB: x+y+1=0$. *Lập phương trình đường thẳng AC biết AC qua M(1; 1).*

(**ĐS**: $AC: 17x + 7y - 24 = 0$)

☺ **Hướng dẫn giải**

- **Đặt vấn đề:** *Một cách vận dụng khác trong việc sử dụng góc giữa các đường thẳng chính là việc sử dụng công thức tan thay vì dùng cosin. Mời bạn đọc cùng theo dõi.*

- Gọi phương trình đường AC có dạng: ax + by + c = 0 $(a^2 + b^2 > 0)$

  AC qua M(1; 1) nên ta có a + b + c = 0 (1)

- Do tam giác ABC cân tại A nên ta có:

$$\tan(AB;BC) = \tan(BC,AC) \Leftrightarrow \frac{1.(-3)-2(1)}{1.2+1.(-3)} = \frac{2b-a.(-3)}{2a+b(-3)}$$

$$\Leftrightarrow 5(2a-3b) = 2b+3a \Leftrightarrow a = \frac{17b}{7}$$

- Lúc đó, (1) suy ra $c = -a - b = -\frac{17b}{7} - b = \frac{-24b}{7}$

  Khi đó phương trình AC là: $\frac{17b}{7}x + by - \frac{24b}{7} = 0 \Leftrightarrow \boxed{AC: 17x + 7y - 24 = 0}$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{AC: 17x + 7y - 24 = 0}$

  Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

- BC và AB lần lượt có hệ số góc $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = -1$.

  tan(BC; CA) = $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1.k_2} = \frac{\frac{-2}{3} - 1}{1 - \frac{2}{3}} = -5$. Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có:

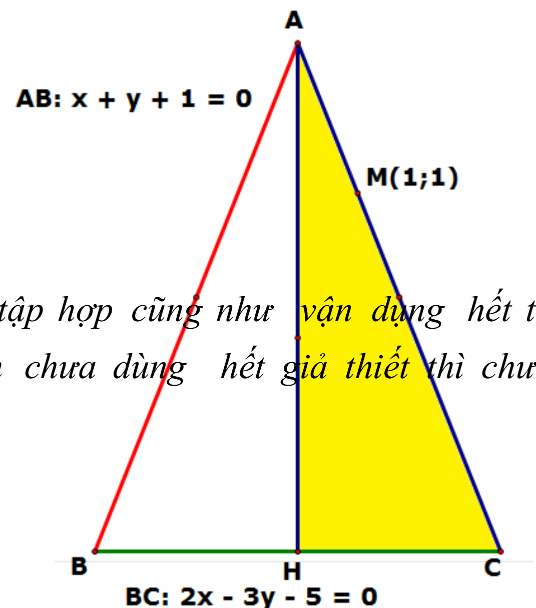
$$\tan(BC;CA) = -\tan(AB,BA) = 5 \Leftrightarrow \frac{k - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2k}{3}} = 5 \Rightarrow k = \frac{-17}{7}$$

- Khi đó phương trình AC qua M(1; 1)

  có hệ số $k = \frac{-17}{7}$ có dạng là:

  $y - 1 = \frac{-17}{7}(x-1)$

  $\Leftrightarrow \boxed{AC: 17x + 7y - 24 = 0}$



theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{AC: 17x+7y-24=0}$

■ **Lời bình:** *vẫn còn một cách giải nữa là sử dụng hàm cosin góc giữa hai đường thẳng như câu 3, nhưng để các bạn có cái nhìn tương đối tổng quan hơn nên trong câu này tác giá không trình bày. Nếu chúng ta giải theo hướng đó thì sẽ phải loại đi 1 trường hợp. Nhìn chung các lập phương trình qua 1 điểm và khuyết vecto pháp tuyến không có gì mới mẻ. nhưng nhìn nhận chúng trong góc độ hình là một tam giác cân thì vì phát hiện là phụ thuộc vào góc nhìn của người làm.*

Câu 5: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(1; 5), phương trình hai đường trung tuyến lần lượt là d_1: 9x – 4y – 11 = 0, d_2: 3x – 5y = 0. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.*

(**ĐS**: $BC: 4x-3y-11=0$)

☺ **Hướng dẫn giải**

■ **Nhận xét:** *khi đề không cho cụ thể phương trình 2 đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh nào? thì việc đầu tiên ta nên kiểm tra đỉnh đã cho có thuộc 2 đường trung tuyến đó không?*

- Nhận xét A không thuộc $d_1; d_2$. Giả sử: $\begin{cases} BM: 9x-4y-11=0 \\ CN: 3x-5y=0 \end{cases}$
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC khi đó tọa độ G thỏa hệ:

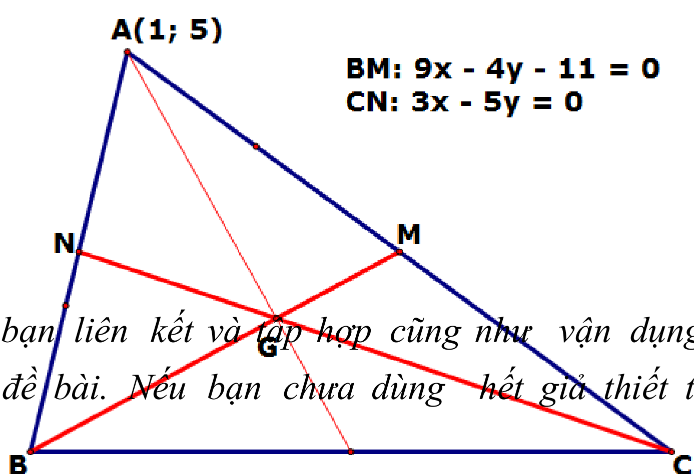
$$\begin{cases} 9x-4y-11=0 \\ 3x-5y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\left(\dfrac{5}{3};1\right)}$$

- Ta có: B thuộc BM suy ra $B\left(\dfrac{4b+11}{9};b\right)$ và C thuộc CN suy ra $C\left(c;\dfrac{3c}{5}\right)$
- Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b+9c=25 \\ 5b+3c=-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-1;-5) \\ C(5;3) \end{cases}$$



theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Khi đó BC qua C(5; 3) nhận $\overrightarrow{BC} = (6;8) = 2(3;4)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} \Leftrightarrow \boxed{BC: 4x-3y-11=0}$$

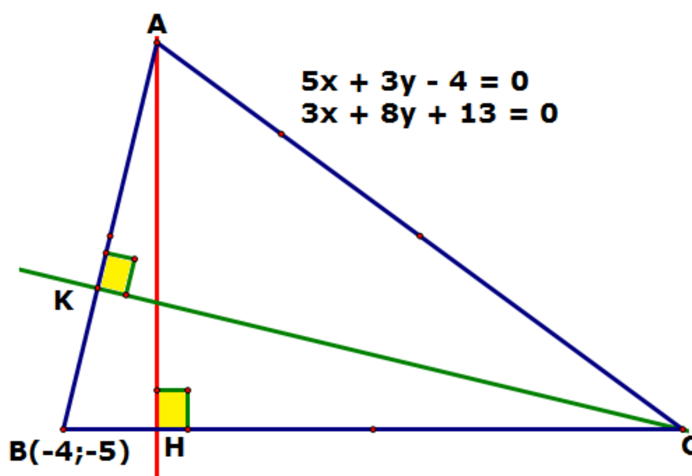
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{BC: 4x-3y-11=0}$

Câu 6: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(–4; –5) và hai đường cao có phương trình là 5x + 3y – 4 = 0 và 3x + 8y + 13 = 0. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.*

(**ĐS**: $AB: 8x-3y+17=0,\ BC: 3x-5y-13=0,\ AC: 5x+2y-1=0$)

☺ **Hướng dẫn giải**

- Nhận xét tọa độ điểm B không thuộc phương trình hai đường cao đã cho.
  Giả sử: AH: 5x + 3y – 4 = 0 và CK: 3x + 8y + 13 = 0. Trong đó H và K là chân đường cao lần lượt kẻ từ A và C.
- Ta có: BC vuông góc AH nên có dạng BC:
  3x – 5y + m = 0.
  BC qua B(–4; –5) suy ra m = – 13.
  Do đó **BC: 3x – 5y – 13 = 0.**
  Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} 3x-5y-13=0 \\ 3x+8y+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(1;-2)}$$

- Mặt khác AB vuông góc CK nên có dạng AB: 8x – 3y + n = 0. CK qua B suy ra n = 17.
  Do đó **AB: 8x – 3y + 17 = 0.**
  Khi đó tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 8x-3y+17=0 \\ 5x+3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;3)}$
- AC qua A(–1; 3) nhận $\overrightarrow{AC} = (2;-5)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5} \Leftrightarrow \boxed{AC: 5x+2y-1=0}$$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\boxed{AB: 8x-3y+17=0,\ BC: 3x-5y-13=0,\ AC: 5x+2y-1=0}$$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ trung điểm các cạnh BC, AB, AC của tam giác lần lượt là M(–1; 1), N(1; 9), P(9; 1). Lập phương trình các đường trung trực của tam giác ABC.

(**ĐS**: $AB: 5x+y-14=0,\ BC: x-y=0,\ AC: x+5y-14=0$)

☺ Hướng dẫn giải

- Theo tính chất đường trung bình trong tam giác ta có NP // BC.

  Do đó BC qua M(–1; 1) nhận $\overrightarrow{NP}=(8;-8)=8(1;-1)$ làm vecto chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1} \Leftrightarrow \boxed{BC: x-y=0}$

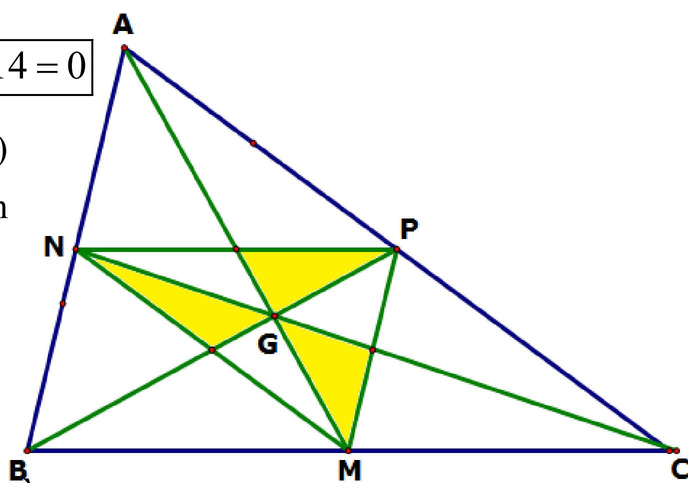
- Tương tự ta có AB qua N(1; 9) nhận $\overrightarrow{MP}=(10;2)=2(5;1)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

  $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-9}{1} \Leftrightarrow \boxed{AB: 5x+y-14=0}$

- Tương tự với AC qua P(9; 1) nhận $\overrightarrow{MN}=(2;10)=2(1;5)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

  $\dfrac{x-9}{1}=\dfrac{y-1}{5}$

  $\Leftrightarrow \boxed{AC: x+5y-14=0}$



Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\boxed{AB: 5x+y-14=0,\ BC: x-y=0,\ AC: x+5y-14=0}$$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(3; 5), C(4; –3), phương trình một phân giác trong là d: x + 2y – 8 = 0. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác.

(**ĐS**: $AC: 4x+3y-7=0$)

☺ Hướng dẫn giải

- **Gợi ý:** *vận dụng tính chất đối xứng của phân giác để thiết lập tọa độ điểm mới đó là nội dung chính của bài toán này.*

- Nhận xét B và C đều không thuộc d nên đường phân giác trong d xuất phát từ đỉnh A.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Gọi H là hình chiếu vuông góc B lên d và K là điểm đối xứng của B qua phân giác trong d.

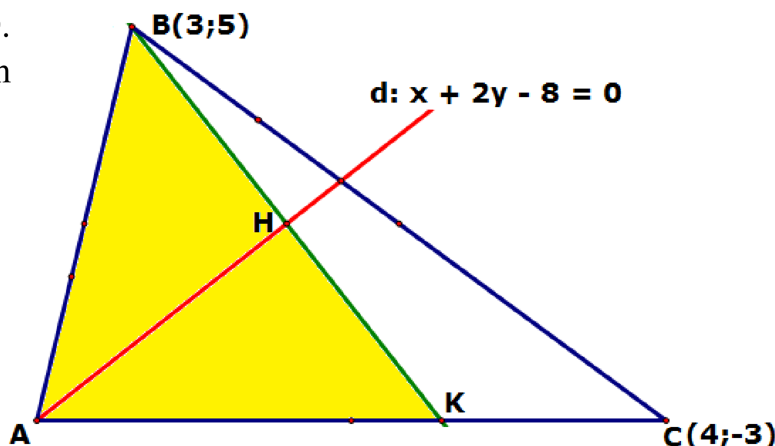
Khi đó H là trung điểm BK và K thuộc đường thẳng AC.

- Ta có BH vuông góc d: x + 2y – 8 = 0 nên BH: 2x – y + m = 0. BH qua B(3; 5) suy ra m = –1

Do đó, BH: x + 2y – 8 = 0.

Khi đó toa độ H là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+2y-8=0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(2;3)} \end{cases}$$



Lại có: H là trung điểm BK nên ta suy ra K(1; 1)

- AC qua K(1; 1) nhận $\overrightarrow{KC}=(3;-4)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow \boxed{AC: 4x+3y-7=0}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{AC: 4x+3y-7=0}$

Câu 9: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng đi qua A(2; –4) và cách điểm B(1; 2) một đoạn bằng 1.*

(**ĐS:** $35x+12y-22=0$ *hay* $x-2=0$)

☺ **Hướng dẫn giải**

■ **Đặt vấn đề và gợi ý:** *sau chủ đề góc thì nay ta đi đến chủ đề khoảng cách, các bạn cần nắm vững công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng.*

CÁCH 1:

- Đường thẳng d qua A(2; –4) có dạng là: a(x – 2) + b(y + 4) = 0 $(a^2+b^2>0)$

Trong đó $\vec{n}=(a;b)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng d.

- Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$d(B;d)=1 \Leftrightarrow \frac{|-a+6b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow 35b^2-12ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 35b=12a \end{array}\right.$$

- Với b = 0, ta chọn a = 1 khi đó phương trình d: x – 2 = 0.
- Với 35b = 12a, ta chọn a = 35 suy ra b = 12. Khi đó d: 35x + 12y – 22 = 0.

CÁCH 2:

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- TH1: đường thẳng d // Oy khi đó d: x – 2 = 0. Kiểm tra ta có d(B; d) = 1 nên nhận d: x – 2 = 0.
- Gọi phương trình đường thẳng d qua A(2; –4) có hệ số góc k: **y = k(x – 2) – 4**.

Suy ra d: $\boxed{kx - y - 2k - 4 = 0}$

- Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$d(B;d) = 1 \Leftrightarrow \frac{|-k-6|}{\sqrt{k^2+1^2}} = 1 \Leftrightarrow k^2 + 12k + 36 = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = \frac{-35}{12}$$

- Do đó phương trình đường thẳng d: $y = \frac{-35}{12}(x-2) - 4 \Leftrightarrow 35x + 12y - 22 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{35x + 12y - 22 = 0 \ hay \ x - 2 = 0}$

Câu 10: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng qua điểm M(1; –2) và cách đều hai điểm A(0; 1), B(2; 5).*

(**ĐS**: $x - 1 = 0 \ \ hay \ \ 2x - y - 4 = 0$)

☺ **Hướng dẫn giải**

■ **Nhận xét:** *tương tự như câu 9, chúng ta có thể giả sử phương trình đường thẳng cần tìm khuyết vecto pháp tuyến và dựa vào quan hệ khoảng cách để tìm ra chúng hoặc dựa vào hệ số góc của đường thẳng theo nghĩa hàm số để giải.*

CÁCH 1:

- Gọi phương trình Δ qua M(1; –2) nhận $\vec{n} = (a;b)\,(a^2 + b^2 > 0)$ có dạng là:

$$\boxed{\Delta : a(x-1) + b(y+2) = 0}$$

- Để A và B cách đều đường thẳng Δ khi

$$d(A;\Delta) = d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{|b - a + 2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2a + 5b - a + 2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra $|3b - a| = |a + 7b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = -2b \end{array}\right.$

- Với b = 0, ta chọn a = 1. Khi đó phương trình Δ là: x – 1 = 0.
- Với a = –2b, ta chọn b = –1 suy ra a = 2.

Khi đó phương trình Δ là: 2x – y – 4 = 0.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{x - 1 = 0 \ \ hay \ \ 2x - y - 4 = 0}$

CÁCH 2:

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- Δ qua M(1; –2) có dạng: $\left[\begin{array}{l} \Delta : x - 1 = x_i \\ \Delta : y = k(x-1) + 2 \end{array}\right.$

- **TH1:** $\Delta: x = 1 = x_M \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

  Xét $d(A;\Delta) = d(B;\Delta) = 1$ suy ra nhận x – 1 = 0

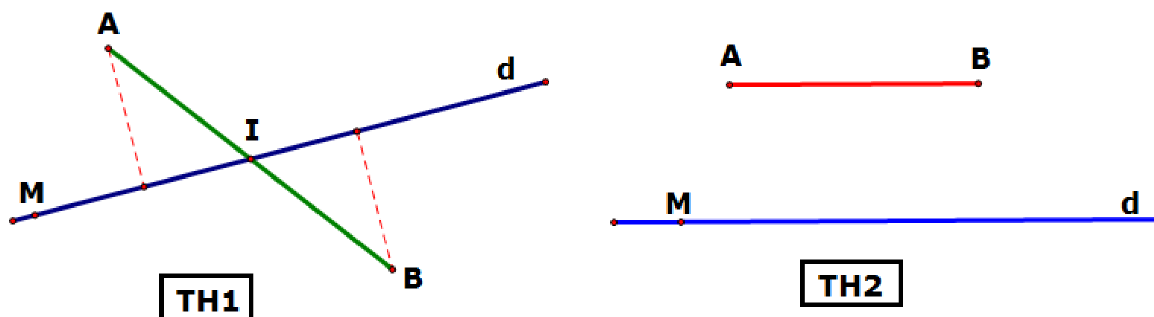
- **TH2:** $\Delta: y = k(x-1) + 2 \Leftrightarrow kx - y - k + 2 = 0$.

  Để A và B cách đều đường thẳng Δ khi

  $$d(A;\Delta) = d(B;\Delta) \Leftrightarrow |-3-k| = |k-7| \Leftrightarrow k = 2$$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{x - 1 = 0 \;\; hay \;\; 2x - y - 4 = 0}$

CÁCH 3:



- $d(A;\Delta) = d(B;\Delta)$ thì bài toán có thể xảy ra 2 trường hợp.
- **TH1**: A và B nằm khác phía so với Δ. Khi đó trung điểm của AB thuộc đường thẳng Δ.

  Gọi I là trung điểm AB suy ra I(1; 3).

  Khi đó đường thẳng d qua M(1; –2) nhận $\overrightarrow{MI} = (0;5) = 5(0;1)$ làm vecto chỉ phương nên có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (1;0)$ có dạng là: x – 1 = 0

- **TH2**: A và B cùng phía so với Δ. Khi đó AB song song Δ nên Δ qua M(1; –2) nhận $\overrightarrow{AB} = (2;4) = 2(1;2)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

  $$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{x - 1 = 0 \;\; hay \;\; 2x - y - 4 = 0}$

■ **Lời bình:** *Qua 3 cách giải trên ta có một số nhận xét sau:*

Với ***cách giải 1***, dường như không quan tâm đến vị trí tương đối giữa điểm và đường và chắc chắn luôn xảy ra 2 trường hợp, có điều xét trong "ngữ cảnh" là một bài toán khác mà 1 trong 2 đường thẳng phải loại đi 1 đường thì dường như ta gặp phải chút rắc rối rồi? Khi đó ta có thể kiểm tra lại bằng cách xét vị trí tương đối giữa điểm và đường.

Với ***cách giải 2***, đây là một cách giải hay giúp ta giảm đi số ẩn của phương trình khi đi tìm vecto pháp tuyến. Tuy nhiên bạn cần chắc rằng mình không bị sót tính huống đường thẳng qua điểm đang xét và song song trục tung Oy.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Với ***cách giải 3***,*dựa trên hình vẽ thật để ta suy ra 2 trường hợp cùng phía và khác phía. Đây thật sự là cách mà nhiều thầy cô giáo mong muốn học trò làm nhất vì nó giúp học trò phát triển trí tưởng tưởng hình học của học trò.*

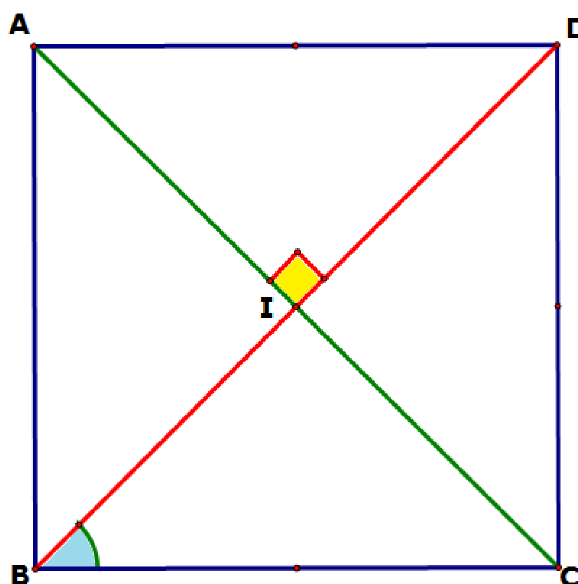
Câu 11:*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có một đỉnh A(–4; 5) và một đường chéo đặt trên thẳng 7x – y + 8 = 0. Lập phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông đó.*

(**ĐS**: $4x+3y-24=0,\ 4x+3y+1=0, 3x-4y+32=0, 3x-4y-24=0$ ***và*** $AC: x+7y-31=0$)

☺ **Hướng dẫn giải.**

■ **Nhận xét:***bài toán có nhiều điểm thú vị khi ta đã biết được góc hợp bởi các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông? Vấn đề đặt ra là chọn con đường nào là thích hợp và thu được lời giải ngắn cho bài toán. Một gợi ý nho nhỏ có thể sử dụng đến ở đây đó chính là phép biến hình.*

CÁCH 1:



● Vì A có tọa độ không thỏa phương trình 7x – y – 8 = 0 suy ra phương trình đường chéo BD là:

$BD: 7x - y - 8 = 0$.

Do AC vuông góc BD suy ra AC: x + 7y + m = 0.

AC qua A(–4; 5) suy ra m = – 31.

Vậy $AC: x+7y-31=0$

● Gọi I là giao điểm hai đường chéo AC và BD ta có tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x-y-8=0 \\ x+7y-31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{9}{2}\right)}$$

● Do I là trung điểm AC nên ta có: $\begin{cases} x_A+x_C=2x_I=-1 \\ y_A+y_C=2y_I=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=3 \\ y_C=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3;4)}$

● Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua A và hợp với AC một góc 45^0 và đường thẳng AC có hệ số góc là $k_1 = \frac{-1}{7}$. Suy ra

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$$(AC;d)=\frac{\pm\pi}{4}+k\pi \Rightarrow \tan(AC;d)=\pm 1$$

Do đó: $\dfrac{k+\frac{1}{7}}{1-\frac{k}{7}}=\pm 1 \Leftrightarrow \dfrac{7k+1}{7-k}=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\frac{3}{4} \\ k=\frac{-4}{3}\end{array}\right.$. Vậy có hai đường thẳng qua A thỏa yêu cầu trên là:

Với $k=\frac{3}{4}\Rightarrow y-5=\frac{3}{4}(x+4)\Leftrightarrow 3x-4y+32=0$

Với $k=\frac{-4}{3}\Rightarrow y-5=\frac{-4}{3}(x+4)\Leftrightarrow 4x+3y+1=0$

Đây cũng chính là hai phương trình 2 cạnh của hình vuông qua đỉnh A.

Phương trình hai cạnh hình vuông đi qua C lần lượt song song với 2 cạnh trên nên có phương trình là $d: 3x-4y+n=0 \; hay \; d': 4x+3y+n'=0$.

- d và d' lần lượt qua C(3; 4) nên ta suy ra n = 7 và n' = –24

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:

  $4x+3y-24=0,\ 4x+3y+1=0, 3x-4y+32=0, 3x-4y-24=0$ ***và***

$$AC: x+7y-31=0$$

CÁCH 2: sử dụng phép biến hình

- Tương tự như cách 1 ta tìm được phương trình AC: x + 7y – 31 = 0 và tâm $I\left(\frac{-1}{2};\frac{9}{2}\right)\Rightarrow \boxed{C(3;4)}$

- Ta có phép quay tâm I góc quay 90^0 biến điểm A thành điểm B khi đó tọa độ B thỏa biểu thức tọa độ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B=x_I+(x_A-x_I)\cos 90^0-(y_A-y_I)\sin 90^0 \\ y_B=y_I+(x_A-x_I)\sin 90^0+(y_A-y_I)\cos 90^0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=10 \end{cases}\Rightarrow \boxed{B(-1;1)}\xrightarrow{I}\boxed{D(0;8)}$$

- Phương trình AB qua B(–1; 1) nhận $\overrightarrow{AB}=(3;-4)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-4}\Leftrightarrow 4x+3y+1=0$, tương tự ta có **CD: 4x + 3y – 24 = 0**

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- Phương trình AD qua D(0; 8) nhận $\overrightarrow{AD}=(4;3)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$\frac{x}{4} = \frac{y-8}{3} \Leftrightarrow 3x - 4y + 32 = 0$, tương tự ta có **BC: 3x – 4y – 24 = 0**

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là**:**

$$4x + 3y - 24 = 0,\ 4x + 3y + 1 = 0, 3x - 4y + 32 = 0, 3x - 4y - 24 = 0 \ \textbf{\textit{và}}$$

$$AC: x + 7y - 31 = 0$$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình hai đường chéo của hình vuông, biết hình vuông có tâm I(–2 ; 0) và phương trình một cạnh hình vuông là d: x + 3y – 3 = 0.

(Bài tập tự luyện)

☺ **Hướng dẫn giải**

- Gọi $M(3-3m;m) \in: x + 3y - 3 = 0$ là đỉnh của hình vuông.

  Ta có: $d(I;d) = \frac{|(-2) + 3.0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

- Suy ra $IM = d(I;d).\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{10}}.\sqrt{2} = \sqrt{5}$.

  Ta có: $IM^2 = 5 \Leftrightarrow (3 - 3m + 2)^2 + (m - 0)^2 = 5$

  $\Leftrightarrow (5 - 3m)^2 + m^2 = 5 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$

- **TH1:** Với M(–3; 2) và I(–2; 0), ta có phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\Delta_1 : \frac{x+2}{-3+2} = \frac{y-0}{2-0} \Leftrightarrow 2x + y + 4 = 0$

- **TH2:** Với M(0; 1) và I(–2; 0), ta có phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\Delta_1 : \frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là**:** $\boxed{2x + y + 4 = 0 \ hay \ x - 2y + 2 = 0}$

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tma giác ABC có đỉnh A(2; 4), B(0; –1), C(6; 2). Lập phương trình đường thẳng Δ qua A sao cho:

a. Δ chia ΔABC thành hai ΔABM và ΔACM mà diện tích ΔACM gấp đôi diện tíchΔABM.

b. Δ cách đều điểm B và C.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

(Bài tập tự luyện)

☺ **Hướng dẫn giải**

- Ta có: $S_{ACM} = 2S_{ABM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH.CM = \frac{1}{2}AH.BM \Leftrightarrow CM = 2BM$ và do $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BM}$ ngược hướng nên:

$$\overrightarrow{CM} = -2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_C = -2(x_M - x_B) \\ y_M - y_C = -2(y_M - y_B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 6 = -2(x_M - 0) \\ y_M - 2 = -2(y_M + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{M(2;0)}$$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và M mà hoành độ A và B bằng nhau nên: $\boxed{\Delta : x - 2 = 0}$

- Gọi $\vec{n} = (a;b)$ $(a^2 + b^2 > 0)$ là vecto pháp tuyến của Δ . Δ qua A nên có dạng:

$$\boxed{\Delta : a(x-2) + b(y-4) + 0}$$

Ta có: $d(\text{B};\Delta) = d(\text{C};\Delta) \Leftrightarrow \frac{|-2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = -b \\ 2a = 7b \end{array}\right.$

- Với 2a = – b, ta chọn a = 1, b = –2 suy ra phương trình là: **x – 2y + 6 = 0.**
- Với 2a = 7b, ta chọn a = 7, b = 2 suy ra phương trình là: 7**x + 2y – 22 = 0.**

Câu 14: *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm* $\text{P}(-7;8)$ *và hai đường thẳng* $d_1 : 2x + 5y + 3 = 0$*;* $d_2 : 5x - 2y - 7 = 0$ *cắt nhau tại A . Viết phương trình đường thẳng* d_3 *đi qua P tạo với* d_1*,* d_2 *thành tam giác cân tại A và có diện tích bằng* $\frac{29}{2}$.

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Ta có $\text{A}(1;-1)$ và $d_1 \perp d_2$. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1, d_2 là:

Δ_1: $7x + 3y - 4 = 0$ và Δ_2: $3x - 7y - 10 = 0$

- d_3 tạo với d_1, d_2 một tam giác vuông cân $\Rightarrow d_3$ vuông góc với Δ_1 hoặc Δ_2..

$\Rightarrow$ Phương trình của d_3 có dạng: $7x + 3y + C = 0$ hay $3x - 7y + C' = 0$

Mặt khác, d_3 qua $P(-7;8)$ nên $C = 25$, $C' = 77$

Suy ra : $d_3 : 7x + 3y + 25 = 0$ hay $d_3 : 3x - 7y + 77 = 0$

theo cách kết hợp phần giúp cho bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- Theo giả thiết tam giác vuông cân có diện tích bằng $\frac{29}{2}$

  $\Rightarrow$ cạnh huyền bằng $\sqrt{58}$

  Suy ra độ dài đường cao A H $= \frac{\sqrt{58}}{2} = d(A, d_3)$

- Với $d_3 : 7x + 3y + 25 = 0$ thì $d(A; d_3) = \frac{\sqrt{58}}{2}$ (tm)

- Với $d_3 : 3x - 7y + 77 = 0$ thì $d(A; d_3) = \frac{87}{\sqrt{58}}$ (loại)

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{d_3 : 7x + 3y + 25 = 0}$

Câu 15: *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) :* $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. *Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d: 3x + y – 2 = 0 và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.*

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Đường thẳng d' song song với d : 3x+y+m=0.
- IH là khoảng cách từ I đến d' : $IH = \frac{|-3+4+m|}{5} = \frac{|m+1|}{5}$
- Xét tam giác vuông IHB : $IH^2 = IB^2 - \left(\frac{AB^2}{4}\right) = 25 - 9 = 16$
- $\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25} = 16 \Leftrightarrow |m+1| = 20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 19 \rightarrow d' : 3x + y + 19 = 0 \\ m = -21 \rightarrow d' : 3x + y - 21 = 0 \end{array}\right.$

Câu 16: *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn hai đường tròn* $(C') : x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ *và đường tròn* $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, *cùng đi qua M(1; 0). Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn* $(C), (C')$ *lần lượt tại A, B sao cho MA= 2MB.*

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- Gọi d là đường thẳng qua M có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b) \Rightarrow d : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = bt \end{cases}$

- Đường tròn $(C_1): I_1(1;1), R_1 = 1. (C_2): I_2(-2;0), R_2 = 3$, suy ra :

$$(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=1, (C_2):(x+2)^2+y^2=9$$

- Nếu d cắt (C_1) tại A :

$$\Rightarrow (a^2+b^2)t^2-2bt=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \to M \\ t=\dfrac{2b}{a^2+b^2} \end{array}\right. \Rightarrow A\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2};\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)$$

- Nếu d cắt (C_2) tại B :

$$\Rightarrow (a^2+b^2)t^2+6at=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \to M \\ t=-\dfrac{6a}{a^2+b^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow B\left(1-\frac{6a^2}{a^2+b^2};-\frac{6ab}{a^2+b^2}\right)$$

- Theo giả thiết : MA=2MB $\Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2\ (*)$

– Ta có : $\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)^2=4\left[\left(\dfrac{6a^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)^2\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{4b^2}{a^2+b^2}=4.\frac{36a^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow b^2=36a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-6a \to d: 6x+y-6=0 \\ b=6a \to d: 6x-y-6=0 \end{array}\right.$$

Câu 17: *Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn có phương trình* $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ *và* $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0.$ *Lập phương trình tiếp tuyến chung của* (C_1) *và* (C_2).

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- $(C_1): x^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow I_1(0;2), R_1=3,$

  $(C_2): (x-3)^2+(y+4)^2=9 \Rightarrow I_2(3;-4), R_2=3$

- Nhận xét : $I_1I_2=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<3+3=6 \Rightarrow (C_1)$ không cắt (C_2)

  Gọi d : ax+by+c =0 ($a^2+b^2 \neq 0$) là tiếp tuyến chung , thế thì :

  $d(I_1,d)=R_1, d(I_2,d)=R_2$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3(1) \\ \dfrac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3(2) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2b+c| = |3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-4b+c = 2b+c \\ 3a-4b+c = -2b-c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ 3a-2b+2c = 0 \end{array} \right.$$. Mặt khác từ (1) : $(2b+c)^2 = 9(a^2+b^2)$

- **TH1:** a=2b thay vào (1) :

$$(2b+c)^2 = 9(4b^2+b^2) \Leftrightarrow 41b^2-4bc-c^2 = 0.\Delta'_b = 4c^2+41c^2 = 45c^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{2b-3\sqrt{5}c}{4} \\ b = \dfrac{\left(2+3\sqrt{5}\right)c}{4} \end{array} \right.$$

– Do đó ta có hai đường thẳng cần tìm :

$$d_1 : \frac{\left(2-3\sqrt{5}\right)}{2}x + \frac{\left(2-3\sqrt{5}\right)}{4}y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(2-3\sqrt{5}\right)x + \left(2-3\sqrt{5}\right)y + 4 = 0$$

$$d_1 : \frac{\left(2+3\sqrt{5}\right)}{2}x + \frac{\left(2+3\sqrt{5}\right)}{4}y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(2+3\sqrt{5}\right)x + \left(2+3\sqrt{5}\right)y + 4 = 0$$

- **TH2:** $c = \dfrac{2b-3a}{2}$ thay vào (1) : $\dfrac{\left|2b + \dfrac{2b-3a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \Leftrightarrow |2b-a| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow (2b-a)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \to c = -\dfrac{a}{2} \\ b = \dfrac{4a}{3} \to c = -\dfrac{a}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, a = -2c \\ b = \dfrac{4a}{3}, a = -6c \end{array} \right.$$

– Vậy có 2 đường thẳng : $d_3 : 2x-1=0$, $d_4 : 6x+8y-1=0$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

Câu 18: *Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :*

(C_1) : $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 225$ và (C_2) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Ta có (C) với tâm I(5;–12), bán kính R = 15 và (C') có tâm J(1;2) và bán kinh R'=5.

  Gọi d là tiếp tuyến chung có phương trình : ax+by+c=0 ($a^2+b^2 \neq 0$).

- Khi đó ta có : $\begin{cases} d(I,d) = \dfrac{|5a-12b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 15\,(1) \\ d(J,d) = \dfrac{|a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5\,(2) \end{cases}$

  Từ (1) và (2) suy ra :

  $$|5a-12b+c| = 3|a+2b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5a-12b+c = 3a+6b+3c \\ 5a-12b+c = -3a-6b-3c \end{array}\right.$$

  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-9b=c \\ -2a+\dfrac{3}{2}b = c \end{array}\right.$. Thay vào (1) : $|a+2b+c| = 5\sqrt{a^2+b^2}$

- **TH1: c = a – 9b** thay vào (1) :

  $$(2a-7b)^2 = 25(a^2+b^2) \Leftrightarrow 21a^2+28ab-24b^2 = 0$$

  Suy ra : $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{14-10\sqrt{7}}{21} \rightarrow d : \left(\dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x + y - \dfrac{175+10\sqrt{7}}{21} = 0 \\ a = \dfrac{14+10\sqrt{7}}{21} \rightarrow d : \left(\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x + y - \dfrac{175-10\sqrt{7}}{21} = 0 \end{array}\right.$

- **TH2:**

  $$c = -2a+\frac{3}{2}b \Rightarrow (1) : (7b-2a)^2 = 100(a^2+b^2) \Leftrightarrow 96a^2+28ab+51b^2 = 0$$

  (Vô nghiệm).

Câu 19: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M (2;4)*. *Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại 2 điểm A và B, sao cho M là trung điểm của AB*

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Đường tròn (C) :

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$(x-1)^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow I(1;3), R=2, P_{M/(C)}=1+1-4=-2<0 \Rightarrow M$ nằm trong hình tròn (C) .

- Gọi d là đường thẳng qua M(2;4) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d:\begin{cases} x=2+at \\ y=4+bt \end{cases}$

  Nếu d cắt (C) tại A,B thì :

  $(at+1)^2+(bt+1)^2=4 \Leftrightarrow (a^2+b^2)t^2+2(a+b)t-2=0(1)$

  (có 2 nghiệm t). Vì vậy điều kiện :

  $\Delta'=(a+b)^2+2(a^2+b^2)=3a^2+2ab+3b^2>0(*)$

- Gọi $A(2+at_1;4+bt_1), B(2+at_2;4+bt_2) \Rightarrow$ M là trung điểm AB thì ta có hệ :

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 4+a(t_1+t_2)=4 \\ 8+b(t_1+t_2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1+t_2)=0 \\ b(t_1+t_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1+t_2=0$.

  Thay vào (1) khi áp dụng vi ét ta được :

  $\Leftrightarrow t_1+t_2=-\dfrac{2(a+b)}{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow a=-b$

  $\Rightarrow d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{1} \Leftrightarrow d:x+y-6=0$

Câu 20: *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm P(1;3).Viết phương trình các tiếp tuyến PE, PF của đường tròn (C), với E, F là các tiếp điểm.*

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Đường tròn (C): $(x-3)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow I(3;-1), R=2$.

  Giả sử đường thẳng qua P có véc tơ pháp tuyến

  $\vec{n}(a;b) \Rightarrow d:a(x-1)+b(y-3)=0$

  Hay : ax+by–(a+3b)=0 (*).

- Để d là tiếp tuyến của (C) thì khoảng cách từ tâm I đến d bằng bán kính :

  $\Leftrightarrow \dfrac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$

  $\Leftrightarrow (a-2b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 4ab-3b^2=0$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

$\Leftrightarrow b(4a-3b)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0\rightarrow a(x-1)=0\leftrightarrow x-1=0 \\ b=\frac{4}{3}a\rightarrow a(x-1)+\frac{4}{3}a(y-3)=0\leftrightarrow 3x+4y-6=0 \end{array}\right.$$

Câu 21: *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phương trình đường tròn* $(C): x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ *có tâm I và Δ: mx + 4y = 0. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.*

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Đường tròn (C) có tâm I(1; m), bán kính R = 5.Gọi H là trung điểm của dây cung AB.
- Ta có IH là đường cao của tam giác IAB và IH =

$$d(I,\Delta)=\frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}}=\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}$$

- Mặt khác, $AH=\sqrt{IA^2-IH^2}=\sqrt{25-\frac{(5m)^2}{m^2+16}}=\frac{20}{\sqrt{m^2+16}}$
- Diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB}=12\Leftrightarrow 2S_{\Delta IAH}=12$

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta).AH=12\Leftrightarrow 25|m|=3(m^2+16)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 3 \\ m=\pm\frac{16}{3} \end{array}\right.$$

Câu 22: *Trong hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng* $d: 2x-y-2=0$ *và đường tròn* $C: (x-1)^2+(y-1)^2=10$. *Lập phương trình các tiếp tuyến của đường tròn* (C) *biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc* 45^0.

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Đường tròn có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$.

  Gọi $\vec{n}(a,b)$ là vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến $(a^2+b^2\neq 0)$

- Vì đường thẳng tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^0 nên

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ b=-3a \end{array}\right.$$

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

- Với $a = 3b$, phương trình tiếp tuyến có dạng $3x + y + c = 0(\Delta)$

$$d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|4+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 6 \\ c = -14 \end{array}\right.$$

- Với $b = -3a$, phương trình tiếp tuyến có dạng $x - 3y + c = 0(\Delta)$

$$d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-2+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -8 \\ c = 12 \end{array}\right.$$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm là: $3x + y + 6 = 0$; $3x + y - 14 = 0$;

$x - 3y - 8 = 0$; $x - 3y + 12 = 0$.

Câu 23: *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) tâm I(–1; 1), bán kính R=1, M là một điểm trên $(d): x - y + 2 = 0$. Hai tiếp tuyến qua M tạo với (d) một góc 45^0 tiếp xúc với (C) tại A, B. Viết phương trình đường thẳng AB.*

(Bài tập tự luyện)

☺ Hướng dẫn giải

- Dễ thấy $I \in (d)$. Hai tiếp tuyến hợp với (*d*) một góc 45^0 suy ra tam giác *MAB* vuông cân và tam giác *IAM* cũng vuông cân . Suy ra: $IM = \sqrt{2}$.

- $M \in (d) \Rightarrow M(a; a+2)$, $\overrightarrow{IM} = (a+1; a+1)$,

$$IM = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|a+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -2 \end{array}\right..$$

Suy ra có 2 điểm thỏa mãn: $M_1(0; 2)$ và $M_2(-2; 0)$.

- Đường tròn tâm M_1 bán kinh $R_1=1$ là (C_1): $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$.Khi đó *AB* đi qua giao điểm của (C) và (C_1) nên

$$AB: x^2 + y^2 - 4y + 3 = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 \Leftrightarrow \boxed{x + y - 1 = 0}.$$

- Đường tròn tâm M_2 bán kinh $R_2=1$ là (C_2): $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$.Khi đó *AB* đi qua giao điểm của (C) và (C_2) nên

$$AB: x^2 + y^2 + 4x + 3 = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 \Leftrightarrow \boxed{x + y + 1 = 0}.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn: $x + y - 1 = 0$ và $x + y + 1 = 0$

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng d: x + y + m = 0. Tìm m để trên đường

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

(**Bài tập tự luyện**)

☺ **Hướng dẫn giải**

- Từ phương trình chính tắc của đường tròn ta có tâm I(1;–2), R = 3, Do đótừ A kẻ được 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn.
- Lại có $AB \perp AC$ => tứ giác ABIC là hình vuông cạnh bằng 3 $\Rightarrow IA = 3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |m-1| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=7 \end{array}\right.$$

Câu 25: *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) :* $x^2+y^2+2x-8y-8=0$. *Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d: 3x+y–2=0 và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.*

(**Bài tập tự luyện**)

☺ **Hướng dẫn giải**

- Đường tròn (C) có tâm I(–1;4), bán kính R = 5. Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là Δ,

  Suy ra Δ : 3x+y+c=0, c≠2 (vì // với đường thẳng 3x+y – 2=0)
- Vì đường thẳng cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

  Suy ra khoảng cách từ tâm I đến Δ bằng $\sqrt{5^2-3^2}=4$

$$\Rightarrow d(I,\Delta) = \frac{|-3+4+c|}{\sqrt{3^2+1}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=4\sqrt{10}-1 \\ c=-4\sqrt{10}-1 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn c≠2)}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $3x+y+4\sqrt{10}-1=0$ hoặc $3x+y-4\sqrt{10}-1=0$.

theo cách 1 góp phần giúp các bạn liên kết và tập hợp cũng như vận dụng hết tất cả những giả thiết có được từ đề bài. Nếu bạn chưa dùng hết giả thiết thì chưa

CHỦ ĐỀ 2.3:

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN.

■ **NHỮNG CÁCH THỨC ĐỂ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN:**

Đây là một chủ đề được đề cập khá nhiều trong các đề thi những năm qua, do các bài toán của chúng khá phong phú và đa dạng nên trong phần giới thiệu cách lập phương trình đường tròn, thầy sẽ không trình bày theo hướng phân dạng, mà sẽ trình bày theo hướng phương pháp chung và một số các lưu ý cũng như những kỹ năng cần nhớ khi lập phương trình đường tròn.

► **Cách 1:*“ Tìm tâm và bán kính của đường tròn ”(theo dạng tổng quát của pt đường tròn)***

Phương pháp này dựa trên phương trình tổng quát của đường tròn

$$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

trong đó tâm I(a; b) và R là bán kính của đường tròn (C).

- Việc tìm tâm I(a; b) ta có thể hiểu đơn giản là việc tìm điểm → quy về bài toán tìm tọa độ điểm.
- Ta cũng có thể hiểu, với 3 ẩn a , b, R ta cần lập 3 phương trình → giải và suy ra a, b, R → pt (C).

► **Cách 2:*“lập phương trình dạng khai triển của đường tròn”.***

Phương pháp này dựa trên phương trình khai triển của đường tròn (C):

$$(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

trong đó tâm I(a; b) và $R^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.

- Một trong những cách phổ biến thường thấy là tìm **“3 điểm thuộc đường tròn”.**
- Ta cũng có thể hiểu, với 3 ẩn a , b, c ta cần lập 3 phương trình → giải và suy ra a, b, c → pt (C).

► **Những lưu ý khi lập phương trình đường tròn.**

- Xác định rõ hướng đi của bài toán là phân tích theo cách 1 hay cách 2 (có những bài toán có thể làm được bằng cả hai cách nhưng độ dài ngắn khác nhau tùy vào mỗi bài toán).
- Khi bài toán yêu cầu lập phương trình đường tròn trong tam giác, ta cần liên hệ lại một số kiến thức liên quan phần hình học lớp 9 như:

  + Các góc đặc biệt trong đường tròn (góc nội tiếp, góc ở tâm, góc giữa tiếp tuyến và dây cung,...)

  + Các kiến thức về tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp đường tròn,...

+ Đường tròn bàng tiếp tam giác, đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác,...

+ Vị trí tương đối giữa điểm, đường thẳng, đường tròn đối với đường tròn. (các chủ đề quen thuộc như đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm, tiếp tuyến của đường tròn, tiếp tuyến chung của hai đường tròn v,v...)

+ Đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm).

+ Một số các bài toán điển hình, các phép chứng minh tiêu biểu đã làm ở lớp 9. (đã được trình bày dưới dạng các bổ đề – tính chất ở lý thuyết chương 1).

- Nắm vững và biết cách vận dụng nhuần nhuyễn các bài toán tìm điểm (ở chủ đề 1) và lập phương trình đường thẳng (ở chủ đề 2). Đây có thể xem là hai yếu tố không kém phần quan trọng để giải quyết bài toán.
- Ngoài ra, ta cũng có thể vận dụng **phép biến hình** (đã học trong chương trình hình học lớp 11) tiêu biểu là:

+ *Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay (đẳng cự – bảo toàn khoảng cách giữa các yếu tố điểm, đường thẳng, đường tròn, v.v...)*

+ *Phép vị tự, phép nghịch đảo (bảo giác – bảo toàn góc giữa các yếu tố liên quan trong hình học).*

- Cũng cần lưu ý đến chủ đề "tiếp xúc" trong bài toán viết phương trình đường tròn. (các bài toán thi tuyển sinh đại học những năm qua đều thường xuyên xoay quanh chủ đề này !)

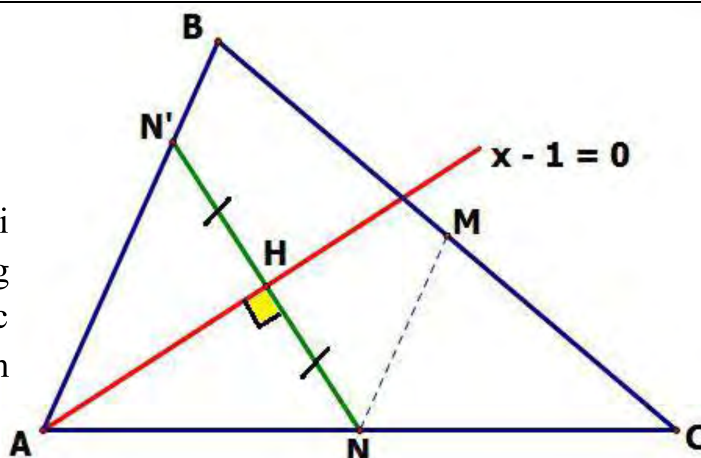
Thầy sẽ xét các bài toán sau đây làm ví dụ để minh họa cho các cáchtrên. (Để các bạn tiện theo dõi, mỗi một ví dụ sẽ là một dạng hình quen thuộc mà đề thi hay đề cập).

BÀI TOÁN 1 (ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC THƯỜNG). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$ và $N\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của BC, AC. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC biết rằng đường phân giác trong góc BAC là x – 1 = 0.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC → tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

_ Ta nhận thấy đề cho ta một "gợi ý" cực kì quan trọng →phương trình đường phân giác trong góc A → nó giúp ta tìm thêm "điểm



mới" cụ thể ở đây là điểm N' (việc tìm phân giác các bản có thể xem lại bài tập chủ đề 2 và 3 của chương 2).

_ Khi có thêm điểm N' ∈AB →viết phương AB qua N' và AB // MN → tìm được tọa độ điểm A.

_ Khi có tọa độ điểm A → vì N là trung điểm AC → tọa độ C.

_ Khi có tọa độ điểm C → vì M là trung điểm BC → toa độ điểm B.

_ Để lập phương trình đường tròn (C) lúc này ta có hai hướng đi khả dĩ nhất đó chính là

+ **Hướng thứ 1**: theo cách 2 của phương pháp, ta gọi dạng khai triển của phương trình đường tròn →cho A, B, C ∈ (C) → giải hệ 3 phương trình 3 ẩn a, b, c → phương trình (C).

+ **Hướng thứ 2**: Ta viết phương trình 2 đường trung trực của hai cạnh AB và AC → AB ∩ AC = tâm I → IA = R → theo cách 1 của phương pháp là xác định tâm và bán kính.

(Ở đây đối với bài toán này, ta sẽ giải theo hướng thứ 1)

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi H là hình chiếu của N lên phân giác trong góc A (d: x – 1 = 0) và N' là điểm đối xứng của A qua d (N' ∈ AB và H là trung điểm NN')

* Ta có HN ⊥ d: x – 1 = 0 ⇒ HN: y + m = 0, HN qua $N\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow m=\frac{-5}{2}$. Vậy HN: $y-\frac{5}{2}=0$.

Lại có H = HN ∩ d ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-\frac{5}{2}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}\Rightarrow H\left(1;\frac{5}{2}\right)$$

* Mặt khác, H là trung điểm NN' ⇒ $N'\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

* Phương trình AB qua $N'\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ nhận $\overrightarrow{MN}=\left(-1;-1\right)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\frac{x-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{y-\frac{5}{2}}{-1}\Leftrightarrow\boxed{AB:x-y+1=0}$

* Ta có A = AB ∩ d

⇒Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;2)}$

* Do N là trung điểm AC ⇒ $\boxed{C(0;3)}$ và M là trung điểm BC ⇒ $\boxed{B(3;4)}$

* Gọi phương trình khai triển của đường tròn (C) cần tìm có dạng là:

  (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó tâm I(a; b) và $R^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.

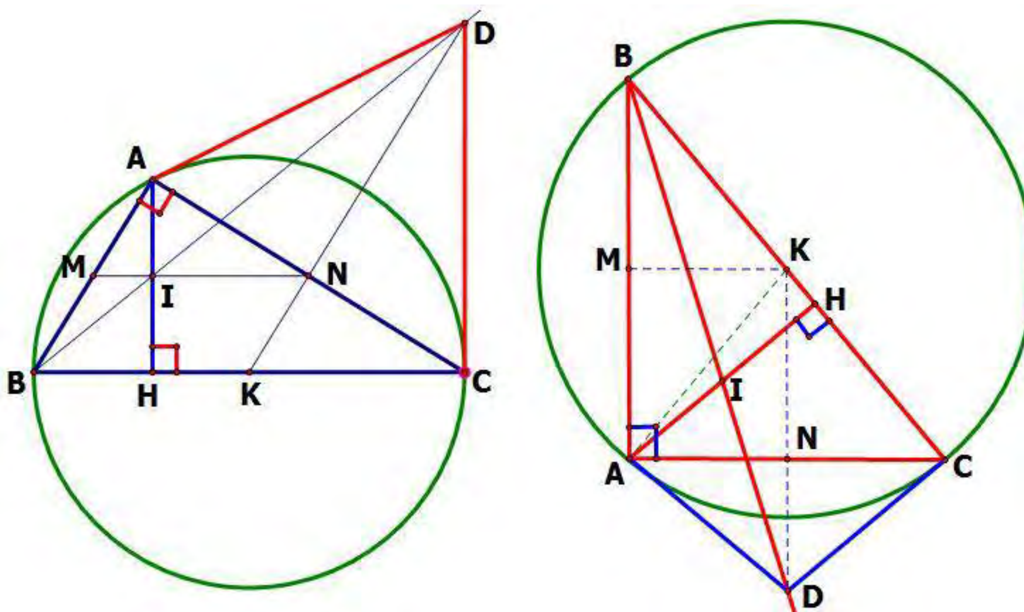
* Ta có: $\begin{cases} A \in (C) \\ B \in (C) \\ C \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2a-4b+c=0 \\ 25-6a-8b+c=0 \\ 9-6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-4b+c=-5 \\ -6a-8b+c=-25 \\ -6b+c=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{7}{2} \\ c=12 \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): x^2+y^2-3x-7y+12=0}$

■ **Lời bình:**Bài toán gốc có thể là cho tọa độ của ba điểm A(1;2), B(3; 4), C(0; 3) và dĩ nhiên yêu cầu chúng ta viết phương tình đường tròn đi qua 3 điểm đó. Tuy nhiên khi lồng vào trong tam giác thì các bạn phải vượt qua “nút thắt” đầu tiên đó chính là đường phân giác trong của tam giác. Và chắc chắn để viết được phương trình đường tròn thì công cụ tìm thêm điểm mới hay phương trình đường thẳng mới là cực kì quan trọng. Vì vậy, để làm tốt bài tập chủ đề 3 về mảng viết phương trình đường tròn này, bạn nhất thiết phải nắm rất vững những kỹ năng tìm tọa độ điểm và viết phương trình đường.

BÀI TOÁN 2 (ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC VUÔNG). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt BI tại D. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết phương trình cạnh BC là x – y – 2 = 0 và D(–1; –1) và đỉnh A nằm trên đường thẳng d: 3x – 2y + 6 = 0.

☺**Nhận xét và ý tưởng :**



_ Ta xét thấy có thể viết được phương trình đường CD qua D và vuông BC → tìm được tọa độ đỉnh C bằng cách BC ∩ CD → tọa độ C.

_ Đến đây chúng ta chỉ còn duy nhất 1 gợi ý đó chính là A ∈ d: 3x – 2y + 6 = 0 (nhưng gợi ý này chỉ giúp tat ham số điểm A → nên ta cần 1 phương trình để giải tìm tọa độ của A).

_ Quan sát hình vẽ, ta nhận thấy AD = DC → làm sao chứng minh ? → chứng minh ΔACD cân tại D.

_ Để chứng minh 1 tam giác là tam giác cân → ta chứng minh DN (theo hình vẽ) vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao (nếu gọi N là trung điểm AC) → chứng minh DN ⊥ AC (chứng minh trực tiếp vuông góc tương đối khó khăn → gián tiếp qua song song ? xet thấy AB ⊥ AC → ta chứng minh DN // AB)

_ Đến đây để chứng minh DN // AB → vận dụng định lý Thales đảo. (bạn đọc có thể xem lại lý thuyết chương 1 để hiểu rõ hơn).

_ Để viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC → ta cần tâm K trung điểm BC và bán kính BK → như vậy mục tiêu của ta tiếp theo là tìm tọa độ điểm B → Để tìm B → B = BC ∩ BA → ta viết phương trình AB qua A và AB ⊥ AC.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC. Ta có ΔABC có MN là đường trung bình

Suy ra: MN // BC $\Rightarrow \dfrac{IM}{IN} = \dfrac{HB}{HC}$ (1)

Lại có AH // CD (do cùng vuông AB) $\Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{HB}{HC}$ (2)

Từ (1), (2) ta suy ra $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{HB}{HC}$

⇒ BM // DM (theo định lý Thales đảo) mà BM ⊥ AC

Suy ra DM ⊥ AC ⇒ DM là đường cao ΔADC.

Mặt khác, DM là đường trung tuyến ΔADC ⇒ΔADC cân tại C ⇒ $\boxed{AD = CD}$

* Ta có CD ⊥ BC: x – y – 2 = 0

⇒ CD: x + y + m = 0, CD qua D(–1 ; –1) ⇒m = 2

Vậy CD : x + y + 2 = 0. Ta có Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(0;-2)}$$

* Ta có A ∈ d: 3x – 2y + 6 = 0 ⇒A(2a; 3a + 3) và ta có $\overrightarrow{DA} = (2a+1; 3a+4)$

Lại có : $AD = CD = \sqrt{2} \Leftrightarrow DA^2 = 2 \Leftrightarrow (2a+1)^2 + (3a+4)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 13a^2 + 28a + 15 = 0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow A_1(-2;0) \\ a=\dfrac{-15}{13} \Rightarrow A_2\left(\dfrac{-30}{13};\dfrac{-6}{13}\right) \end{array}\right.$. Ta loại điểm A_1 vì khi đó $CA_1 \perp BC$.

Vậy điểm A thỏa mãn là $\boxed{A\left(\dfrac{-30}{13};\dfrac{-6}{13}\right)}$

* Ta có AB qua $A\left(\dfrac{-30}{13};\dfrac{-6}{13}\right)$ và nhận $\overrightarrow{CA} = \left(\dfrac{-30}{13};\dfrac{20}{13}\right)$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng là: $-3\left(x+\dfrac{30}{13}\right)+2\left(y+\dfrac{6}{13}\right)=0 \Leftrightarrow AB: 3x-2y+6=0$ (đây chính là đường thẳng d ban đầu của đề)

* Ta có B = AB ∩ BC ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x-2y+6=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-10;-12)}$$

* Mặt khác trung điểm K của cạnh huyền BC chính là tâm đường tròn (C) ngoại tiếpΔABC

Suy ra $K(-5;-7)$ và $KC = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$ là bán kính của (C).

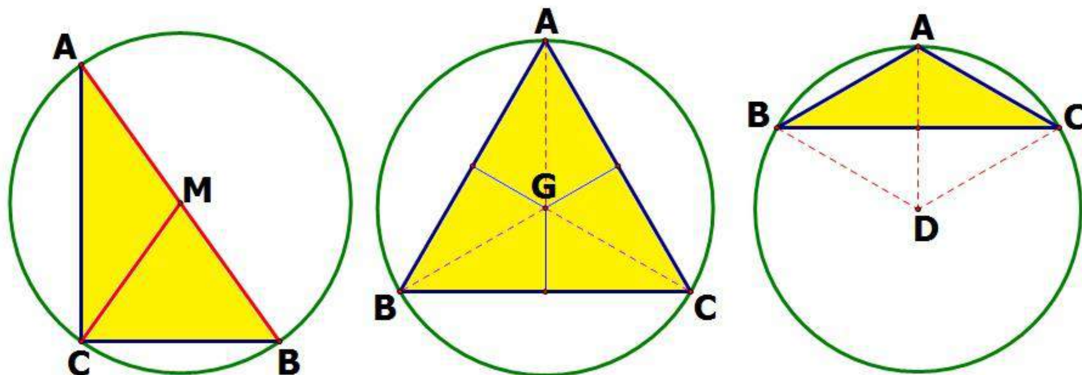
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): (x+5)^2 + (y+7)^2 = 50}$

■ **Lời bình:**Về tư tưởng hướng đi của bài toán cũng là viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm tuy nhiên nếu 3 điểm đó lập thành những tam giác đặc biệt thì việc tìm tâm đường tròn ngoại tiếp trở nên dễ dàng hơn rất nhiều.

+ Giả sử: **ΔABC vuông** tại A thì trung điểm cạnh huyền BC chính là tâm I

+ Giả sử: **ΔABC đều** thì trọng tâm G của tam giác ABC chính là tâm I

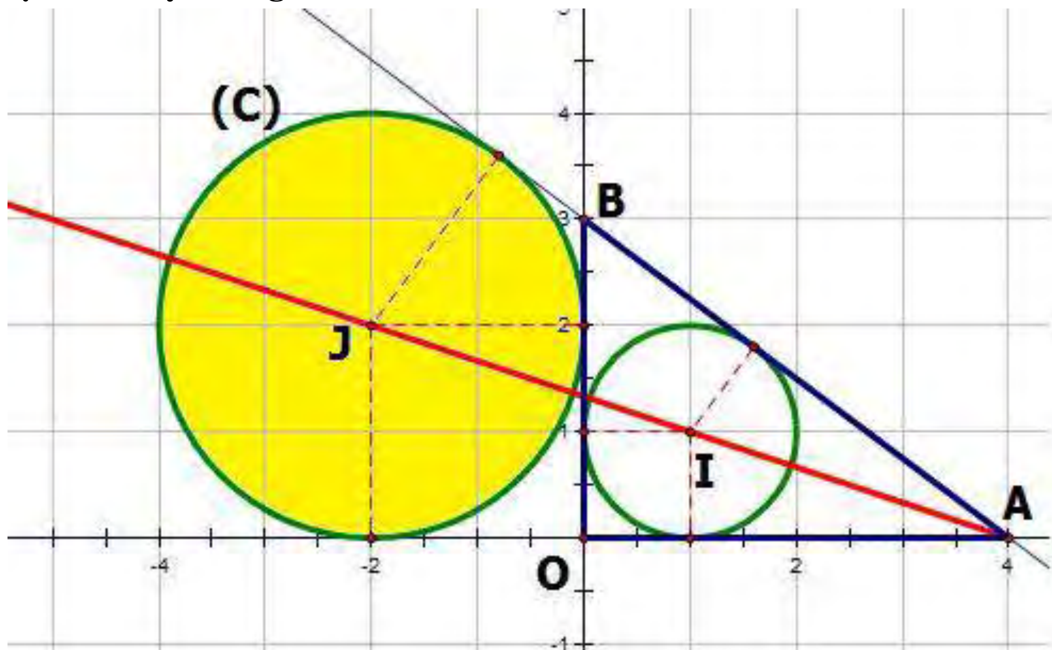
+ Giả sử: **ΔABC cân tại A** có góc $BAC = 120^o$ thì tâm I chính là đỉnh thứ 4 của hình thoi ACDB.



Có thể thấy **việc phải chứng minh** một kết quả do quá trình "quan sát, phỏng đoán, đo đạc" là cực kì quan trọng. Ở đây bài toán này đã vận dụng định lý Thales, một trong những định lý hay về chứng minh song song, thẳng hàng (bạn đọc có thể xem lại lý thuyết này ở chương 1).

BÀI TOÁN 3 (ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP MỘT GÓC CỦA TAM GIÁC). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tọa độ điểm A(4; 0), B(0; 3). Viết phương trình đường tròn bàng tiếp góc A củaΔAOB.

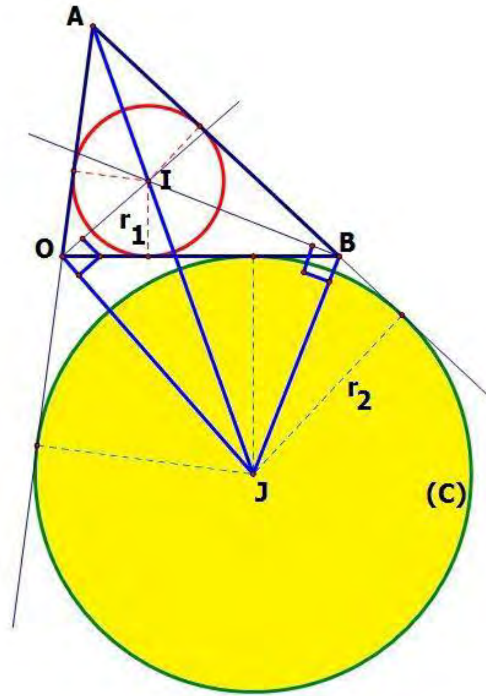
☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Để lập phương trình đường tròn (C) ta xác định hai yếu tố quan trọng → tâm đường tròn bàng tiếp tam giác và bán kính. Ở đây ta có hai hướng tiếp cận:

+ Hướng thứ 1: dựa trên định nghĩa tâm đường tròn bàng tiếp góc A → tâm J (theo hình vẽ) chính là giao điểm giữa đường phân giác trong góc A và phân giác ngoài của 2 góc còn lại → ta có thể viết phương trình hai đường phân giác

để xác định tọa độ J. Lại có, khoảng cách tâm J đến đường OB chính là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác OAB.



+ **Hướng thứ 2:** ta đưa tọa độ của các điểm đặc biệt lên trên hệ trục Oxy, lúc này đây ta có nhận xét đường tròn (C) tiếp xúc với OB, OA → (C) là đang tiếp xúc với các trục tọa độ.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có A ∈ Ox, B ∈ Oy $\Rightarrow AB:\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+4y-12=0$.

Phương trình đường phân giác tạo bởi AB và OA (y = 0) có dạng:

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{y}{\sqrt{0^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d_1:3x-y-12=0 \\ d_2:x+3y-4=0 \end{array}\right.$$

Ta có: $(3x_B-y_B-12)(3x_O-y_O-12)=180>0 \Rightarrow$ B và O cùng phía so với d_1

Suy ra $\boxed{d_2\text{:}\mathbf{x+3y-4=0}}$ chính là đường phân giác trong góc A.

* Tương tự ta có phương trình đường phân giác tạo bởi AB và OB (x = 0) có dạng: $\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{x}{\sqrt{0^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d_3:x-2y+6=0 \\ d_4:2x+y-6=0 \end{array}\right.$

Ta có: $(x_A-2y_A+6)(x_O-2y_O+6)=144>0 \Rightarrow$ B và O cùng phía so với d_3

Suy ra $\boxed{d_3\text{: }\mathbf{x-2y+6=0}}$ chính là đường phân giác ngoài góc B.

* Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB ⇒ J = $d_2 \cap d_3$

Suy ra tọa độ J là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+3y-4=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{J(-2;2)}$

* Gọi r là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác OAB ⇒ r = d[J; OB] = 2

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C):(x+2)^2+(y-2)^2=4}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có A ∈ Ox, B ∈ Oy ⇒ $AB:\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+4y-12=0$.

Phương trình đường phân giác tạo bởi AB và OA (y = 0) có dạng:

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{y}{\sqrt{0^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d_1:3x-y-12=0 \\ d_2:x+3y-4=0 \end{array}\right.$$

Ta có: $(3x_B-y_B-12)(3x_O-y_O-12)=180>0 \Rightarrow$ B và O cùng phía so với d_1

Suy ra $\boxed{d_2: x+3y-4=0}$ chính là đường phân giác trong góc A.

* Gọi J(a; b) và r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C) cần tìm.

* Vẽ hình kèm hệ trục tọa độ, ta nhận xét: A∈ Ox, B ∈ Oy ⇒ Đường tròn nội tiếp ΔAOB và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác OAB tiếp xúc với 2 trục tọa độ Ox, Oy.

Do đó ta có: $d[J;Ox]=d[J;Oy]=r_J \Leftrightarrow |a|=|b|=r_J$

Vì đường tròn nội tiếp ΔOAB nằm ở phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy

Suy ra đường tròn bàng tiếp ΔOAB nằm ở phần tư thứ hai của mặt phẳng Oxy

Suy ra J(– a ; a) (với a > 0)

* Ta J ∈ d_2 ⇒ $-a+3a-4=0 \Leftrightarrow a=2$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C):(x+2)^2+(y-2)^2=4}$

■ **Lời bình:** Qua bài toán này, ta hiểu hơn với cách dựng, cách thiết lập và tìm tâm, bán kính của đường tròn bàng tiếp tam giác. Công cụ chủ yếu vẫn là thiết lập đường phân giác trong và ngoài của tam giác. (Phần này bạn đọc có thể xem lại chủ đề 2 chương 2 : "bài toán liên quan đến viết phương trình đường thẳng" để hiểu rõ hơn.

BÀI TOÁN 4 (ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP VÀ NGOẠI TIẾP TAM GIÁC). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ $A(1;5)$ và phương trình cạnh BC: $x-2y-6=0$, biết $J(1;0)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Tương tự như hai bài toán đầu tiên đã giới thiệu, để viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC

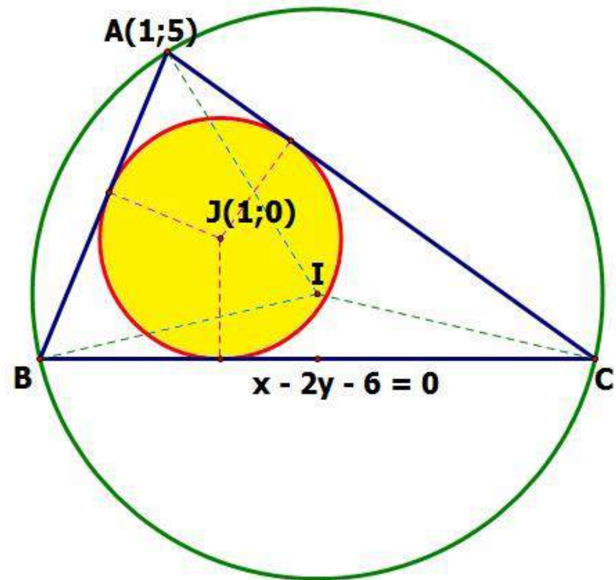
→Ta tìm tọa độ B và C.

_ Để tìm B và C →viết phương trình AB và AC→ dựa vào dữ kiện hiện có chính là tâm nội tiếp tam giác cách đều 3 cạnh của tam giác.

_ Ta viết phương trình đường thẳng AB đi qua một điểm A và khuyết véctơpháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$

→ khoảng cách d[J; AB] = r

→ tìm quan hệ a, b → phương trình AB.



► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi phương trình AB qua A(1; 5) có dạng: $a(x-1)+b(y-5)=0$ với $\vec{n}=(a;b), (a^2+b^2>0)$

* Ta có J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC$\Rightarrow d[J;AB]=d[\text{J};\text{BC}]$

Suy ra $\dfrac{|-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|1-2.0-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$ (nhận xét b ≠ 0, nên ta chọn b = 1)

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$ (do AC cũng qua A và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC)

* Ta đặt **AB: 2x + y – 7 = 0 và AC: 2x – y + 3 = 0**

* Ta có: B = AB ∩ BC ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ x-2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(4;-1)}$$

* Ta có: C = AC ∩ BC ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x-2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-4;-5)}$$

* Gọi phương trình khai triển của đường tròn (C) cần tìm có dạng là:

(C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, trong đó tâm I(a; b) và $R^2=a^2+b^2-c>0$.

* Ta có: $\begin{cases} A\in(C) \\ B\in(C) \\ C\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26-2a-10b+c=0 \\ 17-8a+2b+c=0 \\ 41+8a+10b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-3}{2} \\ b=0 \\ c=-29 \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): x^2 + y^2 + 3x - 29 = 0}$

- **Lời bình:** nhận xét chung là bài này không quá khó, nhưng bạn cần nắm kỹ kiến thức của điểm đặc biệt đó chính là tâm đường tròn nội tiếp cách đều 3 cạnh của tam giác và kỹ năng viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm, bị khuyết véctơ pháp tuyến. Có một câu hỏi đặt ra trong bài này là nếu không nhận xét b khác 0 thì ta có đi tiếp được không ? → câu trả lời là có vì tổng quát với các dạng biến đổi trên thì ta chỉ việc bình phương hai vế để quy về phương trình đẳng cấp. Khi đó chúng ta cũng sẽ phải chia hai trường hợp b = 0 và b khác 0 để giải tìm ra giá trị a hoặc ngược lại. (*Để hiểu rõ hơn, bạn đọc có thể theo dõi phần này ở chủ đề 2, các bài toán liên quan đến viết phương trình đường thẳng*).

BÀI TOÁN 5 (ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐƯỜNG TRÒN THEO ĐƯỜNG KÍNH). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn đi qua A(–1; 2) và cắt đường thẳng d: $3x - 4y + 7 = 0$ theo đường kính BC sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{4}{5}$.

☺**Nhận xét và ý tưởng :**

_ Để lập phương trình đường tròn (C) ngoại tiếpΔABC → xác định tâm I và bán kính hoặc viết phương trình đường đi qua ba điểm.

_ Ở đây đề bài đã "gợi mở" dữ kiện $S_{\Delta ABC}$ và do BC làm đường kính và A thuộc (C) →$\Delta ABC \perp A$.

_ Ta có thể tính khoảng cách từ A đến BC → dựa vào công thức diện tích tam giác → độ dài đường kính BC → bán kính (C) cần tìm.

_ Để xác định tâm I của đường tròn ta → IA = R → giải tìm tọa độ tâm I.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi (C) là phương trình cần tìm có tâm I và bán kính R.

* Do A ∈ (C) và BC là đường kính của (C) ⇒$\Delta ABC \perp A$.

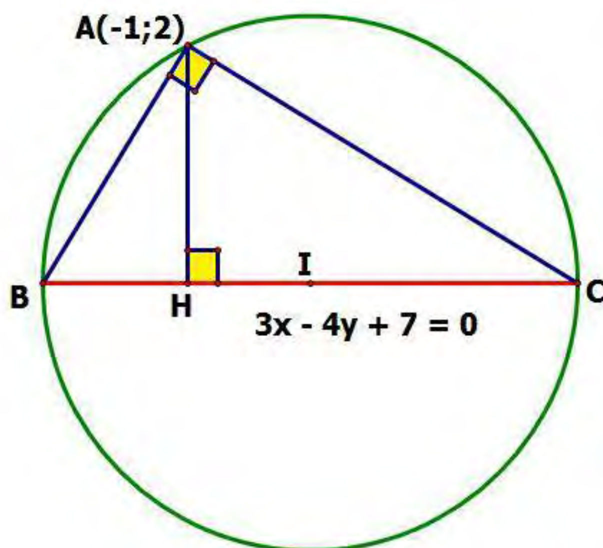
Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d[A; BC].BC \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{2}.\frac{|-1.3 - 4.2 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}.BC$

Suy ra BC = 2 $\Rightarrow R^2 = \frac{BC^2}{4} = 1$

* Ta có I ∈ BC: 3x – 4y + 7 = 0

$\Rightarrow I\left(a; \frac{3a+7}{4}\right)$

Mặt khác IA = R $\Leftrightarrow AI^2 = R^2$



$\Leftrightarrow (a+1)^2 + \left(\dfrac{3a+7}{4} - 2\right)^2 = 1$

Suy ra $16(a+1)^2 + (3a-1)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{-1}{25} \end{array}\right.$ 2(a

* Với $a = -1$ ta có $(C_1): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

* Với $a = \dfrac{-1}{25}$ ta có $(C_2): \left(x + \dfrac{1}{25}\right)^2 + \left(y - \dfrac{43}{25}\right)^2 = 1$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} (C_1): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (C_2): \left(x + \dfrac{1}{25}\right)^2 + \left(y - \dfrac{43}{25}\right)^2 = 1 \end{array}\right.$

■ **Lời bình:** Việc nhận xét điểm A thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC cực kì quan trọng (do góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên là góc vuông). Có thể thấy "điểm tựa hình vẽ" và những nhận xét về hình học đường tròn 9 góp phần giúp ta giải nhanh bài toán.

BÀI TOÁN 6 (ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐƯỜNG TRÒN THEO DÂY CUNG). **Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng** $d_1: x + y - 3 = 0$ **và** $d_2: 3x + 4y - 6 = 0$**. Lập phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng 2, tâm I thuộc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 tại hai điểm A, B sao cho góc** $AIB = 120^o$ **.**

■ **Đặt vấn đề:** Bài toán đường thẳng cắt đường tròn tạo dây cung là một dạng khá quen thuộc vì bạn chắc chắn phải sử dụng đến 1 định lý rất quen thuộc của "hình học đường tròn lớp 9" đó chính là định lý "đường kính và dây cung: "đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây và ngược lại". Ngoài ra với bài toán "cắt" trong đường tròn thì "công thức Pytago" chính là chìa khóa giúp ta giải quyết các nút thắt của bài toán.

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Do đường tròn (C) đã có sẵn bán kính R = 2 nên chỉ cần xác định tâm I của đường tròn.

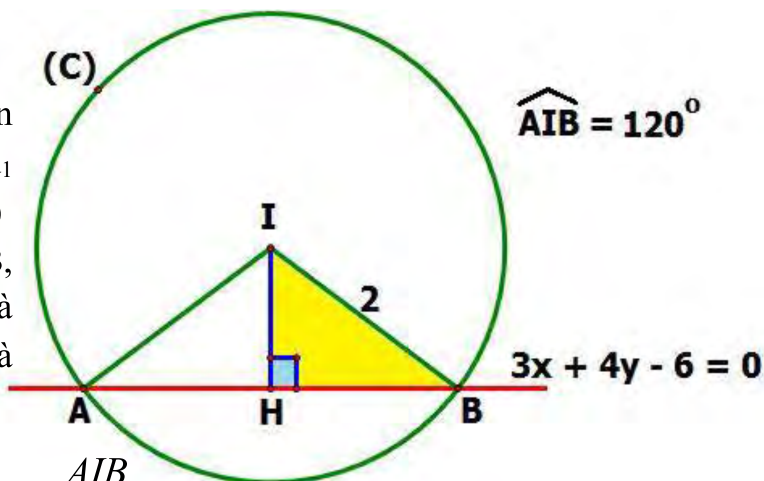
_ Với gợi ý tâm I thuộc đường thẳng $d_1 \rightarrow$ tham số hóa tâm I $\rightarrow$ 1 ẩn $\rightarrow$ cần 1 phương trình ?

_ Gọi H là trung điểm AB ⇒ IH ⊥ AB và ta có IH là phân giác góc AIB.

_ Xét ΔHIB ⊥ H và kết hợp với IB = 2 và dùng góc HIB = 60°→ ta tính được IH

_ IH chính là khoảng cách từ I đến đường thẳng d_2→ giải khoảng cách → tìm được tâm I.

► **Hướng dẫn giải:**



* Gọi (C) là đường tròn cần tìm. Theo đề bài ta có I ∈ d_1 : x + y – 3 = 0 ⇒ I(a ; 3 – a)

* Gọi H là trung điểm AB, theo "định lý đường kính và dây cung" ta có IH ⊥ AB và IH là phân giác của ΔIAB

(IA = IB = R)⇒ góc $HIB = \dfrac{AIB}{2} = 60^o$

* ΔIHB ⊥ H có $\cos HIB = \dfrac{IH}{IB} \Rightarrow IH = R.\cos HIB = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

* Mặt khác IH = $d[I;AB] = \dfrac{|3a+4(3-a)-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 \Leftrightarrow |a-6| = 5$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11 \Rightarrow I_1(11;-8) \\ a = 1 \Rightarrow I_2(1;2) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} (C_1):(x-11)^2+(y+8)^2=4 \\ (C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=4 \end{array}\right.$

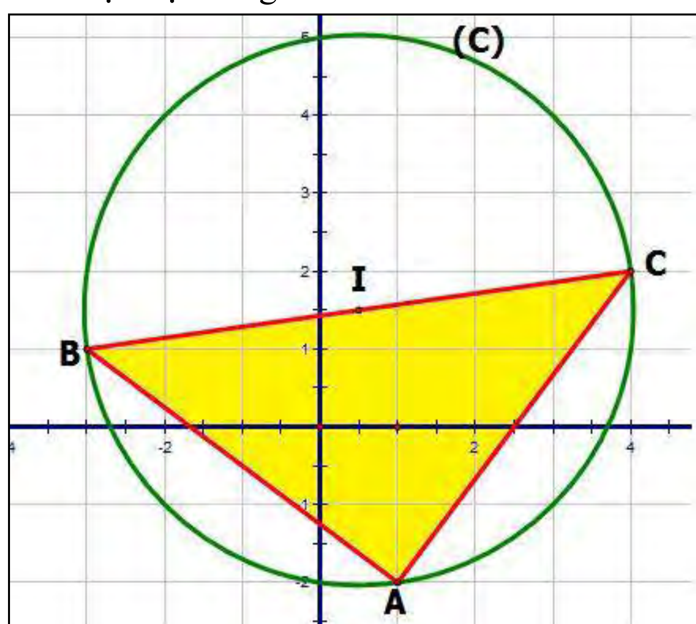
■ **Lời bình:** Bài toán này có thể mở rộng thành gócα bất kì hoặc cũng có thể chọn một điểm bất kì trên đường tròn tạo thành **góc nội tiếp** β cùng chắn cung AB → khi đó **α = 2β**.

Đề bài cũng có thể thay thế dữ kiện góc bằng việc cho trực tiếp dây cung AB bằng bao nhiêu ? hoặc yêu cầu ta tìm đường tròn sao cho cắt đường thẳng tạo thành dây cung lớn nhất (chính là đường kính) và dây cung nhỏ nhất (bạn đọc có thể xem tiếp chủ đề 5: bài toán max – min cực trị hình học để hiểu rõ hơn!)

BÀI TOÁN 7 (TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A(1; –2) và các giao điểm của đường thẳng $d: x-7y+10=0$ với đường tròn $(C'): x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

■ **Đặt vấn đề:**Các thế hệ học sinh học sách giáo khoa theo chương trình trước cải cách (trước năm 2009) đều không quá lạ lẫm với thuật ngữ **"phương tích, trục đẳng phương" của hai đường tròn**. Theo chương trình mới (tính đến thời điểm viết sách năm 2015) thì lượng kiến thức hay này đã bị giảm tải, chính vì vậy có rất nhiều nội dung mà học sinh **"không được biết"**. Tác giả cũng tự đặt ra câu hỏi liệu kiến thức đó có thật sự cần thiết cho ta không ? Không bàn về vấn đề nội dung của chương trình giáo dục Việt Nam mà chỉ nói về mảng kiến thức này thì thật sự theo cá nhân tác giả là cần thiết. *Nhà văn người Pháp La Rochefoucauld đã từng nói****: "Có ba thứ ngu dốt: không biết những gì mình cần biết, không rành những gì mình biết và biết những gì mình không cần biết. "***

Ở đây tác giả hi vọng sơ lược lại mảng kiến thức này, và bạn đọc có thể xem như là một công cụ, một phương tiện cần thiết trong quá trình giải các bài toán liên quan trên. Mời bạn đọc cùng theo dõi.



■ **CÁCH 1 :Không sử dụng trục đẳng phương**

☺**Ý tưởng :** Như các bài toán trước đó trình bày, để viết phương trình đường tròn (C) ta tìm ba điểm thuộc đường tròn → cụ thể trong bài toán này là điểm A và giả sử B, C là giao điểm của d và (C').

_ Ta đã sẵn có toa độ điểm A nên chỉ phải giải hệ phương trình d và (C) → tìm tọa độ B và C.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi B và C là giao điểm của đường thẳng x – 7y + 10 = 0 và đường tròn (C).

Ta có tọa độ B và C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-7y+10=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-20=0 \end{cases}$

(phần giải hệ này xin dành cho bạn đọc)

Suy ra $\left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=-3 \\ y=2 \Rightarrow x=4 \end{array}\right.$.

Do vai trò của B và C như nhau nên ta đặt **B(–3; 1), C(4; 2)**

* Gọi phương trình khai triển của đường tròn (C) cần tìm có dạng là:

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó tâm I(a; b) và $R^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.

* Ta có: $\begin{cases} A \in (C) \\ B \in (C) \\ C \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2a+4b+c=0 \\ 10+6a-2b+c=0 \\ 20-8a-4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=-10 \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): x^2+y^2-x-3y-10=0}$

■ **CÁCH 2 :Sử dụng trục đẳng phương của hai đường tròn**

☺ **Ý tưởng :** Trước tiên chúng ta cần hiểu thế nào là trục đẳng phương ?

♥ Định nghĩa **phương tích**: Cho đường $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Khi đó $P_{M/(C)} = \overline{MA}.\overline{MB}$ không phụ thuộc vào phương của cát tuyến MAB của đường tròn mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Cụ thể nếu M(x_o; y_o) thì $P_{M/(C)} = {x_0}^2 + {y_0}^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0$.

♥ Định nghĩa **trục đẳng phương**: Cho 2 đường tròn $(C_1), (C_2)$, khi đó: Tập $d = \left\{M \mid P_{M/(C_1)} = P_{M/(C_2)}\right\}$ là một đường thẳng và đó gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Giả sử $\begin{cases} (C_1): x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0 \\ (C_2): x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0 \end{cases}$

Thì phương trình trục đẳng phương là: $\boxed{2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)x+c_1-c_2=0}$

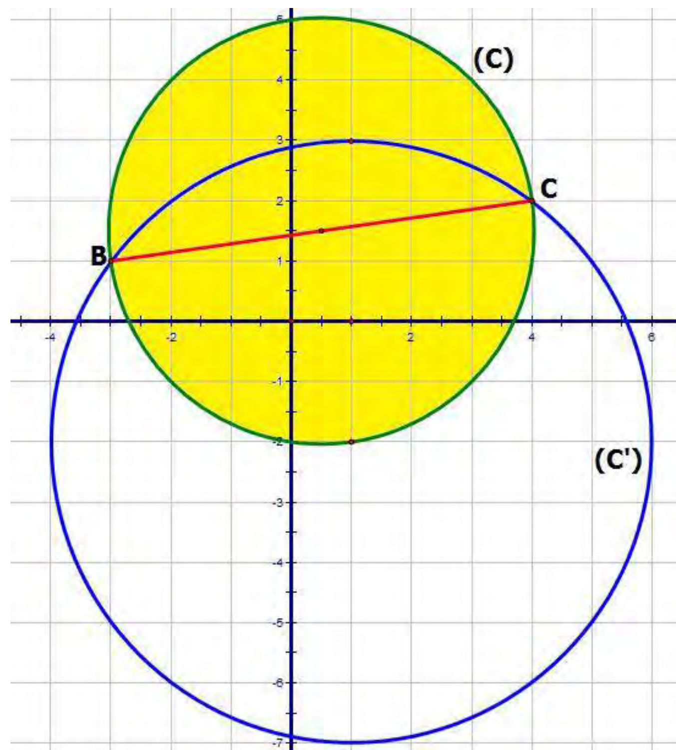
♥ Chú ý:

\+ Khi 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm A, B thì AB chính là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)

\+ Khi 2 đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm A thì trục đẳng phương của 2 đường tròn chính là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn tại điểm A.

Trở lại bài toán, như vậy ta nhận xét thấy đường thẳng d hiện tại chính là trục đẳng phương của đường tròn (C) và (C’).

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Nhận xét do (C) và (C’) cắt nhau tại hai điểm B và C và d chứa cả 2 điểm B và C suy ra d chính là phương trình trục đẳng phương của (C) và (C’)

* Do đó ta có : phương trình $(C):(x^2+y^2-2x+4y-20)+(x-7y+10)=0$

Suy ra $(C):x^2+y^2-x+3y-10=0$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C):x^2+y^2-x-3y-10=0}$

■ **Lời bình:** Việc hiểu đúng và hiểu kỹ về trục đẳng phương của hai đường tròn đã góp phần mang đến một lời giải quá ngắn và đẹp ở cách 2. Để hiểu rõ hơn nữa về trục đẳng phương của hai đường tròn, bạn đọc có thể tham khảo thêm “bài toán 13, chủ đề 2, các bài toán liên quan đến lập phương trình đường thẳng”. Và cũng phải nói thêm ở cách giải 1, nếu khéo léo đưa tọa độ của 3 điểm A, B, C lên hệ trục Oxy ta sẽ phát hiện ΔABC vuông tại A→việc viết phương trình đường tròn có lẽ sẽ còn nhanh hơn nữa vì khi đó tâm I chính là trung điểm cạnh huyền BC và bán kính bằng một nửa độ dài BC.

BÀI TOÁN 8 (ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG THẲNG).Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: x+3y+8=0$ **và** $\Delta_2: 3x-4y+10=0$ **và điểm A(–2;1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng** Δ_1**, đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng** Δ_2**.**

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Muốn viết (C) có (I; R) → xác định I(a; b) và R. Có ba hướng để ta tiếp cận:

+ **Hướng thứ 1**: gọi dạng tổng quát của đường tròn → lập 3 phương 3 ẩn a, b, R → giải tìm a, b, R. (cụ thể đó chính là tâm I $\in \Delta_1$ (1), A $\in$ (C) (2) và d[I; Δ_2] = R (3)).

+ **Hướng thứ 2**: gọi dạng khai triển của đường tròn → lập 3 phương 3 ẩn a, b, c → giải tìm a, b, c. (cụ thể đó chính là tâm I $\in \Delta_1$ (1), A $\in$ (C) (2) và d[I; Δ_2] = R (3)).

+ **Hướng thứ 3**: ta cũng có thể tham số hóa tâm I → thiết lập 1 phương trình 1 ẩn để giải tìm I (đó cũng chính là d[I; Δ_2] = R = IA)

Vậy giữa ba hướng trên, có sự khác biệt như thế nào? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi dạng phương trình tổng quát của đường tròn là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ với tâm I(a; b) và bán kính R.

* Theo đề bài ta có: $\begin{cases} I\in\Delta_1 \\ A\in(C) \\ d[I;\Delta_2]=R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+8=0 & (1) \\ (-2-a)^2+(1-b)^2=R^2 & (2) \\ \dfrac{|3a-4b+10|}{5}=R & (3) \end{cases}$

* Từ (1) ta có a = – 3b – 8 thay vào (2) và (3) ta được

$$\begin{cases} (3b+6)^2+(1-b)^2=R^2 \\ \dfrac{|13b+14|}{5}=R \end{cases} \Leftrightarrow 10b^2+34b+37=\frac{(13b+14)^2}{25}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b=-3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ R=5 \end{cases}}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C):(x-1)^2+(y+3)^2=25}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi dạng phương trình khai triển của đường tròn là $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với tâm I(a; b) và bán kính $R^2=a^2+b^2-c>0$.

* Theo đề bài ta có: $\begin{cases} I\in\Delta_1 \\ A\in(C) \\ d[I;\Delta_2]=R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+8=0 & (1) \\ 4a-2b+c=-5 & (2) \\ \dfrac{|3a-4b+10|}{5}=\sqrt{a^2+b^2-c} & (3) \end{cases}$

* Từ (1) ta có $\boxed{\textbf{a = –3b – 8}}$ thay vào (2) ta được 4(–3b – 8) – 2b + c = – 5
⇒ $\boxed{\textbf{c = 14b + 27}}$

* Thay a = –3b – 8 và c = 14b + 27 vào (3) ta được:

$$|3(-3b-8)-4b+10|=5\sqrt{(-3b-8)^2+b^2-14b-27}$$

$$\Leftrightarrow |13b+14|=5\sqrt{10b^2+34b+37}$$

$$\Leftrightarrow (3b+14)^2=25(10b^2+34b+37)\Leftrightarrow \boxed{b=-3\Rightarrow \begin{cases} a=1\\ c=-15\end{cases}}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): x^2+y^2-2x+6y-15=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C)

Theo đề bài ta có I $\in\Delta_1$: x + 3y + 8 = 0 $\Rightarrow$ I(–3t – 8; t)

* Do đường thẳng Δ_2 tiếp xúc (C) nên ta có $d[I;\Delta_2]=R=IA$ (*) với $\overrightarrow{AI}=(-3t-6;t-1)$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{|3(-3t-8)-4t+10|}{5}=\sqrt{(3t+6)^2+(t-1)^2}$

$$\Leftrightarrow |13t+14|=5\sqrt{10t^2+34t+37}$$

Suy ra $(13t+14)^2=25(10t^2+34t+37)\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow \begin{cases} I(1;-3)\\ R=5\end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): (x-1)^2+(y+3)^2=25}$

■ **Lời bình:**với bài toán "đường tròn tiếp xúc với đường thẳng" thì chắc chắn chúng ta sẽ phải sử dụng đến điều kiện tiếp xúc giữa đường thẳng và đường tròn chính là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng đó bằng bán kính. Và đây cũng chính là biểu thức liên hệ trực tiếp tâm và bán kính với nhau. Trong 3 cách trên, cách 3 tỏ ra dễ chịu hơn rất nhiều khi chỉ phải giải quyết 1 phương trình 1 ẩn. Nhược điểm của cách 1 và 2 là biến đổi tương đối nhiều, số ẩn tương đối lớn, đòi hỏi kỹ năng giải phương trình đại số ở người làm. Qua đây cũng rút ra một chú ý nhỏ đó chính là nếu phát hiện tâm I thuộc đường thẳng nào $\rightarrow$tham số hóa tâm I theo đường thẳng đó.

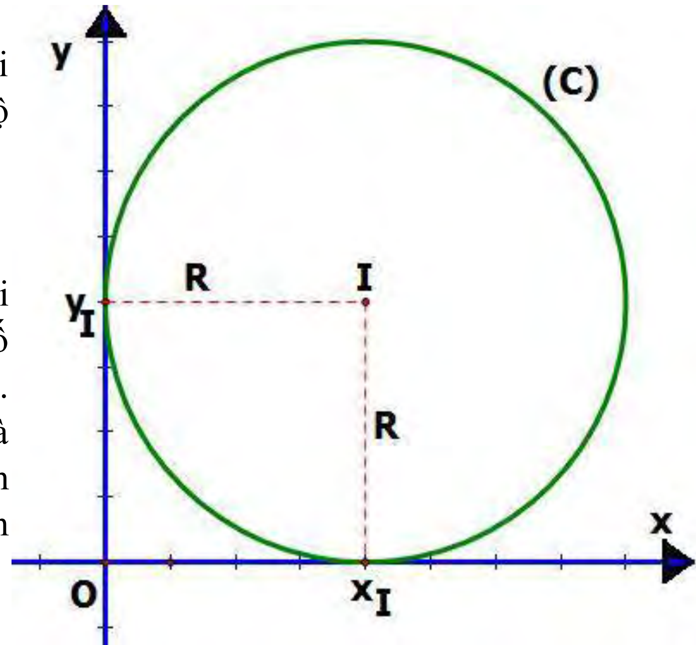
BÀI TOÁN 9 (ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC VỚI CÁC TRỤC TỌA ĐỘ). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và có tâm I thuộc đường thẳng $d: 3x-5y-8=0$**.**

■ **Đặt vấn đề:**tương tự như bài toán đường tròn tiếp xúc với đường thẳng, thì khi đường tròn tiếp xúc với 2 trục tọa độ như trục hoành Ox (y = 0), trục tung Oy (x = 0) thì có gì khác biệt ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Nhận xét quan trọng nhất khi (C) tiếp xúc với 2 trục tọa độ chính là $\begin{cases} d[I;Ox] = R = |y_I| \\ d[I;Oy] = R = |x_I| \end{cases}$

_ Như vậy ta có thể giải quyết bài toán này theo hướng tham số hóa tâm I theo đường thẳng d. Do điều kiện tiếp xúc trên mà bán kính R đã biểu thị theo tâm I nên "nút thắt" của bài toán này chính là xác định tâm I.



► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C) cần tìm.

* Do I ∈ d: 3x – 5y – 8 = 0 $\Rightarrow I\left(\dfrac{5t+8}{3};t\right)$

* Do (C) tiếp xúc đồng thời với hai trục tọa độ nên ta có:

$d[I;Ox] = d[I;Oy] = R$

Suy ra $|t| = \left|\dfrac{5t+8}{3}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = 5t+8 \\ -3t = 5t+8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 1 \end{array}\right.$

* Với t = 1 $\Rightarrow \begin{cases} I(1;-1) \\ R = 1 \end{cases}$. Vậy đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y+1)^2=1$

* Với t = –4 $\Rightarrow \begin{cases} I(-4;-4) \\ R = 4 \end{cases}$. Vậy đường tròn $(C_2):(x+4)^2+(y+4)^2=16$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} (C_1):(x-1)^2+(y+1)^2=1 \\ (C_2):(x+4)^2+(y+4)^2=16 \end{array}\right.$

BÀI TOÁN 10 (SỰ TIẾP XÚC TRONG GIỮA CÁC ĐƯỜNG TRÒN). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(C_2):x^2+y^2=9$. Viết phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc trong với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) biết rằng tâm I thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$.

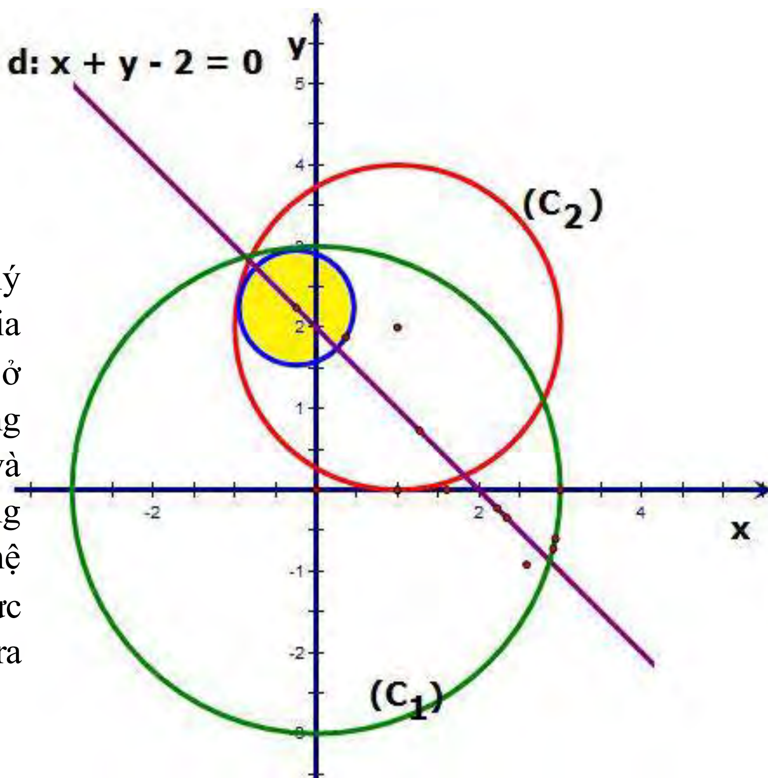
■ **Đặt vấn đề:** Bài toán tiếp xúc giữa các đường tròn cũng là một dạng tương đối khó đặc biệt là khi đường tròn của ta cần tìm tiếp xúc với nhiều đường tròn. Khi đó ta sẽ vận dụng điều kiện tiếp xúc như thế nào ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Đề bài đã gợi ý cho ta I ∈d ⇒ tham số hóa tâm I theo đường thẳng d → cần tìm một phương trình.

_ (C) tiếp xúc trong với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} II_1 = |R - R_1| \\ II_2 = |R - R_2| \end{cases}}$

_ Nếu không khéo léo xử lý dữ kiện trên ta sẽ phải chia rất nhiều trường hợp → ở đây ta có thể xét vị trí tương đối giữa đường tròn (C_1) và (C_2) và đường thẳng d bằng cách vẽ hình chúng trên hệ trục tọa độ → dùng yếu tố trực quan của hình học để đưa ra những nhận xét quan trọng → Ở đây ta có hình vẽ sau:



_ Từ hình vẽ ta có nhận xét hoặc R của đường tròn cần tìm thỏa $R < R_2 < R_1$ hoặc $R > R_1 > R_2$. Do đó sẽ có 2 trường hợp xảy ra với bài toán này.

► **Hướng dẫn giải:**

* Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;2)$ và bán kính $R_1 = 2$ và đường tròn (C_2) có có tâm O(0;0) và bán kính $R_2 = 3$ và đường tròn (C) cần tìm có tâm I, bán kính R.

Do I ∈ d ⇒ I(t; 2 – t)

Nên ta có: $\begin{cases} II_1 = \sqrt{(1-t)^2 + (2-2+t)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 1} \\ II_2 = \sqrt{t^2 + (2-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \end{cases}$

* Ta có $\begin{cases} |R_1 - R_2| = 1 \\ R_1 + R_2 = 3 \\ OI_1 = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{|R_1 - R_2| < OI_1 < R_1 + R_2} \Rightarrow$ (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

* (C) tiếp xúc trong với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} II_1 = |R - R_1| \\ II_2 = |R - R_2| \end{cases} (*)}$

* Mặt khác đường thẳng d nằm giữa khoảng không gian giữa (C_1) và (C_2) nên suy ra đường tròn (C) cần tìm có hai trường hợp hoặc $R < R_2 < R_1$ hoặc $R > R_1 > R_2$.

* **TH1**: $R > R_1 > R_2$ ta có: $(*)\begin{cases} II_1 = R - R_1 \\ II_2 = R - R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2t^2 - 2t + 1} = R - 2 \ (1) \\ \sqrt{2t^2 - 4t + 4} = R - 3 \ (2) \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2) ta được: $II_1 - II_2 = R_1 - R_2 = 1$

Suy ra $\sqrt{2t^2 - 2t + 1} - \sqrt{2t^2 - 4t + 4} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2 - 2t + 1} = 1 + \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$

Do 2 vế của phương trình đều dương nên ta bình phương hai vế phương trình và ta được:

$$\sqrt{2t^2 - 4t + 4} = t - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2 > 0 \\ 2t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 2 \\ t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 2 \\ t = 0 \end{cases} (VN)$$

* **TH2**: $R < R_1 < R_2$ ta có: $(*)\begin{cases} II_1 = R_1 - R \\ II_2 = R_2 - R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2t^2 - 2t + 1} = 2 - R \ (1) \\ \sqrt{2t^2 - 4t + 4} = 3 - R \ (2) \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2) ta được: $II_1 - II_2 = R_1 - R_2 = -1$

Suy ra

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 1} - \sqrt{2t^2 - 4t + 4} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2 - 2t + 1} + 1 = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

Do 2 vế của phương trình đều dương nên ta bình phương hai vế phương trình và ta được:

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 1} = 1 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t > 0 \\ 2t^2 - 2t + 1 = (1-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t^2 - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Với t = 0 thay vào (*) ta có : **R = 1** (thỏa cả (1) và (2)) và tâm **I(0; 2)**

Tóm lại từ 2 trường hợp trên ta có phương trình cần tìm là

$$\boxed{(C): x^2 + (y-2)^2 = 1}$$

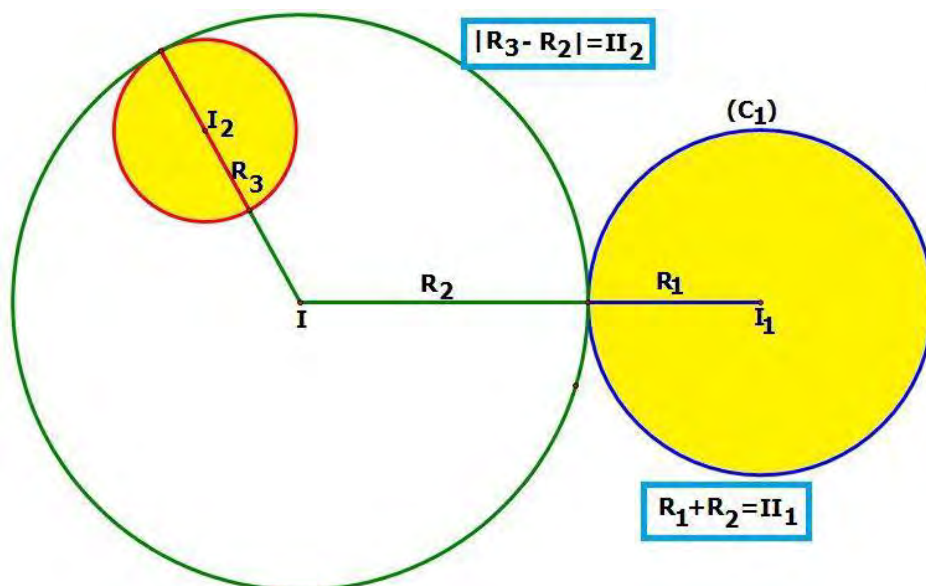
■ **Lời bình:** Qua bài toán này ta rút ra một số nhận xét và lưu ý:

Một là, vấn đề xét chia trường hợp trong bài toán này là một điều tất yếu phải xảy ra, có thể thấy khó khăn mà bài toán này đặt ra ngoài nút thắt trên còn ở việc giải phương trình đại số $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$. Đặc biệt khi thay giá trị t tìm được ở trường hợp 2, ta cũng cần chú ý đến điều kiện ràng buộc của bán kính.

Hai là, một lần nữa việc xét vị trí tương đối giữa các đối tượng hình học (điểm, đường thẳng, đường tròn) với nhau góp phần giúp chúng ta định hướng và đưa

ra lời giải ngắn gọn. Với nhận xét đường thẳng d nằm giữa không gian của hai đường tròn ta đưa đến quan hệ giữa các bán kính R, R_1, R_2.

Balà, qua đây chúng ta cũng nên tổng kết một lần nữa về điều kiện tiếp xúc ngoài, tiếp xúc trong giữa các đường tròn cụ thể qua hình vẽ sau:



BÀI TOÁN 11 (SỰ TIẾP XÚC NGOÀI GIỮA CÁC ĐƯỜNG TRÒN). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$ và tia Oy cắt (C) tại điểm A. Lập phương trình đường tròn (C') có bán kính bằng 2 và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

■ **Đặt vấn đề:** sau khi đề cập đến sự tiếp xúc trong giữa các đường tròn bằng một bài toán khá phức tạp (bài số 10) thì ở bài này, tác giả cùng bạn đọc tìm hiểu về sự tiếp xúc ngoài giữa hai đường tròn. Tuy nhiên đặt trong những "tình huống khác nhau" của từng bài toán khác nhau chúng ta sẽ có cách tiếp cận khác nhau. Nhưng đâu là điểm chung cho những dạng này ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

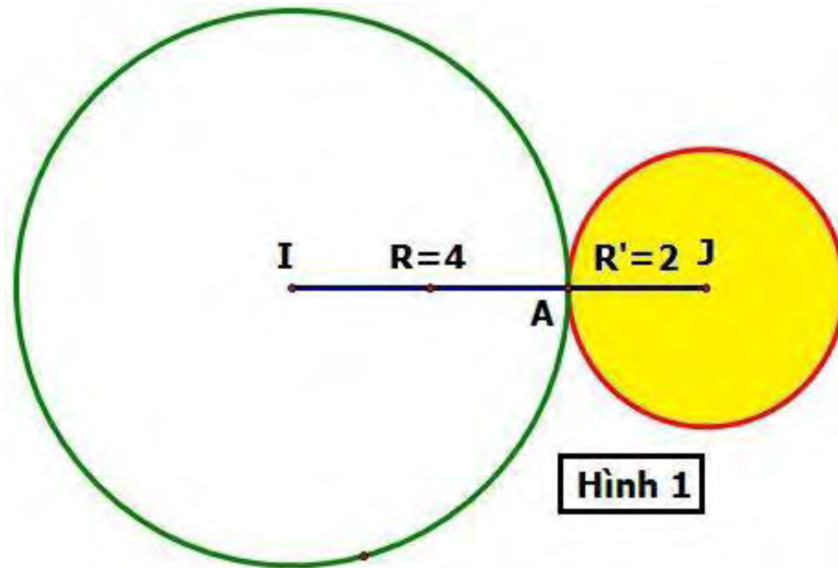
_ Nhận xét về thuận lợi của bài toán là ta đã có sẵn bán kính của đường tròn (C') nhưng ngược lại tâm J thì hiện chưa có một dữ kiện nào thật sự kết nối với nó. Mấu chốt của bài toán này chắc chắn là xác định tâm J.

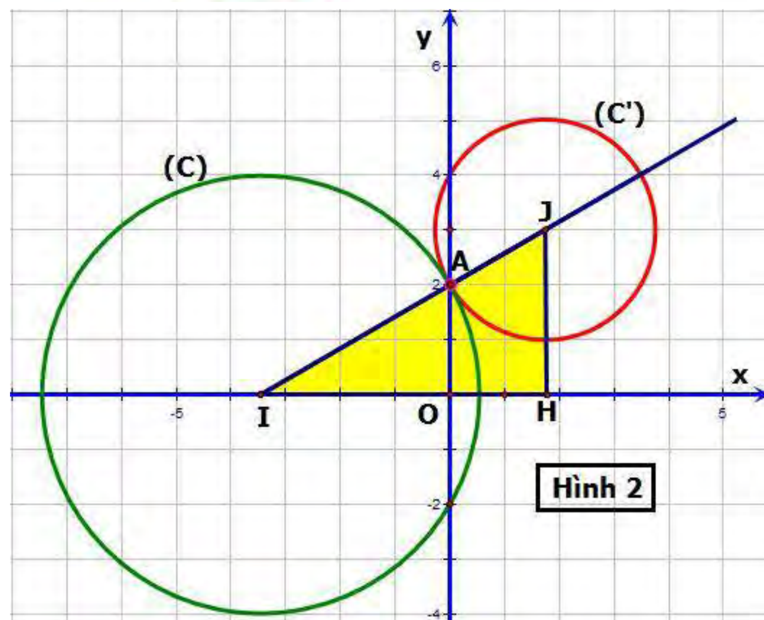
_ Bài toán ta này ta có thể tiếp cận theo những hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**: Gọi dạng tổng quát của đường tròn (C') → A ∈ (C') (phương trình (1)) và điều kiện tiếp xúc R + R' = IJ = 6 (phương trình (2)) → giải hệ phương trình gồm (1) và (2) → a và b.

+ **Hướng thứ 2**: Dựa vào điều kiện tiếp xúc ta tính được IJ = R + R' = 6 và ngoài ra A chính là tiếp điểm chung của 2 đường tròn → I, A, J thẳng hàng → viết phương trình IA → J ∈ IA (hình 1)

+ **Hướng thứ 3:** Đưa các đối tượng hình học lên trên hệ trục Oxy và gọi H là hình chiếu của J lên trục hoành → khi đó theo định lý Thales đảo ta sẽ có $\frac{IO}{IH}=\frac{IA}{IJ}=\frac{AO}{AJ}\rightarrow$ giải tìm được tọa độ tâm I. (hình 2)





► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3};0)$ và bán kính R = 4.

Theo đề bài ta có A = Oy ∩ (C) ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2\ (do\ \ y>0)\Rightarrow \boxed{A(0;2)}$$

* Gọi J(a; b) và R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C') cần tìm và dạng tổng quát của đường tròn (C') là $(x-a)^2+(y-b)^2=4$

* Ta có A ∈ (C') $\Rightarrow (a)^2+(2-b)^2=4$ (1)

* Theo đề bài, ta có (C') tiếp xúc ngoài với (C)

$\Rightarrow IJ = R + R' = 6 \Rightarrow (a + 2\sqrt{3})^2 + b^2 = 36$ (2)

* Từ (1) và (2) giải hệ phương trình trên ta được $\boxed{a = \sqrt{3}; b = 3}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3}; 0)$ và bán kính R = 4.

Theo đề bài ta có A = Oy ∩ (C) ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \ (do\ \ y > 0) \Rightarrow \boxed{\text{A}(0; 2)}$$

* Ta có A là tiếp điểm chung của hai đường tròn ⇒ I, J, A thẳng hàng.

IJ qua A(0; 2) và nhận $\overrightarrow{IA} = (2\sqrt{3}; 2)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là:

$$\frac{x - 0}{\sqrt{3}} = \frac{y - 2}{1} \Leftrightarrow IJ : x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$$

* Ta có J ∈ IJ $\Rightarrow J(a\sqrt{3} - 2\sqrt{3}; a)$
* Theo đề bài, ta có (C') tiếp xúc ngoài với (C)

$\Rightarrow IJ = R + R' = 6 \Rightarrow (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 36$

Suy ra: $a^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \Rightarrow (C_1) : (x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ a = -3 \Rightarrow (C_2) : (x + 5\sqrt{3})^2 + (y + 3)^2 = 4 \end{array}\right.$

Do đường tròn cần tìm tiếp xúc với (C) tại A(0;2) thay vào kiểm tra ta nhận (C_1).

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Ta có đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3}; 0)$ và bán kính R = 4.

Theo đề bài ta có A = Oy ∩ (C) ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \ (do\ \ y > 0) \Rightarrow \boxed{\text{A}(0; 2)}$$

* Dựa vào hình vẽ trên hệ trục tọa độ Oxy ta có nhận xét tâm J có thuộc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy ⇒ a, b > 0.
* Mặt khác, gọi H là hình chiếu của J lên trục hoành ta có JH // OA ,theo định lý Thales đảo ta có:

$$\frac{IO}{IH} = \frac{AO}{HJ} = \frac{IA}{IJ} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{a+2\sqrt{3}} = \frac{2}{b} = \frac{4}{6} \text{ suy ra } \boxed{a = \sqrt{3}; b = 3}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(x-\sqrt{3})^2 + (y-3)^2 = 4}$

■ **Lời bình:**Qua bài toán này ta rút ra một số nhận xét sau:

_ Điểm chung của cả 3 cách đều bắt buộc phải sử dụng điều kiện tiếp xúc ngoài giữa 2 đường tròn để liên hệ khoảng cách của 2 tâm. Khác biệt có thể thấy chính là cách mà các cách giải tiếp cận.

_ Nếu như ở cách 1, là cách làm mà đại đa số nhiều người nghĩ ngay đến và chỉ bị hạn chế ở khâu giải hệ phương trình thì đến cách 2, thử thách lớn nhất là việc loại đi đường tròn phát sinh không thỏa yêu cầu bài toán.

_ Nếu như ở cách 1 và 2, bạn có thể không dựng hình để đoán tính chất nhưng vẫn có thể làm được thì ở cách 3, hình vẽ chính là điểm tựa thật sự cho bài toán, và gần như nó đã mang đến cho ta một lời giải rất đẹp cho bài toán. Tuy nhiên sẽ không nhiều bạn nghĩ đến hướng đi này.

BÀI TOÁN12 (HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2 + y^2 = 9$ có tâm I và đường thẳng $d: x + y = 0$. Lập phương trình đường tròn (C’) có tâm J thuộc đường thẳng d và (C’) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn tam giác JAI vuông tại A, đồng thời bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAJ bằng 1.

■ **Đặt vấn đề:**trong bài toán hai đường tròn cắt nhau tạo dây cung chung và đường thẳng cắt đường tròn tạo dây cung thì có những điều gì là tương đồng và khác biệt ? Những điều nào cần lưu ý khi gặp dạng hình này là gì ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

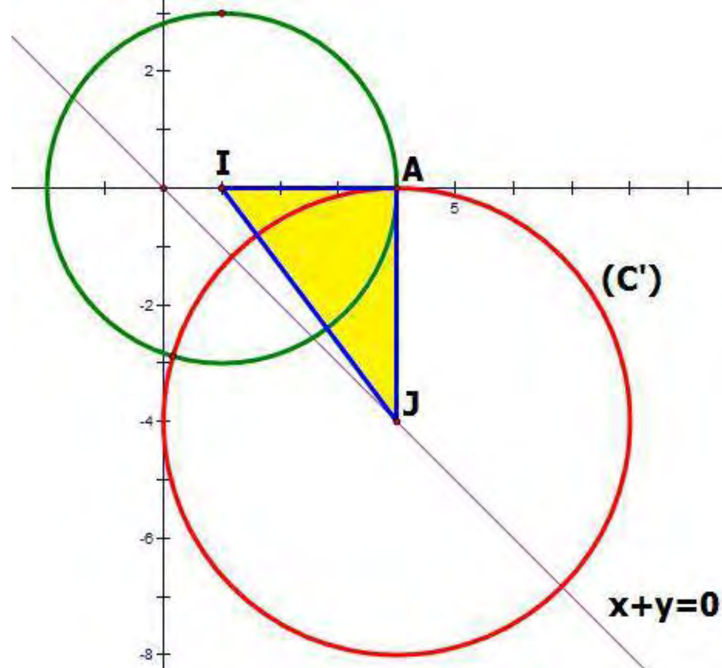
☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Đường tròn (C’) cần tìm hiện đã có tâm J ∈ x + y = 0 (tham số hóa tâm J → cần một phương trình để liên hệ tìm tọa độ J) → liên hệ với những điểm đang có trên hình → điểm I(1;0) → tìm độ dài IJ = ?

_ Để tìm độ dài IJ (liên hệ với các dữ kiện còn lại) → bán kính đường tròn nội tiếp ΔAIJ bằng 1 và tận dụng giả thiết ΔAIJ vuông → chuyển bài toán độ dài sang bài toán diện tích → khi đó ta sẽ có:

$\boxed{S_{\Delta AIJ} = \frac{1}{2} IA.JA = pr}$ với p là nửa chu vi ΔAIJ và r là bán kính đường tròn nội tiếpΔAIJ.

_ Giải phương trình để tìm tâm tọa độ tâm J → lúc này đây ta còn thiếu bán kính R' → Tính dễ dàng nhờ xác định liên hệ giữa bộ ba cạnh IA, AJ, IJ trong ΔAIJ thông qua định lý Pytago.



► **Hướng dẫn giải:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 0) và bán kính R = 3

* Đường tròn (C') có tâm J ∈ x + y = 0 ⇒ J(m; –m) và bán kính R'

* Gọi p , r lần lượt là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AIJ

* Ta có: $S_{\Delta AIJ} = \frac{1}{2}IA.JA = pr \Leftrightarrow 3JA = 2pr$

$\Leftrightarrow 3JA = 1.(3 + JA + IJ) \Leftrightarrow \boxed{2JA = 3 + IJ \ (*)}$

* Mặt khácΔAIJ ⊥ A $\Rightarrow IA^2 + AJ^2 = IJ^2 \Leftrightarrow AJ^2 = t^2 - 9$

* Đặt cạnh IJ = t > 0 ta có : (*)

$4JA^2 = (3+IJ)^2 \Leftrightarrow 4(t^2-9) = (3+t)^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -3 \end{array}\right.$

Do điều kiện t > 0 nên ta nhận t = 5 = IJ ⇒ AJ = R' = 4

* Lại có $IJ^2 = 25 \Leftrightarrow (m-1)^2 + m^2 = 25 \Leftrightarrow m^2 - m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \Rightarrow J_1(4;-4) \\ m = -3 \Rightarrow J_2(-3;3) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} (C_1):(x-4)^2+(y+4)^2 = 16 \\ (C_2):(x+3)^2+(y-3)^2 = 16 \end{array}\right.}$

- **Lời bình:** Cũng như bài toán đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm, chìa khóa để giải bài toán này chính là xác định khoảng cách hai tâm của hai đường tròn. Trong bài toán ấy, bao giờ người ra đề cũng mong muốn lồng các tính toán phức tạp về độ dài và diện tích trong tam giác để làm « mờ » đi dữ kiện độ dài khoảng cách nối hai tâm. Bài toán cũng đã sử dụng hai kỹ thuật chính là « kỹ thuật sử dụng diện tích trong tam giác », « kỹ thuật tham số hóa », đây đều là những kỹ thuật không quá xa lạ với một số bạn và đã được giới thiệu ở chủ đề 1 và 2, chương 2 (Bạn đọc có thể xem lại để hiểu rõ hơn).

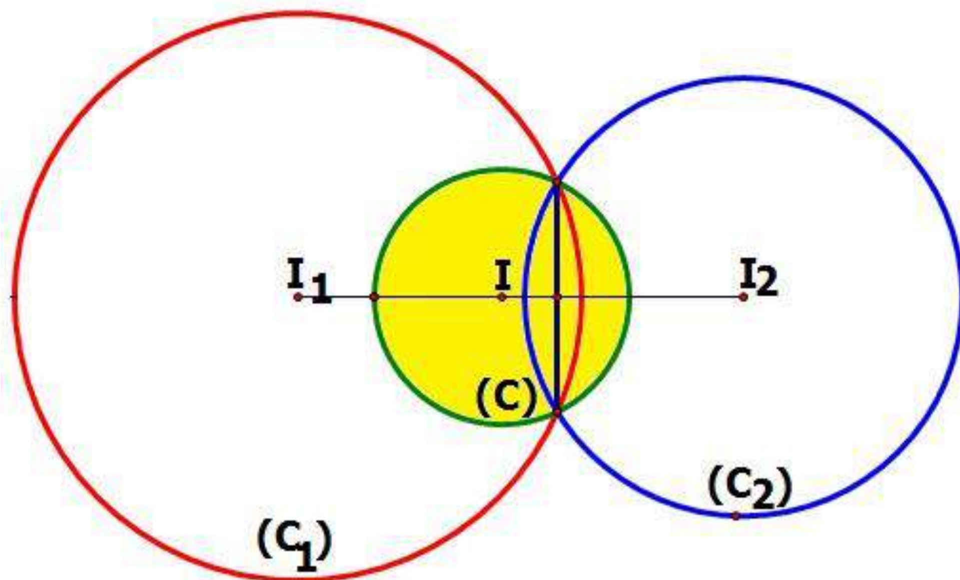
BÀI TOÁN 13 (CHÙM ĐƯỜNG TRÒN). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn:

$(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ **và** $(C_2): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$.

Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(0; 1) và giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

- **Đặt vấn đề:** tương tự như kiến thức về trục đẳng phương giữa hai đường tròn, trong bài toán này, tác giả muốn giới thiệu đến bạn đọc một phương pháp khác để giải nhanh bài toán viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai đường tròn cho trước. Đó chính là kỹ thuật dùng "**chùm đường tròn**".

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



Bài toán có thể giải theo 3 hướng đi:

+ **Hướng thứ 1**: Xuất phát từ suy nghĩ tự nhiên là tìm giao điểm B và C của đường tròn (C_1) và (C_2) → lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.
+ **Hướng thứ 2**: Nếu gọi d là trục đẳng phương giữa 2 đường tròn (C_1) và (C_2) thì d cũng chính là trục đẳng phương của đường tròn cần tìm với 2 đường tròn (C_1), (C_2) →Khi đó phương trình đường tròn (C) sẽ có dạng: $\mathbf{[C_1] + \lambda\Delta = 0}$ với $[C_1]$

là phương trình đường tròn (C_1), Δ là phương trình trục đẳng phương và λ∈ R → khi đó phương trình (C) biểu thị theo λ→ cho A ∈ (C) → tìm λ = ?

\+ **Hướng thứ 3**: Đó là sử dụng phương trình họ các đường tròn cùng đi qua điểm B và C. Khi đó đường tròn (C) sẽ có dạng: m[C_1] + m[C_2] = 0 ($m^2+n^2>0$) → thay tọa độ A ∈ (C) → tìm quan hệ m, n → dựa vào điều kiện $m^2+n^2>0$ tìm được m, n.

\+ **Hướng thứ 4**: Ta vẫn sẽ sử dụng trục đẳng phươngΔở cách hai đường tròn, nhưng lần này với nhận xét đường thẳng nối hai tâm I_1I_2cũng đi qua điểm tâm I của đường tròn cần tìm → tham số hóa tâm I theo phương trình đường. Ta có quan hệ $\boxed{(d[\mathrm{I};\Delta])^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2=R^2=IA^2}$. Ở đây máu chốt của bài toán là xác định độ dài dây cung BC → ta sẽ tính bằng cách

$$\boxed{\left(\frac{BC}{2}\right)^2=R_1{}^2-(d[\mathrm{I}_1;\Delta])^2=R_2{}^2-(d[\mathrm{I}_2;\Delta])^2}$$

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi B và C là giao điểm của đường tròn (C_1) và (C_2). Ta có tọa độ B và C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-4=0 \\ x^2+y^2+2x-2y-14=0 \end{cases}$$ *(phần giải hệ này xin dành cho bạn đọc)*

Suy ra $B\left(\frac{7-18\sqrt{3}}{13};\frac{-17-12\sqrt{3}}{13}\right)$, $C\left(\frac{7+18\sqrt{3}}{13};\frac{-17+12\sqrt{3}}{13}\right)$

* Gọi dạng phương trình khai triển của đường tròn là

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

với tâm I(a; b) và bán kính $R^2=a^2+b^2-c>0$.

$$* \begin{cases} A\in(C) \\ B\in(C) \\ C\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2b+c=0 \\ \frac{-14+36\sqrt{3}}{13}a+\frac{34+24\sqrt{3}}{13}b+c=-\frac{1742+156\sqrt{3}}{169} \\ \frac{-14-36\sqrt{3}}{13}a+\frac{34-24\sqrt{3}}{13}b+c=-\frac{1742-156\sqrt{3}}{169} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{8} \\ b=\frac{-29}{16} \\ c=\frac{-37}{8} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$\boxed{(C): x^2+y^2-\frac{7}{4}x+\frac{29}{8}y-\frac{37}{8}=0}$$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Ta có đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;-2)$, bán kính $R_1 = 3$ và đường tròn (C_2) cótâm $I_2(-1;1)$ và bán kinh $R_2 = 4$.

* Xét $\begin{cases} |R_1 - R_2| = 1 \\ R_1 + R_2 = 7 \\ I_1I_2 = \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow$ hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt B, C $\Rightarrow$ trục đẳng phương của hai đường tròn này là:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 \Leftrightarrow \boxed{BC: 2x - 3y - 5 = 0}$$

* Mặt khác do đường tròn (C) cần tìm cũng qua hai giao điểm B và C trên nên BC cũng là trục đẳng phương của (C) và (C_1) nên phương trình đường tròn (C) có dạng:

$$(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 + \lambda(2x - 3y - 5) = 0,\ (\lambda \in R)$$

* Theo đề bài ta có $A \in (C) \Rightarrow 1 + 4 - 4 + \lambda(-3 - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{8}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): x^2 + y^2 - \frac{7}{4}x + \frac{29}{8}y - \frac{37}{8} = 0}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Ta có đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;-2)$, bán kính $R_1 = 3$ và đường tròn (C_2) cótâm $I_2(-1;1)$ và bán kinh $R_2 = 4$.

* Xét $\begin{cases} |R_1 - R_2| = 1 \\ R_1 + R_2 = 7 \\ I_1I_2 = \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow$ hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt B, C

* Phương trình họ các đường tròn đi qua B và C là:

$$\boxed{m(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4) + n(x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14) = 0},\ (m^2 + n^2 > 0)$$

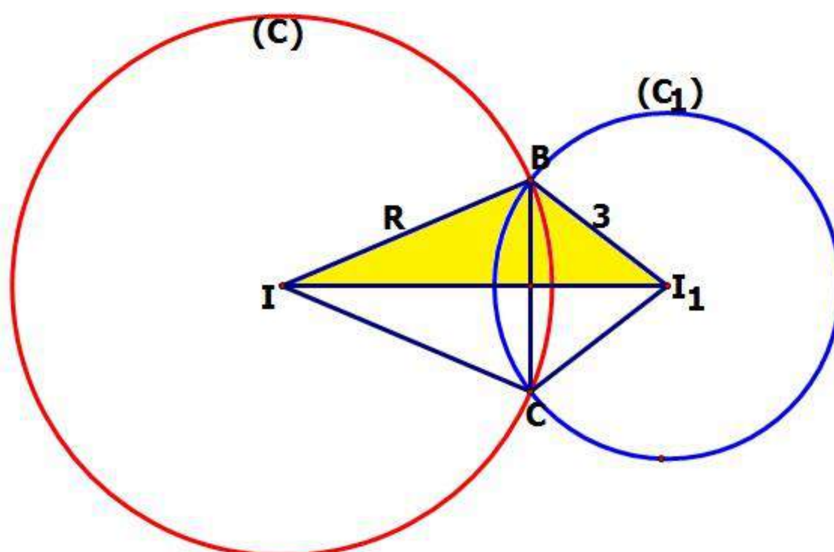
* Vì đường tròn (C) cần tìm đi qua A(0;1) nên ta có:

$$m(1 + 4 - 4) + n(1 - 2 - 14) = 0 \Leftrightarrow m = 15n$$

* Do $m^2 + n^2 > 0$ nên ta chọn n = 1 $\Rightarrow$ m = 15.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): x^2 + y^2 - \frac{7}{4}x + \frac{29}{8}y - \frac{37}{8} = 0}$

► Hướng dẫn giải cách 4:



* Ta có đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;-2)$, bán kính $R_1 = 3$ và đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kinh $R_2 = 4$.

* Xét $\begin{cases} |R_1 - R_2| = 1 \\ R_1 + R_2 = 7 \Rightarrow |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \\ I_1I_2 = \sqrt{13} \end{cases}$

$\Rightarrow$ hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt B, C $\Rightarrow$ trục đẳng phương của hai đường tròn này là:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 \Leftrightarrow \boxed{BC: 2x - 3y - 5 = 0}$$

* Đường thẳng d là phương trình nối hai tâm của đường tròn (C_1) và (C_2)

$\Rightarrow$ d $\perp$ BC

Suy ra d: 3x + 2y + m = 0, d qua $I_1(1; -2) \Rightarrow$ m = 1. Vậy $\boxed{d: 3x + 2y + 1 = 0}$

* Đường thẳng d vuông góc với dây cung chung của cả 3 đường tròn (C), (C_1), (C_2) nên d đi qua tâm I của đường tròn (C) cần tìm $\Rightarrow$ I $\in$ d $\Rightarrow I\left(m; \dfrac{3m+1}{-2}\right)$ và

$$\overrightarrow{AI} = \left(m; \frac{3m+3}{-2}\right)$$

* Xét $d[I_1; BC] = \dfrac{|2.1 - 3(-2) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R_1^2 - (d[I_1; BC])^2 = 9 - \frac{9}{13} = \frac{108}{13}}$$

* Mặt khác ta lại có: $(d[\text{I};BC])^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2=R^2=IA^2$

Suy ra: $\left(\frac{|2m+3.\frac{3m+1}{2}-5|}{\sqrt{4+9}}\right)^2+\frac{108}{13}=m^2+\left(\frac{3m+3}{-2}\right)^2$

$\Leftrightarrow(13m-7)^2+432=52m^2+117(m+1)^2$

Suy ra $m=\frac{7}{8}\Rightarrow\begin{cases}I\left(\frac{7}{8};\frac{-29}{16}\right)\\R^2=\frac{2221}{256}\end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$(C):\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\left(y+\frac{29}{16}\right)^2=\frac{2221}{256}$

■ **Lời bình:**Qua bài toán này ta rút ra một số các nhận xét sau:

Một là, khó khăn trong việc giải quyết bài toán này nếu làm theo hướng thứ 1 chính là giao điểm B, C "quá xấu", dẫn đến việc khi lập hệ ba phương trình ba ẩn a, b, c thì việc giải hệ khá khó khăn. Ở hướng đi thứ 4 gần như là đã khắc phục giúp ta một số nhược điểm của cách làm này dựa trên ý tưởng không tìm trực tiếp tọa độ B và C mà thông qua độ dài của dây cung BC.

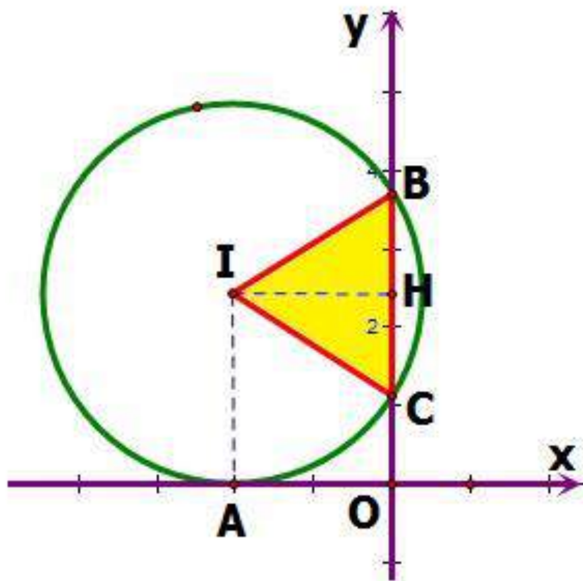
Hai là, ưu điểm của bài toán khi sử dụng trục đẳng phương giữa các đường tròn một lần nữa thể hiện rất rõ rệt từ việc biết phương trình của các đường tròn suy ra phương trình trục đẳng phương thì ngược lại nếu biết phương trình trục đẳng phương và một đường tròn cho trước ta cũng có thể tìm được dạng của phương trình đường tròn còn lại.

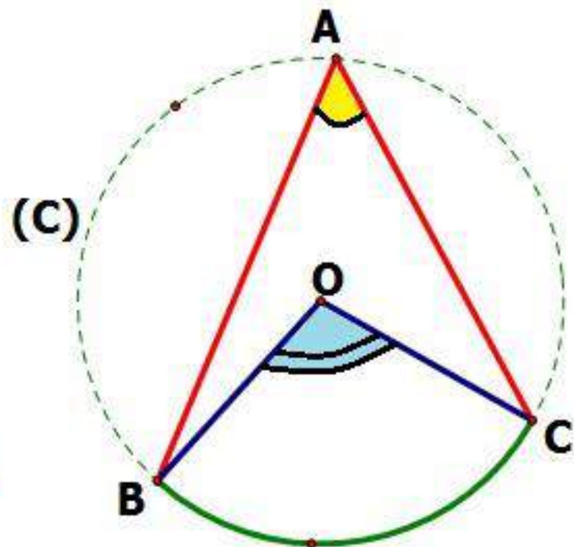
Ba là, ở cách giải thứ 3 thì việc sử dụng kỹ thuật "**chùm đường tròn**" thật sự vô cùng táo bạo. Trong thực tế chúng ta vẫn có phương trình "**chùm đường thẳng**" trong Oxy. Rộng hơn trong không gian 3 chiều ta cũng có phương trình "**chùm mặt phẳng**", "**chùm mặt cầu**".

BÀI TOÁN 14 (GÓC NỘI TIẾP CỦA ĐƯỜNG TRÒN). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc trục hoành tại $A(-\sqrt{3};0)$ và cắt trục tung tại hai điểm B và C sao cho góc $BAC=30^o$

■**Đặt vấn đề:**Đối với các bài toán liên quan đến góc trong đường tròn thì ta cần lưu ý những kiến thức gì ? Mời bạn đọc cùng theo dõi !

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**





_ Có 3 gợi ý của đề bài mà ta cần quan tâm : Đường tròn tiếp xúc với trục hoành ? Đường tròn cắt trục tung ? và góc $BAC = 30^o$ có ý nghĩa gì trong việc giải quyết bài toán trên.

_ Ở đây mấu chốt của bài toán là nhận ra được góc BAC chính là góc nội tiếp của đường tròn (C) cần tìm. Một tính chất cực kì quan trọng về quan hệ giữa các góc trong đường tròn chính là khi góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn 1 cung trên đường tròn thì "**số đo góc ở tâm bằng 2 lần số đo góc nội tiếp** ".

_ Từ gợi ý trên, nếu gọi I là tâm đường tròn (C) cần tìm góc BIC chính là góc ở tâm và bằng 60 độ. Điều này dẫn đến ΔIBC chính là tam giác đều có IH = OA = $|x_A|$ (dựa vào hình vẽ) và $IH = \frac{IB\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (tính chất đường cao trong tam giác) → dễ dàng suy ra bán kính R của đường tròn cần tìm.

_ Cùng với đó, do (C) tiếp xúc trục hoành tại điểm A nên $x_I = x_A$ và $R = |y_I|$.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ với tâm I(a; b) và bán kính R.

* Theo đề bài ta có (C) tiếp xúc với trục hoành tại $A\left(-\sqrt{3};0\right) \Rightarrow \begin{cases} R = |y_I| = |b| \\ x_I = a = -\sqrt{3} \end{cases}$

* Góc $BAC = 30^o \Rightarrow BIC = 60^o$ (do góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung BC) .Mặt khác ΔBIC là tam giác cân tại I (do IB = IC = R) nên ΔIBC là tam giác đều cạnh bằng R.

* Gọi H là chân đường cao kẻ từ I của ΔIBC $\Rightarrow IH = \dfrac{IB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ mà

$IH = OA = \sqrt{3} \Rightarrow R = 2$

* Lại có $R = |b| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \Rightarrow I_1(-\sqrt{3};2) \\ b = -2 \Rightarrow I_2(-\sqrt{3};-2) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} (C_1):(x+\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4 \\ (C_2):(x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=4 \end{array}\right.$

■ **Lời bình:**Ngoài góc nội tiếp trong đường tròn mà bạn đọc đã được giới thiệu ở phần đường tròn lớp 9, chúng ta cũng được giới thiệu góc giữa tiếp tuyến và dây cung và một số góc đặc biệt khác. Với những bài toán hình học trên nếu không biết những tính chất trên thật sự sẽ gây ra rất nhiều khó khăn cho chúng ta trong suốt quá trình giải. Bài toán này cũng đã lại một lần nữa nhấn mạnh vai trò của tiếp điểm A khi đường tròn tiếp xúc với trục hoành, ngoài việc có được liên hệ giữa bán kính và tung độ của tâm ta còn biết nhanh hoành độ của tâm là bao nhiêu ? Việc phác thảo hình vẽ cũng góp phần giúp ta định hướng hướng đi cho bài toán và phát hiện một số tính chất đặc biệt. Nói chung một nguyên tắc chung ở những người học hình là "**học hình thì phải vẽ hình**". Hình học chính là điểm tựa trực quan cho chúng ta trong quá trình giải.

BÀI TOÁN 15 (PHÉP BIẾN HÌNH TRONG ĐƯỜNG TRÒN). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G(2; 3). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có phương trình $(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=25$.Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

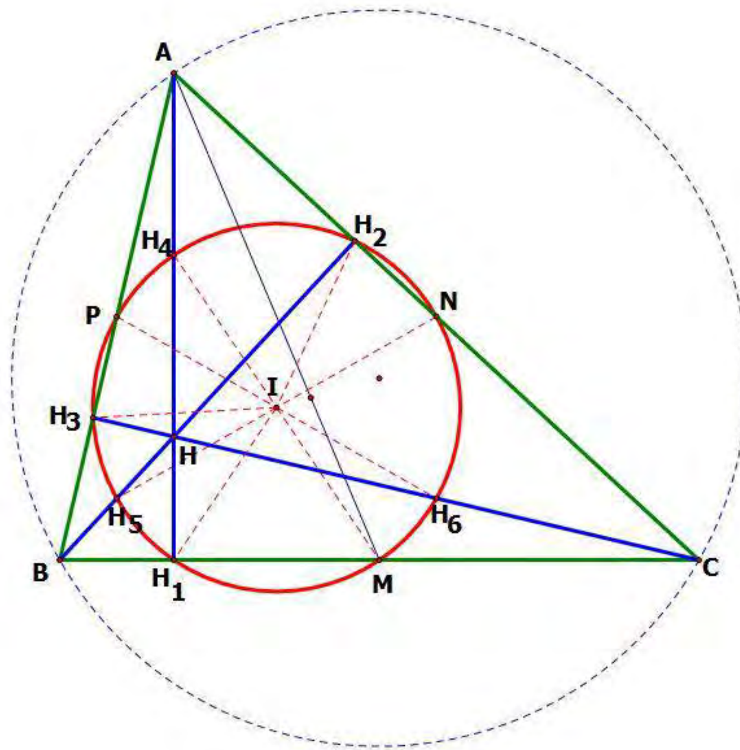
■ **Đặt vấn đề:**Một trong những công cụ hữu ích giúp ta giải quyết những bài toán khó trong hình học phẳng chính là phép biến hình. Phép biến hình gồm có phép dời hình (phép đối xứng trục, đối xứng tâm, phép tịnh tiến) và phép đồng dạng (phép vị tự, phép nghịch đảo). Thông thường các bài toán khó, dưới góc nhìn của phép biến hình luôn cho ta những lời giải đẹp đến bất ngờ. Cụ thể trong bài toán này chúng ta sẽ thử vận dụng phép vị tự.

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

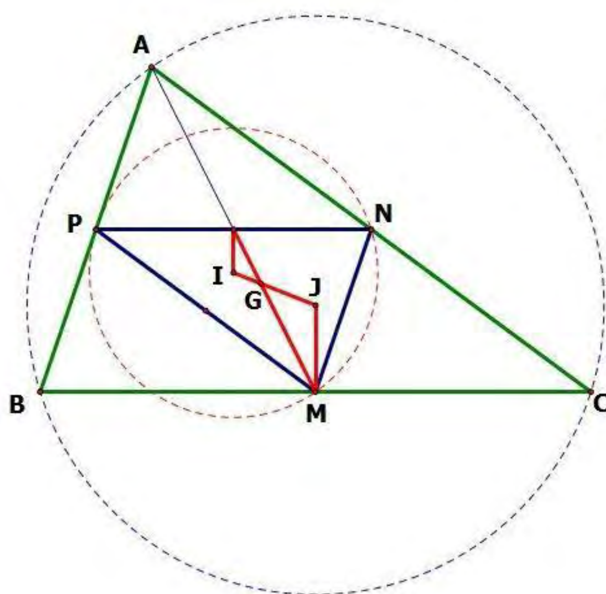
_ Có một kết quả khá đặc biệt trong bài toán này, G không chỉ là trọng tâm của tam giác ABC mà cũng là trọng tâm của tam giác MNP (*việc chứng minh tác giả xin trình bày bằng cách dùng véctơ*)

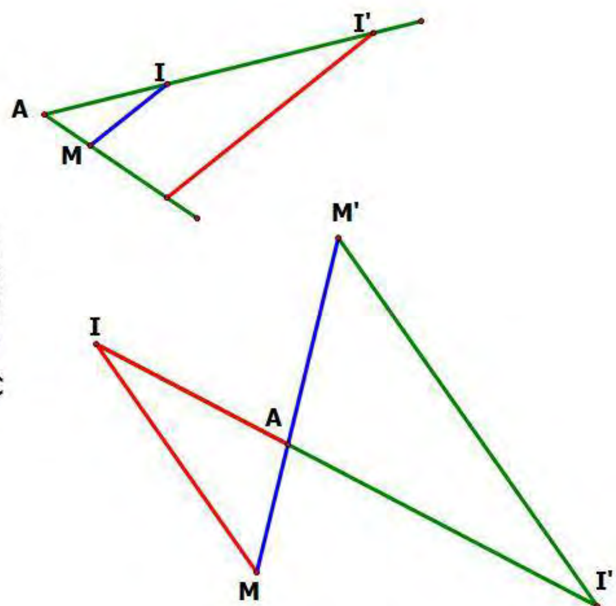
_ Với nhận xét trên thì phép vị tự tâm G với tỉ số k = – 2 sẽ lần lượt biến các điểm M, N, P thành A, B, C. Dĩ nhiên kể cả tâm I và bán kính R của đường tròn (C) cũng sẽ biến thành J và R.

_ Và đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP trong bài trên cũng chính là đường tròn Euler (hay còn gọi là đườn tròn 9 điểm). Nếu Gọi H là trực tâm tam giác ABC, thì chin điểm gồm có trung điểm của các cạnh, chân ba đường cao và trung điểm các đoạn HA, HB, HC đều nằm trên một đường tròn. Ta gọi đó là đường tròn Euler.



► **Hướng dẫn giải:**





* Ta có G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Suy ra

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP})+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

Xét:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{PM})+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})=\vec{0}$$

Do đó $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}\Rightarrow$ **G cũng là trọng tâm ΔMNP**

* Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác MNP có tâm I(1; 1) và bán kính r = 5. Gọi J và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
* Phép vị tự tâm G tỉ số k = –2 biến điểm M thành A, biến điểm N thành B, biến điểm P thành C và phép vị tự trên cũng biến ΔMNP thành ΔABC, biến tâm I thành J thỏa mãn:

$$\begin{cases}\overrightarrow{GJ}=-2\overrightarrow{GI}\\ R=2r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}J(4;7\\ R=10\end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C'):(x-4)^2+(y-7)^2=100}$

■ **Lời bình:** Để hiểu rõ hơn về những ứng dụng của phép biến hình và các tính chất đặc biệt về đường tròn trong tam giác bạn đọc có thể tham khảo phần lý thuyết chương 1.

BÀI TẬP CHỌN LỌC – TỰ LUYỆN CHỦ ĐỀ 3

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn (C) biết:

a. (C) có tâm I(1; 1) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-12=0$

b. (C) nhận AB làm đường kinh với A(2; 3) và B(–4; 1).

c. (C) đi qua ba điểm A(1; 4), B(–4; 0), C(–2; –2).

d. (C) có tâm thuộc đường $\Delta:x-y-1=0$ và tiếp xúc với $d_1:2x+y-1=0$ và $d_2:2x-y+2=0$.

e. (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua A(4; 2).

☺ **Hướng dẫn giải.**

• **a.** (C) tiếp xúc với $\Delta:3x+4y-12=0$ suy ra $d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{|3+4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

Do đó: $\boxed{(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1}$

- **b.** (C) nhận AB làm đường kinh suy ra trung điểm M(–1; 2) của AB là tâm của đường tròn và bán kinh của đường tròn là

  $$R=\frac{AB}{2}\Rightarrow R^2=\frac{1}{4}[(-4-2)^2+(1-3)^2]=10 .$$

  Do đó: $\boxed{(C):(x+1)^2+(y-2)^2=10}$

- **c.**Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

  Ta có: $\begin{cases}A\in(C)\\B\in(C)\\C\in(C)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17-2a-8b+c=0\\16+8a+c=0\\8+4a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-5}{6}\\b=\frac{7}{6}\\c=\frac{-28}{3}\end{cases}$

  Do đó: $\boxed{(C):x^2+y^2+\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}y-\frac{28}{3}=0}$

- **d.** Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

  Với I(a; b) là tâm và R bán kính.

  Ta có: I thuộc đường $\Delta: x-y-1=0$ suy ra I(t; t – 1)

  Mặt khác (C) tiếp xúc với $d_1,\ d_2$ nên ta có: $d(I;d_1)=d(I;d_2)=R$

  Suy ra $\frac{|2t+(t-1)-1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2t-(t-1)+2|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|3t-2|=|t+3|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{5}{2}\\t=\frac{-1}{4}\end{array}\right.$.

  Với t = $\frac{5}{2}\Rightarrow I_1\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right),R_1=\frac{11\sqrt{5}}{10}\Rightarrow\boxed{(C_1):\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{121}{20}}$

  Với t = $\frac{-1}{4}\Rightarrow I_2\left(\frac{-1}{4};\frac{-5}{4}\right),R_2=\frac{11\sqrt{5}}{20}\Rightarrow\boxed{(C_2):\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{80}}$

- **e.** Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

  Với I(a; b) là tâm và R bán kính.

  (C) đi qua A(4; 2) nên ta được: $(4-a)^2+(2-b)^2=R^2$ (*).

  Do (C) tiếp xúc với 2 trục tọa độ nên: $d(I;\mathrm{Ox})=\mathrm{d(I;Oy)}=\mathrm{R}\Leftrightarrow|\mathrm{a}|=|\mathrm{b}|=\mathrm{R}$

TH1: a = b khi đó $(*) \Leftrightarrow (4-a)^2 + (2-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 10 \\ a = 2 \end{array}\right.$

TH2: a = –b khi đó $(*) \Leftrightarrow (4-a)^2 + (2+a)^2 = a^2 \, (VN)$

Vậy ta có 2 phương trình thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ hay } (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100.}$$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn (C) biết:

a. (C) có tâm I(3; 1) và chắn trên đường thẳng $\Delta : x - 2y + 4 = 0$ một dây cung có độ dài bằng 4.

b. (C) đi qua hai điểm A(2; 3), B(–1; 1) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : x - 3y - 11 = 0$.

c. (C) đi qua hai điểm A(0; 5), B(2; 3) và có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

d. (C) có tâm thuộc đường thẳng $\Delta : 2x + y = 0$ và tiếp xúc với đường thẳng $d : x - 7y + 10 = 0$ tại A(4;2).

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. Giả sử (C) chắn trên Δ một dây cung có độ dài bằng 4.

Từ I kẻ IH vuông góc AB tại H (theo định lý đường kinh và dây cung) suy ra H là trung điểm của AB. Khi đó: $HA = \dfrac{AB}{2} = 2$ và $IH = d(I;\Delta) = \sqrt{5}$

Gọi R là bán kinh đường tròn (C), ta có: $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{5+4} = 3$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(C) : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9}$

b. ***Cách 1:*** Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kinh của (C). Ta có:

Điểm $I \in \Delta \Rightarrow I(3t + 11; t)$ và do A, B thuộc đường tròn (C)

$\Rightarrow IA = IB = R \Rightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (3t+9)^2 + (3-t)^2 = (3t+12)^2 + (1-t)^2 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{2} \Rightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{5}{2}\right) \\ R = \sqrt{\dfrac{65}{2}} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(C) : \left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{65}{2}}$

Cách 2: Giả sử $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ có tâm I(a; b).

Do tâm I $\in \Delta \Rightarrow a - 3b - 11 = 0$ (1)

Mặt khác $\begin{cases} A \in (C) \\ B \in (C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - 6b + c = 0 & (2) \\ 2a - 2b + c = 0 & (3) \end{cases}$.

Từ (1), (2), (3) giải hệ ta được: $\begin{cases} a = \dfrac{7}{2} \\ b = \dfrac{-5}{2} \\ c = -14 \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(C): x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0}$

c. Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C), từ giả thiết, ta có: $IA = IB = R = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (5-b)^2 = (2-a)^2 + (3-b)^2 \\ a^2 + (5-b)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 3 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} hay \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} (C_1): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \\ (C_2): (x-3)^2 + (y-6)^2 = 10 \end{array}\right.}$

d. ***Cách 1***: Ta có tâm $I \in \Delta \Rightarrow I(t; -2t)$ và $IA = \sqrt{5t^2 + 20}$

Đường tròn (C) tiếp xúc với d tại A $\Leftrightarrow d(I; d) = IA \Leftrightarrow \dfrac{|3t + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5t^2 + 20}$

$\Leftrightarrow (3t + 2)^2 = 2(5t^2 + 20) \Leftrightarrow t^2 - 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow \begin{cases} I(6; -12) \\ R = 10\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(C): (x-6)^2 + (y+12)^2 = 200}$

Cách 2: Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kinh của (C).

Gọi d' là đường thẳng vuông góc với d tại A $\Rightarrow d': 7x + y + m = 0$

A thuộc d' suy ra m = – 30. Vậy **d': 7x + y – 30 = 0.**

Do (C) tiếp xúc với d tại A nên I thuộc d' và mặt khác I thuộc Δ nên tọa độ I thỏa hệ:

$$\begin{cases} 7x + y - 30 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(6; -12) \Rightarrow IA = 10\sqrt{2}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(C):(x-6)^2+(y+12)^2=200}$

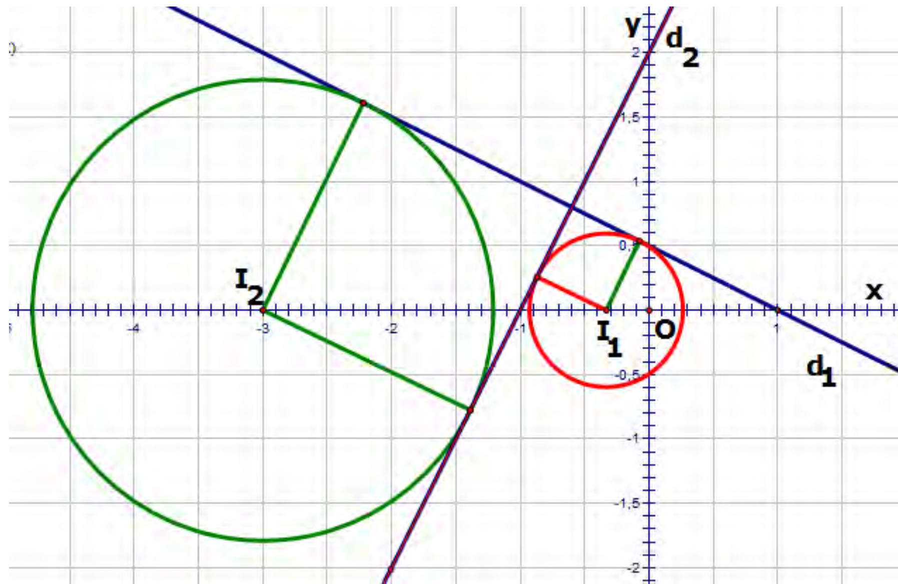
Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Lập phương trình đường tròn (C) biết:

a. (C) có tâm nằm trên trục Ox đồng thời tiếp xúc với d_1 và d_2 với d_1: x + 2y – 1 = 0, d_2: 2x – y + 2 = 0.

b. (C) có bán kính R = 2, tiếp xúc với trục hoành và có tâm nằm trên đường thẳng (d) : x + y – 3 = 0.

c. (C) đối xứng với đường tròn (C’): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ qua đường thẳng Δ: x + 2 = 0.

☺ **Hướng dẫn giải.**



a. Gọi I(a;0) thuộc Ox . Do (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng thì : $\begin{cases} d(I,d_1)=R \\ d(I,d_2)=R \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2a+2|}{\sqrt{5}} \ (1) \\ R=\dfrac{|2a-1|}{\sqrt{5}} \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3 \Rightarrow R=\dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ a=\dfrac{-1}{3} \Rightarrow R=\dfrac{5\sqrt{5}}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} (C):(x+3)^2+y^2=\dfrac{16}{5} \\ (C):\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{125}{9} \end{array}\right.}$$

b. Tâm I nằm trên d suy ra I(t; 3 – t) .

Nếu (C) tiếp xúc với Ox thì khoảng cách từ I đến Ox bằng bán kính R=2 :

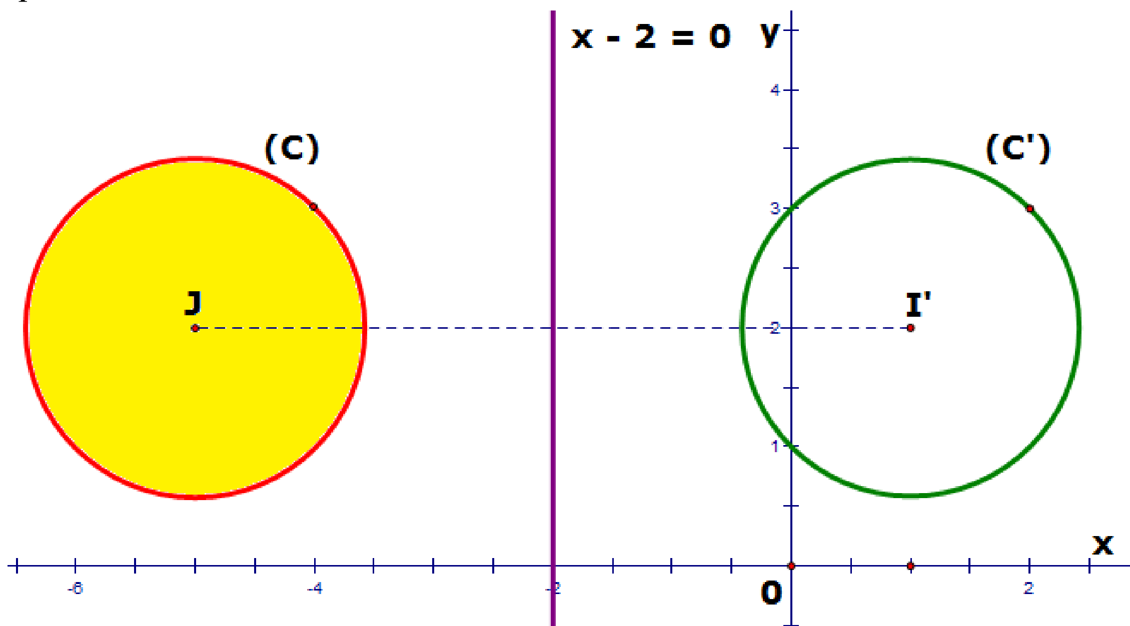
$$|3-t|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-t=-2 \\ 3-t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \to I_1=(5;-2) \\ t=1 \to I_2=(1;2) \end{array}\right.$$

Như vậy có 2 đường tròn :

$$\boxed{(C_1):(x-5)^2+(y+2)^2=4,(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=4}.$$

c. Ta có (C'): $(x-1)^2+(y-2)^2=2 \Rightarrow I'(1;2)$, $R'=\sqrt{2}$

Gọi J là tâm của (C) thì I và J đối xứng nhau qua d : x = – 2 suy ra J(–5; 2) và (C) có cùng bán kính R . Vậy (C): $\boxed{(x+5)^2+(y-2)^2=2}$ đối xứng với (C) qua d .



Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn (C) biết:

a. (C) nội tiếp tam giác tạo bởi 2 trục toạ độ và đường thẳng có phương trình $8x+15y-120=0$.

b. (C) có tâm I thuộc d_1: x – 2y + 3 = 0, tiếp xúc với d_2 : 4x + 3y – 5 = 0 với bán kinh R = 2.

c. (C) nội tiếp tam giác có 3 cạnh lần lượt là nằm trên 3 đường thẳng trục tung Oy, (d_1) : 4x – 3y – 12 = 0 và (d_2): 4x + 3y – 12 = 0.

☺ **Hướng dẫn giải.**

● **a.** Giả sử d: 8x + 15y – 120 = 0 cắt Ox, Oy lần lượt tại A,B.

Gọi I(a;b) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABO. Ta có:0 < a,b < 8

Bán kính r = d(I,Ox) = d(I,Oy) = d(I,d)

$$\Leftrightarrow |a|=|b|=\frac{|8a+15b-120|}{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=3(tm) \\ a=b=20(l) \end{array}\right. \Rightarrow r=3$$

$$\Rightarrow PT:(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

● **b.** d_1: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = t \end{cases}$, $I \in d_1 \Rightarrow I(-3 + t; t)$

d(I , d_2) = 2 $\Leftrightarrow |11t - 17| = 10 \Leftrightarrow t = \dfrac{27}{11}\ hay\ t = \dfrac{7}{11}$

Với t = $\dfrac{27}{11} \Rightarrow I_1\left(\dfrac{21}{11}; \dfrac{27}{11}\right) \quad (C_1): \left(x - \dfrac{21}{11}\right)^2 + \left(y - \dfrac{27}{11}\right)^2 = 4$

Với t = $\dfrac{7}{11} \Rightarrow I_2\left(\dfrac{-19}{11}; \dfrac{7}{11}\right) \quad (C_2): \left(x + \dfrac{19}{11}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{11}\right)^2 = 4$

● **c.** Gọi A là giao của $d_1, d_2 \Rightarrow A: \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(3;0) \in$ Ox .

Vì (BC) thuộc Oy cho nên gọi B là giao của d_1 với Oy : cho x=0 suy ra y=–4 , B(0;–4) và C là giao của d_2 với Oy : C(0;4) . Chứng tỏ B,C đối xứng nhau qua Ox.

Mặt khác A nằm trên Ox vì vậy tam giác ABC là tam giác cân đỉnh A .

Do đó tâm I đường tròn nội tiếp tam giác thuộc Ox suy ra I(a;0).

Theo tính chất phân giác trong : $\dfrac{IA}{IO} = \dfrac{AC}{AO} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{IA + IO}{IO} = \dfrac{5+4}{4} \Leftrightarrow \dfrac{OA}{IO} = \dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow IO = \dfrac{4OA}{9} = \dfrac{4.3}{9} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow I\left(\dfrac{4}{3}; 0\right)$.

Tính r bằng cách :

$$S = \frac{1}{2}BC.OA = \frac{1}{2}.5.3 = \frac{15}{2} = \frac{1}{2}\frac{(AB + BC + CA)}{r} = \frac{1}{2}\frac{(5+8+5)}{r} \Rightarrow r = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): \left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{36}{25}}$

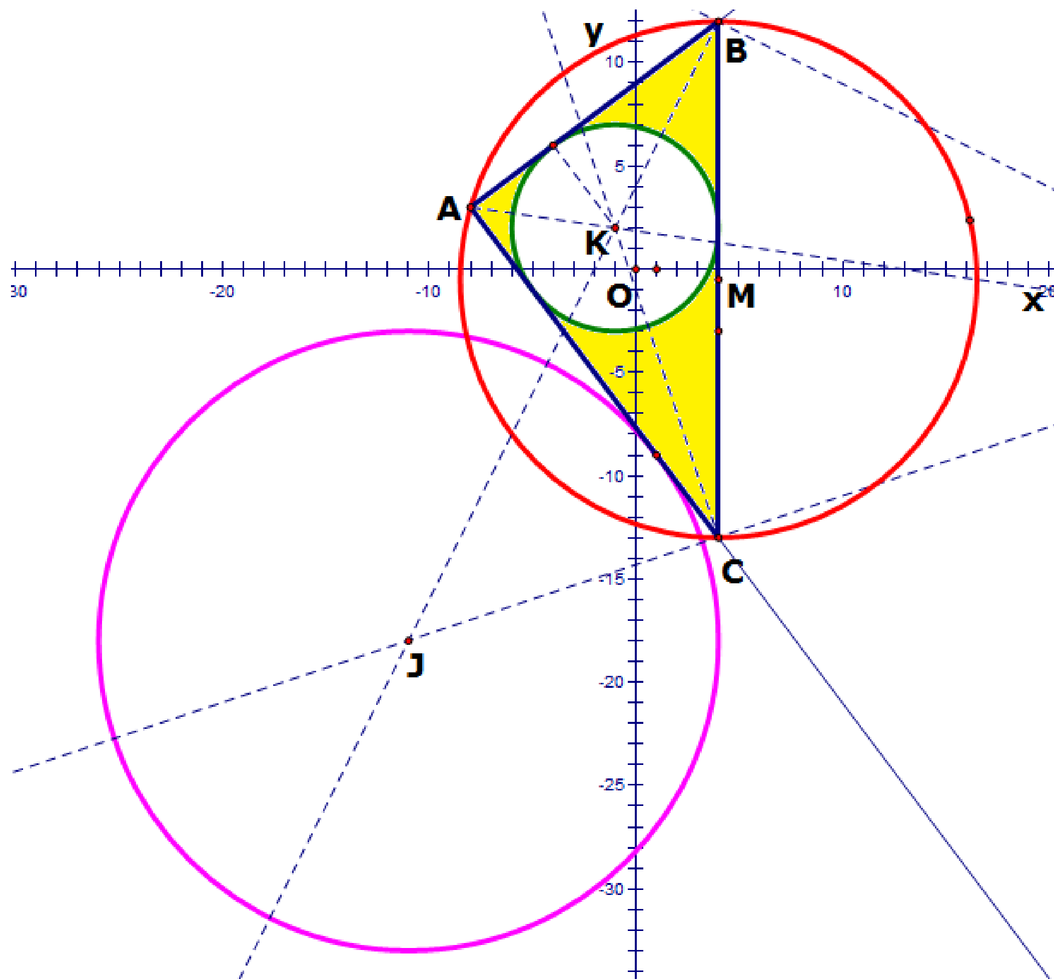
Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ A(–8; 3), B(4; 12), C(4; –13).

a. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c. Viết phương trình bàng tiếp trong góc B của tam giác ABC.

☺ **Hướng dẫn giải.**



- **a.** Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Ta có: $\begin{cases} A \in (C) \\ B \in (C) \\ C \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 73 + 16a - 6b + c = 0 \\ 160 - 8a - 24b + c = 0 \\ 185 - 8a + 26b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \dfrac{-1}{2} \\ c = -140 \end{cases}$

Do đó: $\boxed{(C): x^2 + y^2 - 8x + y - 140 = 0}$

Chú ý: *nếu bạn đọc phát hiện tam giác ABC vuông tại A thì việc tính toán còn nhẹ nhàng hơn nữa. Vì khi đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là trung điểm M của cạnh huyền BC và bán kinh MB.*

- **b.** Từ tọa độ 3 đỉnh A, B, C dễ dàng lập được 3 phương trình chứa 3 cạnh của tam giác là:

$$\boxed{AB: 3x - 4y + 36 = 0,\ AC: 4x + 3y + 23 = 0,\ BC: x - 4 = 0}$$

Khi đó phương trình 2 đường phân giác góc B là: $\dfrac{x-4}{1} = \pm\dfrac{3x - 4y + 36}{5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4y-56=0 \Rightarrow k_1 = \dfrac{-1}{2} < 0 \ (1) \\ 2x-y+4=0 \Rightarrow k_2 = 2 > 0 \ (2) \end{array}\right.$$ với $k_1;k_2$ là các hệ số góc.

Vì phân giác trong của góc B tạo với trục hoành Ox một góc nhọn dương nên có hệ số góc dương. Do đó ta nhận trường hợp (2): **2x – y + 4 = 0.**

Tương tự phương trình 2 đường phân giác góc C là: $\dfrac{x-4}{1} = \pm\dfrac{4x+3y+23}{5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y-43=0 \Rightarrow k_3 = \dfrac{1}{3} > 0 \ (3) \\ 3x+y+1=0 \Rightarrow k_4 = -3 < 0 \ (4) \end{array}\right.$$ với $k_3;k_4$ là các hệ số góc.

Vì phân giác trong của góc B tạo với trục hoành Ox một góc tù dương nên có hệ số góc âm. Do đó ta nhận trường hợp (3): 3**x + y + 1 = 0.**

Do đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên tâm K cần tìm là giao điểm của các đường phân giác trong các góc B, C, A. Do đó tọa độ K thỏa hệ: $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ 3x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-1;2)}$.

Xét khoảng cách từ K đến BC ta suy ra r = 5

Do đó: $\boxed{(\mathrm{K}):(x+1)^2+(y-2)^2=25}$

- c. Ta có đường phân giác ngoài của góc C là d: x – 3y + m = 0. d qua C(4; –13) suy ra m = – 43.

  Vậy d: x – 3y – 43 = 0. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác nên tọa độ J thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ x-3y-43=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{J(-11;-18)}$.

  Bán kinh đường tròn bàng tiếp là khoảng cách từ J đến AC suy ra R' = 15.

  Do đó: $\boxed{(J):(x+11)^2+(y+18)^2=225}$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn (C) biết:

a. (C) đi qua hai điểm A(2; 5), B(4;1) và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình 3x – y + 9 = 0.

b. (C) đi qua hai điểm A(–1; 0), B(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng d có phương trình x – y – 1 = 0.

c. (C) có bán kính bằng $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ và tâm I thuộc d: x + 2y – 3 = 0 và tiếp xúc với $\Delta: x+3y-5=0$.

☺ **Hướng dẫn giải.**

● **a.** Gọi I(a; b) là tâm đường tròn ta có hệ:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = d(\text{I};\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)^2 + (5-b)^2 = (4-a)^2 + (1-b)^2 \ (1) \\ (2-a)^2 + (5-b)^2 = \dfrac{(3a-b+9)^2}{10} \ (1) \end{cases}$$

Suy ra a = 2b – 3 thay vào (2) ta được: $b^2 - 12b + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 10 \end{array}\right.$

Với b = 2 suy ra a = 1 và $R = \sqrt{10} \Rightarrow \boxed{(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10}$

Với b = 10 suy ra a = 17 và $R = \sqrt{250} \Rightarrow \boxed{(C_2): (x-17)^2 + (y-10)^2 = 250}$

● **b.** Giả sử phương trình cần tìm là $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Vì đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với d nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (1+a)^2 + b^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \\ (a-b-1)^2 = 2R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ R^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy đường tròn cần tìm là: $\boxed{x^2 + (\text{y}-1)^2 = 2}$

●**c.** Tâm đường tròn thuộc d nên có dạng $I(-2a+3; a)$

Đường tròn tiếp xúc với Δ nên

$$d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow a = 6; a = -2$$

Với $a = 6$ ta có $I(-9;6)$ suy ra phương trình đường tròn: $(x+9)^2 + (y-6)^2 = \dfrac{8}{5}$

với $a = -2$ ta có $I(7;-2)$, suy ra phương trình đường tròn: $(x-7)^2 + (y+2)^2 = \dfrac{8}{5}$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn là:

$$\boxed{(x+9)^2 + (y-6)^2 = \frac{8}{5} \ hay \ (x-7)^2 + (y+2)^2 = \frac{8}{5}}.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường cong

$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y - m + 6 = 0$ (m là tham số thực).

a. Tìm m để C_m là đường tròn.

b. Tìm tập hợp tâm của C_m khi m lấy các giá trị từ câu a.

☺ **Hướng dẫn giải.**

● Ta có đường cong C_m là đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2+b^2-c\ge 0 \Leftrightarrow m^2+4(m-2)^2+m-6\ge 0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$$

Vậy khi $m\le 1$ *hay* $m\ge 2$ thì C_m là đường tròn.

● Gọi I(x; y) là tâm đường tròn C_m, ta có:

$$\begin{cases} x=m \\ y=2(m-2) \\ \text{m}\le 1 \text{ } hay \text{ } m\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ y=2(x-2) \\ \text{m}\le 1 \text{ } hay \text{ } m\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-4=0 \\ x\le 1 \text{ } hay \text{ } x\ge 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp tâm I là đường thẳng 2x – y – 4 = 0 thỏa $x<1$ *hay* $x>2$ (*ta không xét tạ x = 1 và x = 2 vì khi đó đường tròn chỉ là những đường tròn điểm).*

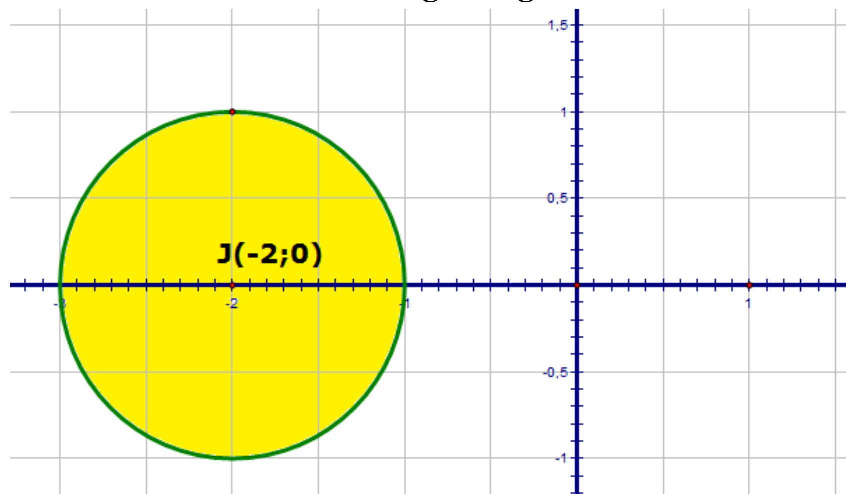
Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chứng tỏ mỗi phương trình sau đây là các phương trình đường tròn và tìm tập hợp tâm của nó.

a. $(C_1): x^2+y^2-2(\cos\alpha-2)x-2y\sin\alpha+1=0$ (α là tham số).

b. $(C_2): x^2+y^2-2e^{-m}x-4e^{m}y-1+e^{-2m}=0$ (m là tham số).

c. $(C_3): x^2+y^2-2tx-2y\ln t-3+\ln^2 t=0$ (t là tham số).

☺ **Hướng dẫn giải.**



a. Đường cong $(C_1): x^2 + y^2 - 2(\cos\alpha - 2)x - 2y\sin\alpha + 1 = 0$ có:

$$a^2 + b^2 - c = (\cos\alpha - 2)^2 + \sin^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 4 - \cos^2\alpha$$
$$= 4(1 - \cos\alpha) \geq 0,\ \forall\alpha \in R$$

(do $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$). Vậy (C1) là đường tròn.

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn (C1) nên thỏa

$$\begin{cases} x = \cos\alpha - 2 \\ y = \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = x - 2 \\ \sin\alpha = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha = (x-2)^2 \\ \sin^2\alpha = y^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x-2)^2 + y^2 = 1}$$

Vậy tập hợp tâm I của những đường tròn (C1) là đường tròn (C') có tâm J(2; 0), bán kính R' bằng 1.

b. Đường cong $(C_2): x^2 + y^2 - 2e^{-m}x - 4e^{m}y - 1 + e^{-2m} = 0$ có:

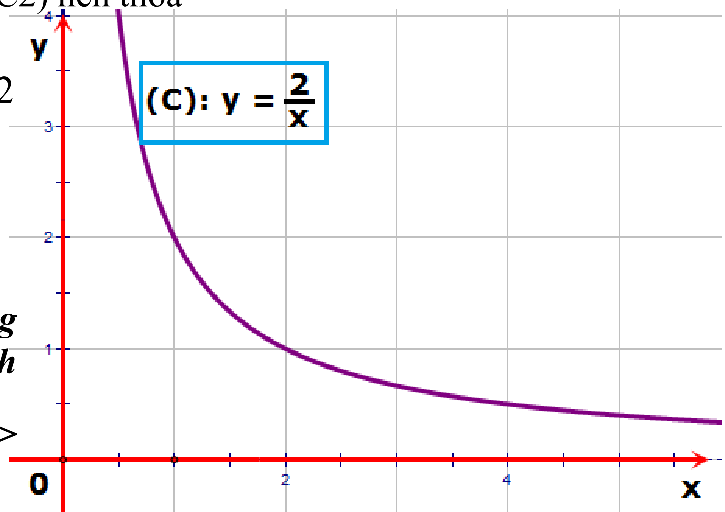
$$a^2 + b^2 - c = e^{-2m} + 4e^{2m} + 1 - e^{-2m} = 4e^{2m} + 1 \geq 0,\ \forall m \in R.$$

Vậy (C2) là đường tròn.

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn (C2) nên thỏa

$$\begin{cases} x = e^{-m} \\ y = 2e^{m} \end{cases} \Leftrightarrow xy = e^{-m}.2e^{m} = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{2}{x}\ (x > 0,\ y > 0)}$$



Vậy tập hợp tâm I của những đường tròn (C2) là một nhánh của hypebol $y = \frac{2}{x}$ thỏa x, y > 0 khi m thay đổi.

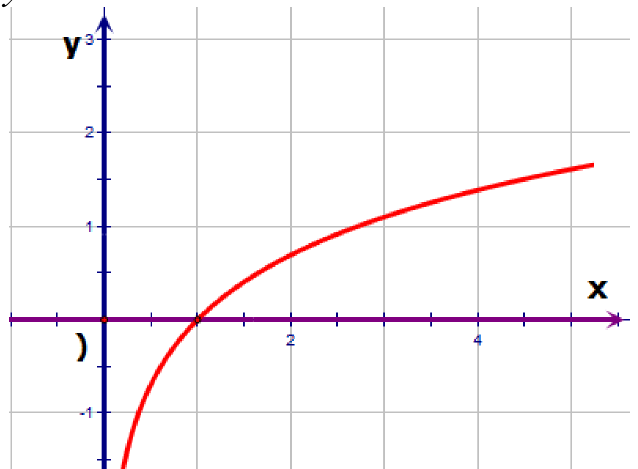
d. Đường cong $(C_3): x^2 + y^2 - 2tx - 2y\ln t - 3 + \ln^2 t = 0$ có:

$$a^2 + b^2 - c = t^2 + \ln^2 t + 3 - \ln^2 t$$
$$= t^2 + 3 \geq 0,\ \forall t \in R$$

Vậy (C3) là đường tròn.

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn (C2) nên thỏa

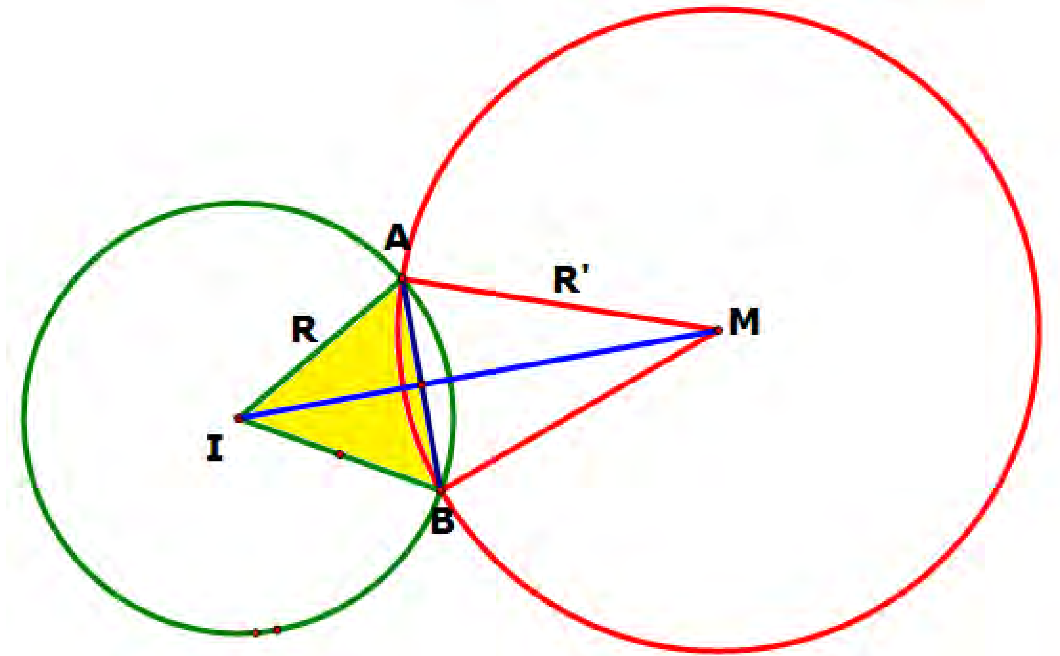
$$\begin{cases} x = t \\ y = \ln t \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{y = \ln x\ (x > 0)}$$



Vậy tập hợp tâm I của những đường tròn (C3) là đường logarit neper y = lnx (x > 0).

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5, 1) biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

☺ **Hướng dẫn giải.**



●Đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3 \Rightarrow I(1;-2), R = \sqrt{3}$

●Gọi H là giao của AB với (IM). Do đường tròn (C') tâm M có bán kính R' = MA .

● Nếu $AB = \sqrt{3} = IA = R$, thì tam giác IAB là tam giác đều , cho nên IH=$\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ (đường cao tam giác đều).

Và ta có: IM=5 suy ra HM= $5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

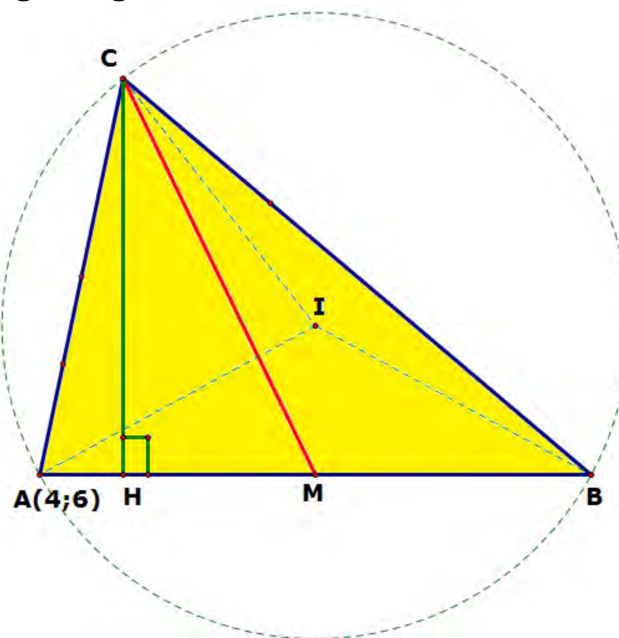
● Trong tam giác vuông HAM ta có $MA^2 = IH^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{49}{4} + \frac{3}{4} = 13 = R'^2$.

Do đó: $\boxed{(C):(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13}$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;6)$, phương trình các đường thẳng chứa đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh C lần lượt là

$2x-y+13=0$ và $6x-13y+29=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

☺ **Hướng dẫn giải.**



- Giả sử phương trình đường cao và đư
  $HC: 2x-y+13=0$ và
  $MC: 6x-13y+29=0$ (trong đó
  H là chân đường cao kẻ từ C và M là
  trung điểm AB).
- Ta có C là giao điểm giữa MC và HC nên tọa độ C thỏa hệ
  $\begin{cases}2x-y+13=0\\6x-13y+29=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-7\\y=-1\end{cases}$
  $\Rightarrow \boxed{C(-7;-1)}$.

- Ta có AB vuông góc HC: 2x – y + 13 = 0 nên AB có dạng: AB: x + 2y + m = 0.
  Lại có AB qua A(4; 6) suy ra m = –16. Vậy $AB: x+2y-16=0$
  Ta có M là trung điểm AC và là giao điểm AB và CM nên tọa độ M thỏa hệ:
  $$\begin{cases}x+2y-16=0\\6x-13y+29=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6\\y=5\end{cases} \Rightarrow \boxed{M(6;5)}.$$
  Do M là trung điểm AC nên ta suy ra tọa độ B(8; 4).
- Gọi phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng: $x^2+y^2+mx+ny+p=0$
  Ta có: $\begin{cases}A\in(C)\\B\in(C)\\C\in(C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}52+4m+6n+p=0\\80+8m+4n+p=0\\50-7m-n+p=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-4\\n=6\\p=-72\end{cases}$
  Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:
  $\boxed{x^2+y^2-4x+6y-72=0}$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A\left(2\sqrt{3};2\right), B\left(2\sqrt{3};-2\right)$

a. Chứng tỏ tam giác OAB là tam giác đều.

b. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho : $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 32$ là một đường tròn (C).

c. Chứng tỏ (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

☺ **Hướng dẫn giải.**

- Ta có: $\begin{cases} OA = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4 \\ OB = 4 \\ AB = 4 \end{cases} \Rightarrow OB = OA = AB$ suy ra tam giác OAB là tam giác đều.
- Gọi M(x;y) thì đẳng thức giả thiết cho tương đương với biểu thức :

Ta có : $\begin{cases} MO^2 = x^2 + y^2 \\ MA^2 = x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y + 16 \\ MB^2 = x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y + 16 \end{cases}$

$\Rightarrow MO^2 + MA^2 + MB^2 = 32 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 8\sqrt{3}x + 32 = 32$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2.$

Chứng tỏ là đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};0\right), R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

- Thay tọa độ O,A,B vào (1) ta thấy thỏa mãn , chứng tỏ (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $\Delta : x + y + 9 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc Δ và tiếp xúc với (E) có bán kinh nhỏ nhất.

☺ **Hướng dẫn giải.**

CÁCH 1:

- Gọi d là đường thẳng song song với Δ và tiếp xúc với Elip và khoảng cách từ d đến elip gần nhất.

  Phương trình đường thẳng d có dạng: x + y + c = 0.
- Đường thẳng d tiếp xúc với Elip khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ x + y + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = \pm 3$$

- Với c = 3 thì khoảng cách d và Δ là nhỏ nhất. Suy ra d: x + y + 3 = 0.

  Tiếp điểm của d và elip là $M\left(\dfrac{-5}{3}; \dfrac{-4}{3}\right)$. Gọi (C) là đường tròn cần tìm có tâm I và bán kinh R.

  Ta có: $R \geq d(d;\Delta) = \dfrac{|-3+9|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

  Tâm I thuộc đường Δ suy ra I(t; – t – 9).
  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi, I là giao điểm của đường thẳng qua M và vuông góc với d và đường thẳng Δ. Khi đó (C) tiếp xúc với d và (E) tại M.

  Từ đó tìm được tâm $I\left(\dfrac{-14}{3}; \dfrac{-13}{3}\right)$, $R = 3\sqrt{2}$

  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{\left(x + \dfrac{14}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{13}{3}\right)^2 = 18}$

CÁCH 2:

- Gọi (C) là đường tròn cần tìm có tâm I và bán kinh R. Ta có I thuộc Δ suy ra I(t; – t – 9).

  Gọi M(m; n) là tiếp điểm của (C) và (E) suy ra $\dfrac{m^2}{5} + \dfrac{n^2}{4} = 1$

  Theo bất đẳng thức Cauchy Schwart ta có:

  $$(m+n)^2 \leq \left(\frac{m^2}{5} + \frac{n^2}{4}\right)(5+4) = 9 \Rightarrow \boxed{-3 \leq m+n \leq 3}$$

- Ta có $R^2 = (m-t)^2 + (n+t+9)^2 \geq \dfrac{(m-t+n+t+9)^2}{2} = \dfrac{(m+n+9)^2}{2} \geq 18$

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} m - t = n + t + 9 \\ \dfrac{m}{5} = \dfrac{n}{4} \\ \dfrac{m^2}{5} + \dfrac{n^2}{4} = 1 \\ m + n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-5}{3} \\ n = \dfrac{-4}{2} \\ a = \dfrac{-14}{3} \end{cases}$

- Khi đó ta có tâm $I\left(\frac{-14}{3};\frac{-13}{3}\right)$, $R=3\sqrt{2}$, ta sẽ chứng minh (C) tiếp xúc (E).

  Thật vậy lập phương trình hoành độ của (C) và (E) ta dễ dàng kiểm tra được điều này.

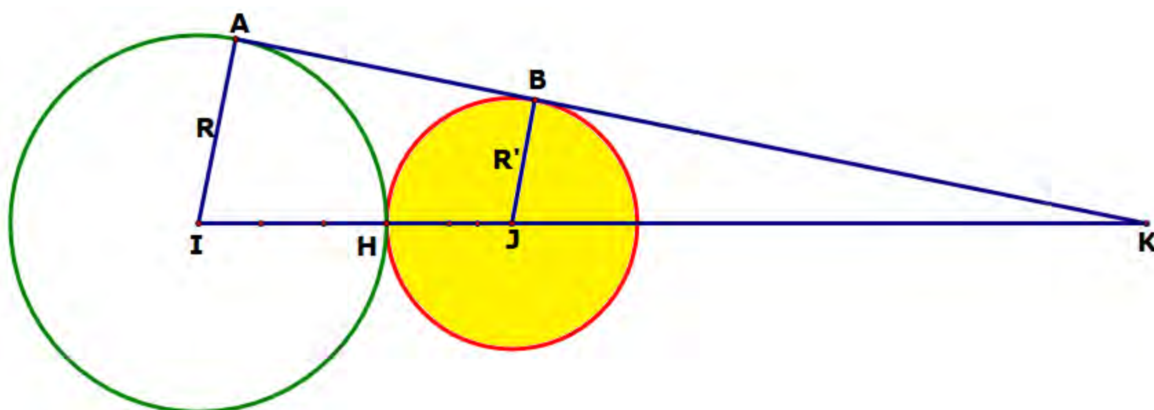
  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{\left(x+\frac{14}{3}\right)^2+\left(y+\frac{13}{3}\right)^2=18}$

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phương trình đường tròn :
(C_1) : $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ và (C_2) : $x^2+y^2-10x-6y+30=0$có tâm lần lượt là I, J.

a. Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm tọa độ tiếp điểm H .

b. Gọi (d) là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2) . Tìm tọa độ giao điểm K của (d) và đường thẳng IJ . Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H .

☺ **Hướng dẫn giải.**



●**a.**(C_1) có tâm I(2; –1) và bán kính R = 3, (C_2) có tâm J(5; 3) và bán kinh R' = 2.

Ta có: $\begin{cases} IJ=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5 \\ R+R'=5 \end{cases} \Rightarrow IJ=R+R'$ suy ra (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài tiếp nhau.

Ta có H là tiếp điểm của 2 đường tròn trên nên H, I, J thẳng hàng và ta có:

$$\frac{IH}{HJ}=\frac{R}{R'}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\overrightarrow{HI}=-3\overrightarrow{HJ}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x_I-x_H)=-3(x_J-x_H)\\2(y_I-y_H)=-3(y_J-y_H)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\frac{19}{5}\\y_H=\frac{7}{5}\end{cases}\Rightarrow\boxed{H\left(\frac{19}{5};\frac{7}{5}\right)}$$

● **b.**Ta có: $2\overrightarrow{KI} = 3\overrightarrow{KJ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_I - x_K) = 3(x_J - x_K) \\ 2(y_I - y_K) = 3(y_J - y_K) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 11 \\ y_K = 11 \end{cases}$

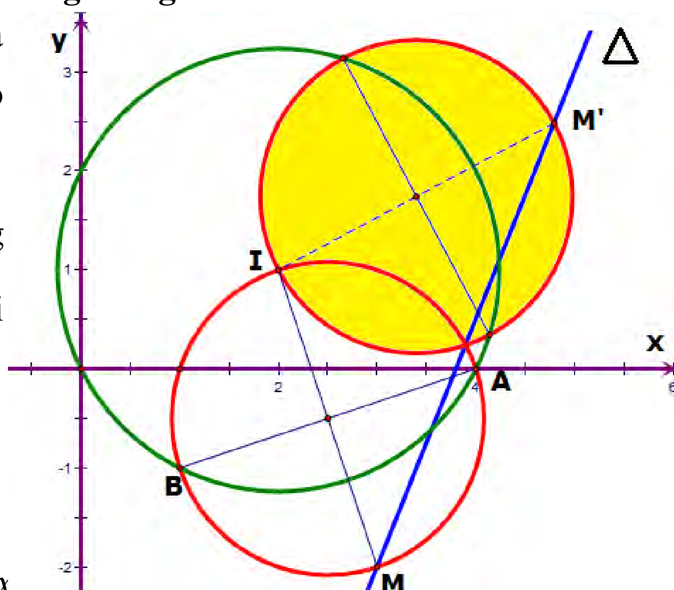
$\Rightarrow$ **K(11; 11).**

Đường tròn (C) qua K tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) thì tâm E của (C) là trung điểm của KH suy ra tọa độ điểm $E\left(\frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$. Khi đó (C) tiếp xúc ngoài với (C_1) và tiếp xúc trong với (C_2).

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là: $\boxed{\left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36}$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng Δ có phương trình $5x - 2y - 19 = 0$. Từ một điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A và B là hai tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB = \sqrt{10}$

☺ **Hướng dẫn giải.**



● Đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính $R = \sqrt{5}$. Gọi H là giao điểm MI và AB.

Ta có: $MI = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Trong tam giác vuông MAI (tại A) với đường cao AH ta có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2}$

$\Leftrightarrow AM = \sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{10}$

● Ta có: M thuộc đường thẳng $\Delta: 5x$

Khi đó:

$$MI^2 = 10 \Leftrightarrow (3+2m)^2 + (2+5m)^2 = 10 \Leftrightarrow 29m^2 + 32m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{-3}{29} \end{array}\right.$$

● Nhận xét đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB là đường tròn đường kinh MI.

Với $m=-1 \Rightarrow M(3;-2) \Rightarrow (C_1): \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

Với $m=\frac{-3}{29} \Rightarrow M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right) \Rightarrow (C_2): \left(x-\frac{197}{58}\right)^2+\left(y-\frac{101}{58}\right)^2=\frac{5}{2}$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

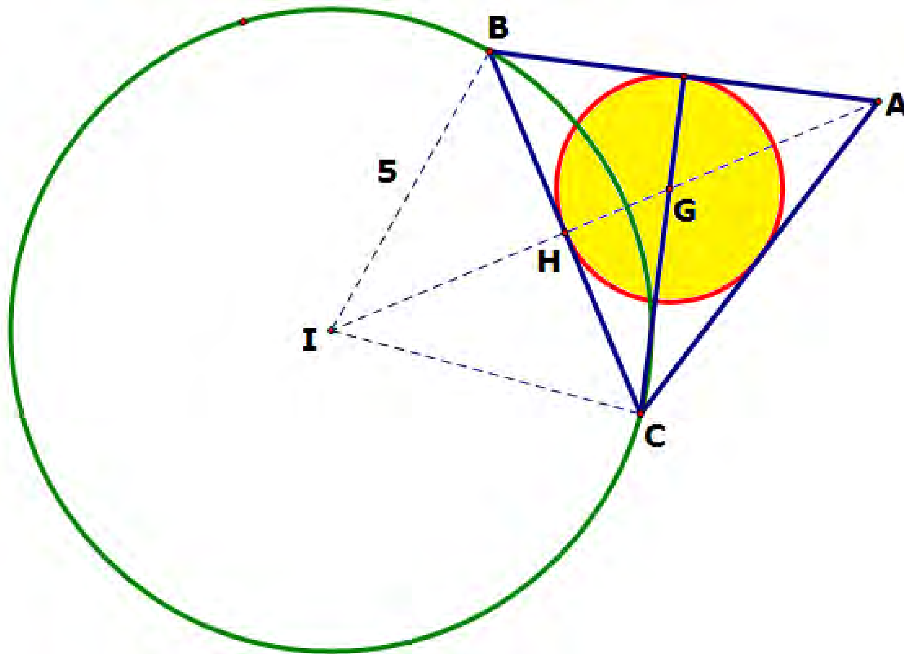
$$\boxed{(C_1): \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \text{ hay } (C_2): \left(x-\frac{197}{58}\right)^2+\left(y-\frac{101}{58}\right)^2=\frac{5}{2}}$$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và điểm $A(5;-6)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (C) với B, C là các tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

☺ **Hướng dẫn giải.**

- (C) có tâm I(–1; 2) và bán kính R = 5. BC cắt IA tại H. Ta có: IA = 10

Suy ra $IH=\frac{IB^2}{IA}=\frac{5}{2}$. Do đó: $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2};0\right)$.



- Ta có: $\cos\angle AIB=\frac{1}{2} \Rightarrow \angle AIB=60^0 \Rightarrow \angle ABC=60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Suy ra tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH} \Rightarrow \boxed{G(2;-2)}$

Và đồng thời bán kinh đường tròn nội tiếp là: $r = GH = \dfrac{5}{2}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(x-2)^2 + (y+2)^2 = \dfrac{25}{4}}$

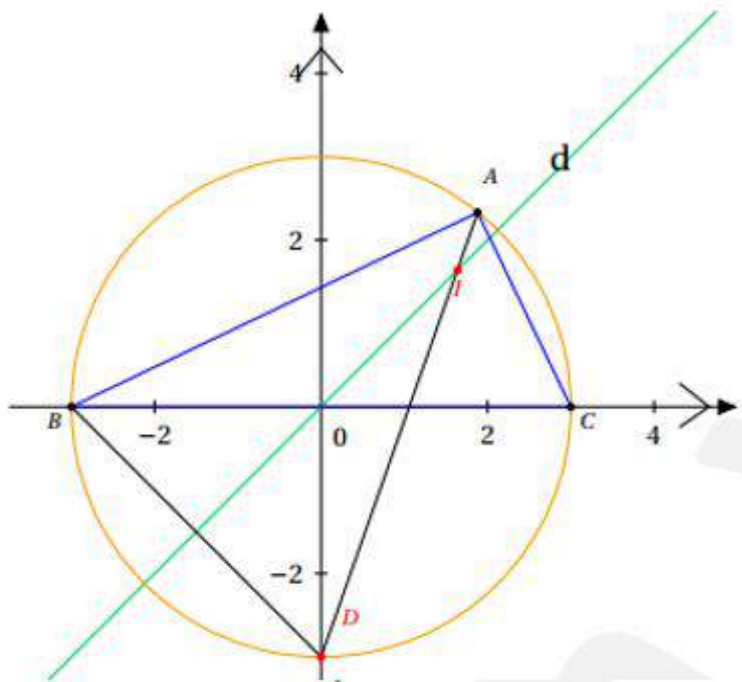
Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A với B(–3; 0), C(3; 0). Biết tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc đường thẳng d: y = x. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết I có tung độ dương.

☺ Hướng dẫn giải.

- Vì tam giác ABC vuông tại A và toa độ B(–3; 0), C(3; 0) suy ra A nằm trên đường tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kinh R = 3.

  Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là đường phân giác trong của tam giác ABC. Gọi D là giao điểm thứ hai của Ai với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

  Khi đó, dễ dàng chứng minh được tam giác DBC vuông cân tại D và suy ra tọa độ **D(0; –3)**.



- Hơn nữa ta có:

  $\angle DBC = \angle DAB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung) (1)

  $\angle IBC = \angle IBA$ (do BI là phân giác). (2)

  Từ (1), (2) suy ra $\angle DBI = \angle BID$ suy ra tam giác BID cân tại D.

  Suy ra ID = BD = $\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

- Giả sử I(a; a) thuộc đường thẳng d. Ta có

$$\sqrt{(a+3)^2+a^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\frac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow I\left(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2};\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)\text{ (do a > 0)}$$

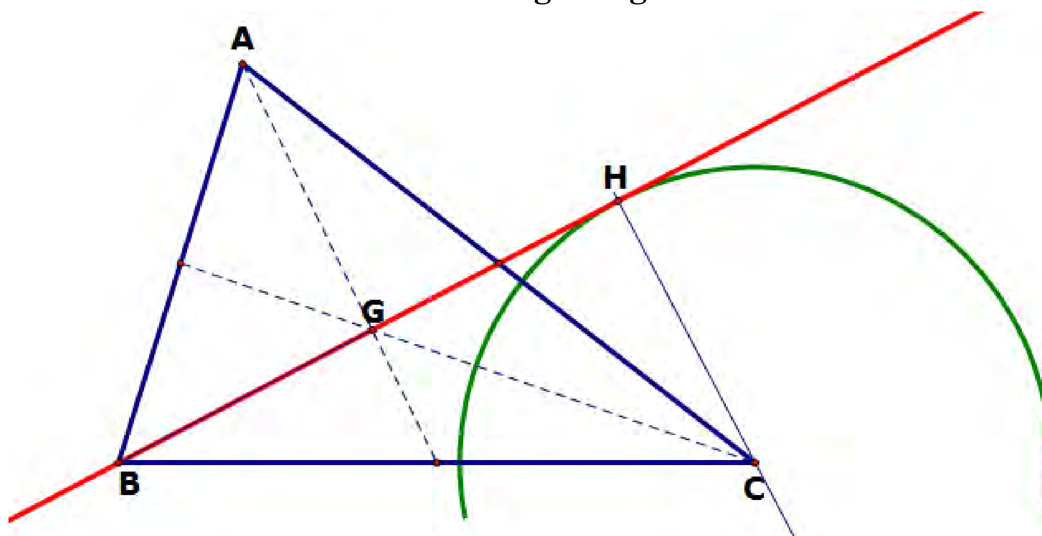
- Và bán kinh đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=d(I;BC)=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$\boxed{(C):\left(x-\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{36-18\sqrt{3}}{4}}$$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(2; 3), trọng tâm G(2; 0). Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x+y+5=0$, $d_2: x+2y-7=0$. Viết phương trình đường tròn tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG.

☺ **Hướng dẫn giải.**



- Ta có $\begin{cases}B\in d_1\\C\in d_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B(-b-5;b)\\C(-2c+7;c)\end{cases}$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+2c+2=0\\b+c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\c=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(-1;-4),\ C(5;1)}$$

- Ta có BG qua G(2; 0) nhận $\overrightarrow{BG}=(3;4)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}\Leftrightarrow\boxed{BG:4x-3y-8=0}$$

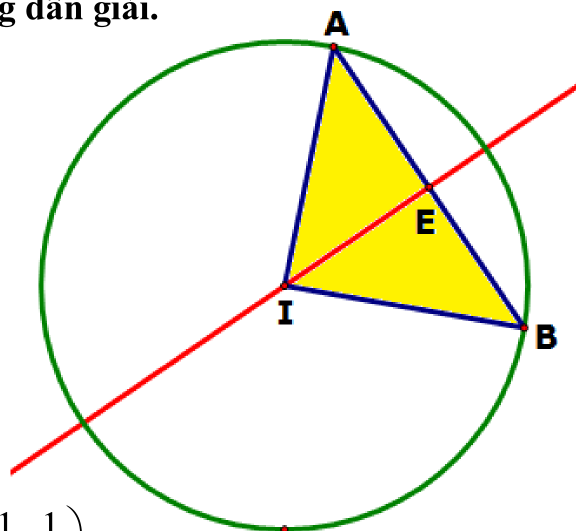
- Ta có đường tròn (C) tiếp xúc với BG nên ta có:

$$R = d(C;BG) = \frac{|4.5 - 3.1 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{9}{5}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(x-5)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{25}}$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm I đi qua hai điểm A(1; 0) và B(0; 1) sao cho diện tích tam giác IAB bằng 9. Viết phương trình đường tròn (C).

☺ **Hướng dẫn giải.**



- Gọi E là trung điểm của AB.

  Ta có $AB = \sqrt{2} \Rightarrow EB = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  Khi đó: $S_{IAB} = \frac{1}{2}AB.AE = EB.IE = 9$

  $\Rightarrow IE = 9\sqrt{2}$

  Và $R = IB = \sqrt{IE^2 + EB^2} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$

- Do E là trung điểm AB nên ta có $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

  Phương trình đường thẳng IE qua E và vuông góc AB có dạng là: **x – y = 0.** Suy ra I(a; a) thuộc IE.

- Ta có: $IE^2 = 162 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 162 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{19}{2} \\ a = \frac{-17}{2} \end{array}\right.$

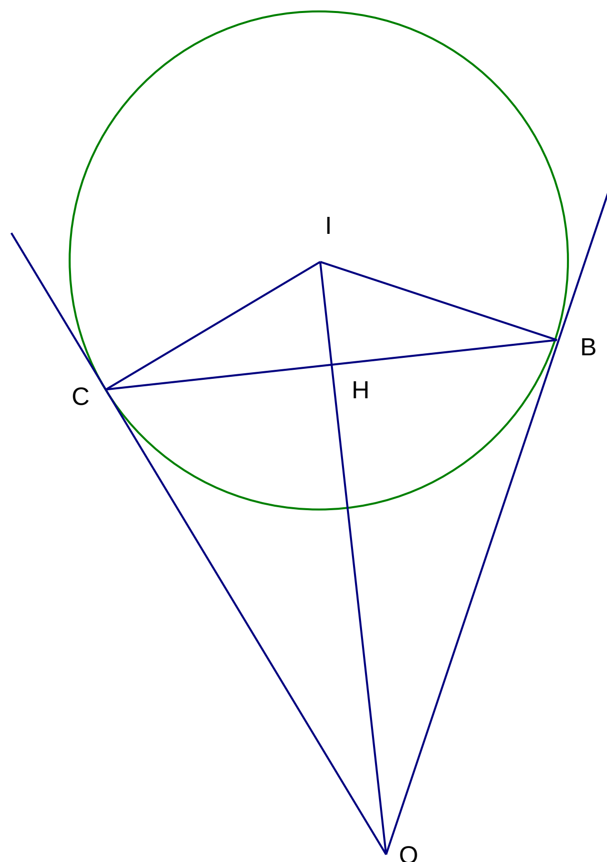
  Do đó $\boxed{I\left(\frac{19}{2};\frac{19}{2}\right) \; hay \; I\left(\frac{-17}{2};\frac{-17}{2}\right)}$

  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$\boxed{\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{2}\right)^2 = \frac{325}{2} \; hay \; \left(x + \frac{17}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{325}{2}}$$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $y=\sqrt{3}$. Gọi (C) là đường tròn cắt d tại 2 điểm B, C sao cho tiếp tuyến của (C) tại B và C cắt nhau tại O. Viết phương trình đường tròn (C), biết tam giác OBC đều.

☺ Hướng dẫn giải.



- Gọi (C) có tâm I bán kính R. OI cắt BC tại H thì H là trung điểm BC và OH vuông góc BC
- Suy ra $H(0;\sqrt{3}) \Rightarrow OH=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ do tam giác OBC đều nên $OH=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow BC=2$.
- Trong tam giác vuông IB có $HB^2=HI.HO=1 \Rightarrow IH=\frac{1}{\sqrt{3}}$

  $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}=(0;\frac{\sqrt{3}}{3})$

  $\Rightarrow I(0;\frac{4\sqrt{3}}{3})$
- Trong tam giác vuông IBH có $R^2=IB^2=IH^2+HB^2=\frac{4}{3}$

  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

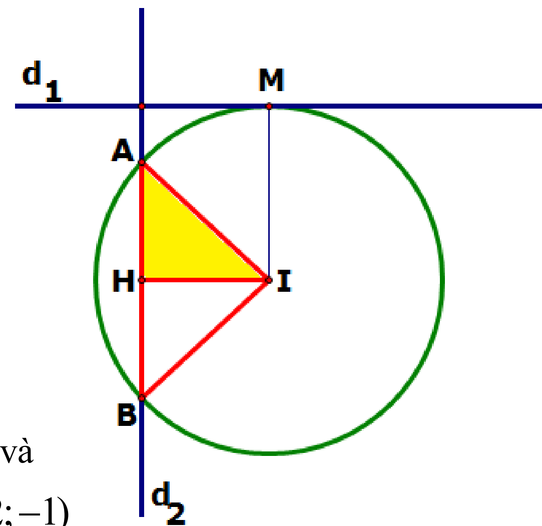
$$\boxed{x^2+\left(y-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}}$$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 4x-3y+14=0$, $d_2: 3x+4y+13=0$ và điểm M(–2; 2). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M tiếp xúc với d_1 và cắt d_2 theo dây cung AB = 8.

☺ Hướng dẫn giải.

- Vì $M\in d_1 \Rightarrow$ M là tiếp điểm của (C) và d_1. Nhận xét $d_1\perp d_2$ nên ta có:

  $d(I;d_1)=d(I;d_2)=3$



- Mặt khác,

$$R = IA = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + IH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

- Đường thẳng IM đi qua M và vuông góc d_1 có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases} (t \in R)$$

- Do I thuộc IM nên ta có $I(4t - 2; 2 - 3t)$ và

$$IM = 5 \Leftrightarrow 25t^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I(2;-1) \\ I(-6;5) \end{array}\right.$$

- ***Vậy phương trình đường tròn cần tìm là*** $\left[\begin{array}{l} (C):(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ (C):(x+6)^2 + (y-5)^2 = 25 \end{array}\right.$

CHỦ ĐỀ 2.4:

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CÁC ĐƯỜNG CONIC.

Đối với chủ đề 2.4, sẽ có một chút khác biệt với các chủ đề còn lại của chương này do phần lớn các nội dung trong đây nằm trong chương trình giảm tải của Bộ GD&ĐT. Phần trình bày các dạng toán liên quan sẽ chủ yếu tập trung xoay quanh Elip. Với các vấn đề còn lại, tác giả cũng cố gắng đưa vào và sẽ trở thành phần kiến thức nâng cao, đọc thêm với những bạn muốn tìm hiểu sâu hơn đối với những đường Conic còn lại trong chương trình như Hypebol, Parabol, ...

BÀI TOÁN 1 (NHẬN DẠNG CONIC VÀ CÁC THUỘC TÍNH CỦACÁC ĐƯỜNG CONIC). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các phương trình* $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$, $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ *và* $(P): y^2 = 2x$. *Hãy nhận dạng các đường conic trên và tìm các thuộc tính của chúng ?*

■ **Đặt vấn đề:** *với dạng toán trên thì các bạn cần nắm vững kiến thức về phương trình chính tắc của các đường Elip, Hypebol, Parabol cùng với đó là các thuộc tính của chúng. (Các bạn có thể xem lại lý thuyết Chương 1 để hiểu rõ hơn).*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Ta có: $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \quad (do\, a, b, c > 0) \\ c = \sqrt{7} \end{cases}$$

Suy ra phương trình (E) chính là Elip có:

Tọa độ các đỉnh là:

$A_1(-4;0), A_2(4;0), B_1(0;-3), B_2(0;3)$.

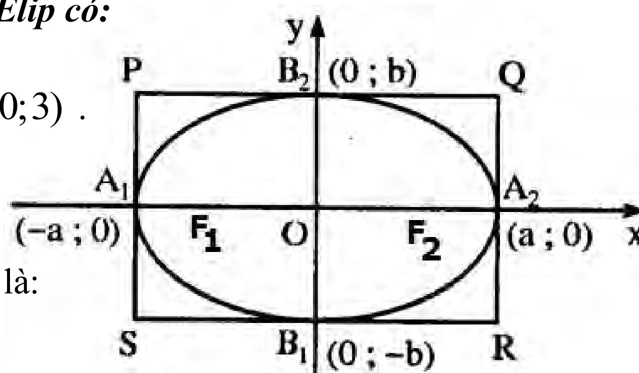
Tọa độ hai tiêu điểm là:

$F_1(-\sqrt{7};0), F_2(\sqrt{7};0)$.

Độ dài trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự là:

$A_1A_2 = 2a = 8, B_1B_2 = 2b = 6,$

$F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{7}$.

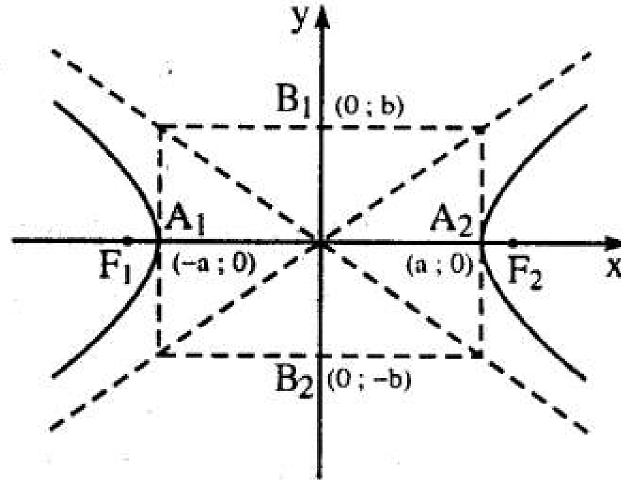


Bán kinh qua tiêu điểm F là:

$$\forall M(x_M;y_M)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1=a+\dfrac{c}{a}x_M=4+\dfrac{\sqrt{7}}{4}x_M\\MF_2=a-\dfrac{c}{a}x_M=4-\dfrac{\sqrt{7}}{4}x_M\end{cases}$$

Tâm sai là: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}<1$

Ta có: $(H):\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$



$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=9\\b^2=16\\c^2=b^2+a^2=25\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\ (do\,a,b,c>0)\\c=5\end{cases}$$

Suy ra phương trình (H) chính là Hypebol có:

Tọa độ các đỉnh là: $A_1(-3;0), A_2(3;0),\ B_1(0;-4),\ B_2(0;4)$.

Tọa độ hai tiểu điểm là: $F_1(-5;0),\ F_2(5;0)$.

Độ dài trục thực, trục ảo và tiêu cự là:

$A_1A_2=2a=6,\ B_1B_2=2b=8,\ F_1F_2=2c=10$.

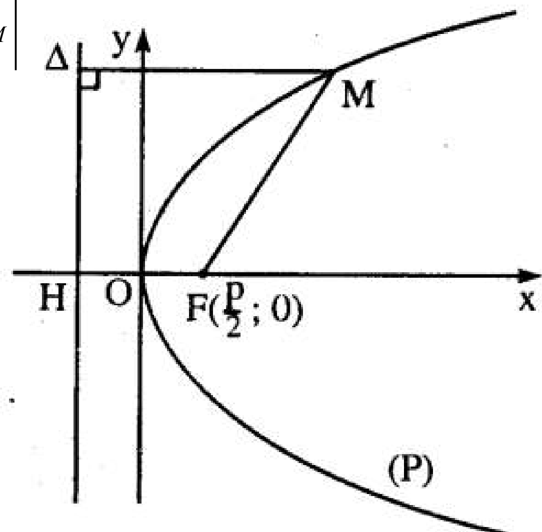
Bán kinh qua tiêu điểm F là:

$$\forall M\in(\Rightarrow H)\begin{cases}MF_1=\left|a+\dfrac{c}{a}x_M\right|=\left|3+\dfrac{5}{3}x_M\right|\\MF_2=\left|a-\dfrac{c}{a}x_M\right|=\left|3-\dfrac{5}{3}x_M\right|\end{cases}$$

Tâm sai là: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}>1$.

Ta có: $(P):y^2=2x\Rightarrow p=2$ **.**

Suy ra phương trình (P) chính là Parabol có:



Tiêu điểm $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)=(1;0)$.

Bán kinh qua tiêu điểm F là:

$$\forall M \in (P) \Rightarrow MF = x + \frac{p}{2} = x + 1$$

BÀI TOÁN 2 (VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP DỰA VÀO CÁC THUỘC TÍNH). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của Elip (E) sau biết:*

a. (E) có độ dài trục lớn bằng 4 và độ dài trục nhỏ bằng 2.

b. (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và khoảng cách giữa hai đỉnh liên tiếp $A_1B_1 = 5$.

c. (E) có độ dài trục nhỏ bằng $2\sqrt{5}$ và độ dài tiêu cự bằng 4.

d. (E) có độ dài tiêu cự $F_1F_2 = 8$ và một điểm M thuộc (E) sao cho chu vi tam giác MF_1F_2 bằng 18.

e. (E) có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và tâm sai $e = \frac{3}{5}$.

f. (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 20.

g. (E) lần lượt có diện tích và chu vi hình chữ nhật cơ sơ là 128 và 48.

h. (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và một đường thẳng d vuông góc Ox tại tiêu điểm F_2 và cắt (E) tại A, B với độ dài AB = 1. (với F_2 là tiêu điểm bên trái).

i. (E) đi qua $D\left(2;\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ và đỉnh $B_1(0;-3)$.

j. (E) đi qua $M\left(\frac{-3}{2};\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ và có độ dài $MF_1 = 2\sqrt{2}$ (với F_1 là tiêu điểm bên trái).

k. (E) đi qua $P\left(2;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và có độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở là 10.

l. (E) đi qua $N(1;-3)$ và một tiêu điểm cùng với hai đỉnh của trục nhỏ lập thành một tam giác đều.

► ***Nhận xét và phương pháp chung*** **:** *Viết phương trình chính tắc của Elip là một dạng toán điển hình, thương xuyên gặp phải trong quá trình giải các bài toán liên quan đến Elip. Phương pháp chung khi giải các bài toán có yêu cầu trên là:*

Bước 1: Giả sử Elip có dạng chính tắc là

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0) \ (c^2 = a^2 - b^2)$$

Bước 2: Dựa vào giả thiết là các thuộc tính của (E), ta thiết lập 2 phương trình 2 ẩn liên quan đến a và B. Giải hệ hai phương trình hai ẩn trên để tìm ra a và b từ đó tìm được phương trình chính tắc của elip.

Chú ý:*Để có thể vận dụng được các giả thiết đó, bạn đọc cần nắm chắc kiến thức liên quan được giới thiệu ở lý thuyết chương 1, đó chính là nền tảng để ta giải quyết các bài toán trên. Trong quá trình giải cũng nên nhớ các hình ảnh trực quan về Elip, Hypebol, Parabol ("hình vẽ bao giờ cũng dễ nhớ hơn chữ viết"). Tránh việc nhớ máy móc các công thức.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình chính tắc của Elip có dạng là

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0) \ (c^2 = a^2 - b^2)$$

a. (E) có độ dài trục lớn bằng 4 $\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

(E) có độ dài trục nhỏ bằng 2 $\Rightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_1): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1}$

b. (E) có độ dài trục lớn bằng 8 $\Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Ta có: $A_1B_1 = 5$ và tam giác

$\Delta OA_1B_1 \perp O \Rightarrow OA_1^2 + OB_1^2 = A_1B_1^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1}$

c. (E) có độ dài trục nhỏ bằng $2\sqrt{5} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{5} \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5$.

Mặt khác, (E) có độ dài tiêu cự bằng 4

$\Rightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 9$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_3): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$

d. (E) có độ dài chu vi tam giác MF_1F_2 bằng 18 $\Rightarrow MF_1 + MF_2 + F_1F_2 = 18$ (1)

Mà độ dài tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 8$ (2) và điểm

$M \in (E) \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\begin{cases} c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = 16 \\ a^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_4): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$

e. (E) có tiêu điểm $F_1(-2;0) \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4 = a^2 - b^2$ (1)

Mặt khác, (E) có tâm sai $e = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{10}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{100}{9}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{100}{9} - 4 = \frac{64}{9}$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_5): \frac{x^2}{\frac{100}{9}} + \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1}$

f. (E) có tâm sai

$e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow 9c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow 9(a^2 - b^2) = 5a^2 \Leftrightarrow 4a^2 - 9b^2 = 0$ (1)

Lại có, chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20

$\Leftrightarrow 2(A_1A_2 + B_1B_2) = 20 \Leftrightarrow 2(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow \boxed{a + b = 5}$ (2)

Từ $(2) \Rightarrow a = 5 - b$ thay vào (1) ta được:

$4(5-b)^2 - 9b^2 = 0 \Leftrightarrow 5b^2 + 40b - 100 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2\ (tm) \Rightarrow a = 3 \\ b = -10\,(ktm)\ (do\, b > 0) \end{array}\right.$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_6): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$

g. (E) có chu vi hình chữ nhật cơ sở là 48

$\Leftrightarrow 2(A_1A_2 + B_1B_2) = 20 \Leftrightarrow 2(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow \boxed{a + b = 12}$ (1)

Và đồng thời diện tích hình chữ nhật cơ sở là 128

$\Leftrightarrow (A_1A_2)(B_1B_2) = 2a.2b = 128 \Leftrightarrow \boxed{ab = 32}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có khi đó, a và b là 2 nghiệm của phương trình Vi-et:

$$X^2 - 12X + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 8 \\ X = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases} hay \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}}.$$

Do a > b > 0 nên ta nhận a = 8, b = 4.

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_7): \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1}$

h. (E) có tâm sai

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4c^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 4(a^2 - b^2) = 3a^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2 = 4b^2} \ (1)$$

Do (E) nhận trục hoành làm trục đối xứng nên ta có $AF_2 = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A\left(c; \dfrac{1}{2}\right)$

Mặt khác $A = (E) \cap d \Rightarrow A \in (E) \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2} = 1}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\frac{4b^2 - b^2}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_8): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1}$

i. (E) có đỉnh $B_1(0;-3) \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$ (1).

Mặt khác, (E) đi qua

$$D\left(2; \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{27}{4b^2} = 1 \xrightarrow{b^2 = 9} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 16$$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_9): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$

j. $M\left(\dfrac{-3}{2}; \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \boxed{\dfrac{9}{4a^2} + \dfrac{7}{4b^2} = 1}$ (1).

Mặt khác, (E) có $MF_1 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow MF_1^2 = 8 \Leftrightarrow \left(c + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2} - 0\right)^2 = 8$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 4 \ (tm) \\ c = -1 \ (ktm) \end{array}\right. (do\, c > 0)$$

Lại có $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + 16$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{9}{4(b^2 + 16)} + \frac{7}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow b^4 + 12b^2 - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 2 > 0 \Rightarrow a^2 = 18 \\ b^2 = -14 < 0\,(ktm) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_{10}): \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1}$

k. $P\left(2; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \boxed{\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{27}{4b^2} = 1}$ (1)

Và độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở là

$\sqrt{A_1A_2^{\ 2} + B_1B_2^{\ 2}} = \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 10 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 100$ (2)

Từ $(2) \Rightarrow 4b^2 = 100 - 4a^2$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{27}{100 - 4a^2} = 1 \Leftrightarrow 4a^4 - 89a^2 + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 9\,(tm) \\ a^2 = \dfrac{25}{4} \Rightarrow b^2 = \dfrac{75}{4}\ (ktm) \end{array}\right. (do\, a > b > 0)$$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_{11}): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$

l. $N(1; -3) \in (E) \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1}$ (1). Giả sử tiêu điểm là F_2.

Do $\Delta F_2B_1B_2$ đều

$$\Rightarrow OF_2 = \frac{B_1B_2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c = \frac{2b\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c^2 = 3b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3b^2 \Leftrightarrow a^2 = 4b^2 \ (2).$$

Thay (2) vào (1), ta được: $\dfrac{1}{4b^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{37}{4} \Rightarrow a^2 = 37$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\boxed{(E_{12}): \dfrac{x^2}{37} + \dfrac{y^2}{\frac{37}{4}} = 1}$

► ***Lời bình :*** *Qua việc giải 12 bài toán nhỏ trên ta rút ra một số nhận xét sau:*

Một là, *trong quá trình giải các phương trình liên quan đến các ẩn số a, b, c ta cần chú ý điều kiện của các ẩn số trên đó là* $\boxed{a, b, c > 0,\ a > b}$.

Hai là, *có những bài toán ta nên dùng hình vẽ trực quan để phát hiện các tính chất đặc biệt (chuyển ngôn ngữ thành kí hiệu toán học và hình học hóa chúng).*

BÀI TOÁN 3 (CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ELIP). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho* $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ *và điểm* $M(x; y)$ *tùy ý thuộc (E). Chứng minh rằng:*

a. $b \le OM \le a$

b. $MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$ (với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)).

c. $(MF_1 - MF_2)^2 - 4OM^2 = -4b^2$.

d. $\frac{MH^2}{HA_1HA_2} = \frac{b^2}{a^2}$ (với $A_1; A_2$ là hai đỉnh của trục lớn và H là hình chiếu M lên trục hoành).

e. $|x| + |y| \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

■ **Đặt vấn đề:** *cũng giống như các hệ thức lượng trong tam giác, hệ thức lượng trong elip cũng có một vẽ đẹp riêng của nó. Cùng tác giả khám phá các tính chất ẩn sau trong các hệ thức lượng trên nhé.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. Xét $OM^2 = x^2 + y^2$. Mặt khác, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và a > b nên

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < a^2$

Đặc biệt, khi $M \equiv A_1$ *hay* $M \equiv A_2 \Leftrightarrow y = 0$ thì $x^2 + y^2 = a^2$

Từ đó, $x^2 + y^2 \le a^2 \Leftrightarrow OM \le a$. Tương tự, ta chứng minh được $OM \ge b$.

Do đó $\boxed{b \le OM \le a}$ (đpcm).

b. Ta có: $\begin{cases} MF_1 = a + ex \\ MF_2 = a - ex \end{cases}$ $(e = \frac{c}{a})$. Xét

$VT = MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 - e^2x^2 + x^2 + y^2$

Suy ra

$$VT = a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2 = VP \text{ (đpcm)}$$

c. Xét $VT = (MF_1 - MF_2)^2 - 4OM^2 = (2ex)^2 - 4(x^2 + y^2)$

Suy ra $VT = -4(x^2 + y^2 - e^2x^2) = -4b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = -4b^2 = VP$ (đpcm).

d. Vì M(x; y) nên H(x; 0). Xét $VT = \dfrac{MH^2}{HA_1HA_2} = \dfrac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \dfrac{y^2}{a^2-x^2}$.

Mặt khác,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow a^2-x^2=\frac{a^2y^2}{b^2} \Rightarrow VT=\frac{MH^2}{HA_1.HA_2}=\frac{y^2b^2}{a^2y^2}=\frac{b^2}{a^2}=VP \text{ (đpcm).}$$

e. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\left(|x|+|y|\right)^2=\left(a\frac{|x|}{a}+b\frac{|y|}{b}\right)^2 \le \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)(a^2+b^2)=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{|x|+|y| \le \sqrt{a^2+b^2}} \text{ (đpcm).}$$

BÀI TOÁN 4 (ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ ĐỂ ELIP VÀ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho* $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ *và đường thẳng* $\Delta: Ax+By+C=0$. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để (E) tiếp xúc với* Δ *là* $C^2=a^2A^2+b^2B^2$.

■ **Đặt vấn đề:** *đối với chương trình trước cải cách, bài toán tiếp tuyến của elip luôn tạo nên sức hấp dẫn với những người tìm hiểu nó. Chúng ta có thể mở rộng bài toán thành sự tương giao giữa đường thẳng và elip trong đó bài toán đường thẳng cắt elip tại 2 điểm phân biệt là một dạng toán thương gặp. Trong bài toán 4 này, tác giả mong muốn chứng minh lại cho bạn đọc điều kiện cần và đủ để đường thẳng và elip tiếp xúc nhau. Phần này có thể tham khảo và dành cho các bạn yêu thích Toán học tìm hiểu.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0 \Leftrightarrow \boxed{y=\dfrac{-Ax-C}{B},\ (A^2+B^2>0)}$

Trường hợp 1: $B \ne 0$, ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa Δ và (E) là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(Ax+C)^2}{b^2B^2}=1 \Leftrightarrow \boxed{\left(b^2B^2+a^2A^2\right)x^2+\left(2a^2AC\right)x+a^2C^2-a^2b^2B^2=0}$$

Để *(E) tiếp xúc với* Δ ta có

$$\Delta'=0 \Leftrightarrow a^4A^2C^2-(b^2B^2+a^2A^2)(a^2c^2-a^2b^2B^2)=0 \Leftrightarrow \boxed{a^2A^2+b^2B^2=C^2}$$

Trường hợp 2: $B=0 \Rightarrow \Delta: Ax+C=0 \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{-C}{A}\ (A\neq 0)}$ nên phương trình tung độ giao điểm giữa Δ và (E) là: $\dfrac{c^2}{a^2A^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=b^2\left(1-\dfrac{c^2}{a^2A^2}\right)$ (1)

Do *(E) tiếp xúc với* $\Delta \Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow 1-\frac{c^2}{a^2A^2}=0 \Leftrightarrow a^2A^2=c^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2A^2+b^2B^2=C^2}\ (do\ B=0)$$

Tóm lại từ điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) là

$$\boxed{C^2=a^2A^2+b^2B^2}$$

BÀI TOÁN 5 (TÌM ĐIỂM M THUỘC (E) THỎA ĐIỀU KIỆN VỀ ĐỘ DÀI VÀ GÓC).*Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm điểm M thuộc elip* $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ *thỏa mãn:*

a. *Bán kinh qua tiêu điểm này bằng 2 lần bán kinh qua tiêu điểm kia.*

b. *M nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới một góc* 60^0 .

■ **Đặt vấn đề:***Với các bài toán tìm điểm M thỏa điều kiện độ dài và góc liên quan đến hai tiêu điểm thì ta thường thông qua các bán kính qua tiêu điểm để xử lý.*

► ***Nhận xét và phương pháp chung*** :

Bước 1: Từ phương trình (E) khai thác các thuộc tính a, b, c.

Bước 2: Gọi $\boxed{M(x_M;y_M)\in(E) \Rightarrow: \dfrac{x_M^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_M^{\ 2}}{b^2}=1}$

Bước 3:Sử dụng dữ kiện bán kinh qua tiêu điểm để liên hệ góc và độ dài.

$$\boxed{\forall M(x_M;y_M)\in(E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1=a+\dfrac{c}{a}x_M \\ MF_2=a-\dfrac{c}{a}x_M \end{cases}}$$ và đồng thời

$$\boxed{\cos(MF_1;MF_2)=\frac{MF_1^{\ 2}+MF_2^{\ 2}-F_1F_2^{\ 2}}{2MF_1MF_2}}$$

Bước 4:Sử dụng giả thiết kết hợp để giải tìm tọa độ điểm M.

Chú ý:*Nhóm các bài tập điểm M thuộc (E) liên quan đến max – min sẽ được trình bày trong chủ đề 2.5 các bài toán max – min về cực trị hình học.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Ta có:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{5}\ (do\, a, b, c > 0)\ và \\ c = 2 \end{cases}$$

$F_1F_2 = 2c = 4$

$$M(x_M; y_M) \in (E) \Rightarrow \frac{{x_M}^2}{9} + \frac{{y_M}^2}{5} = 1 \ (*) \text{ và } \begin{cases} MF_1 = 3 + \frac{2}{3}x_M \\ MF_2 = 3 - \frac{2}{3}x_M \end{cases}$$

a. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} MF_1 = 2MF_2 \\ MF_2 = 2MF_1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{3}x_M = 2\left(3 - \frac{2}{3}x_M\right) \Rightarrow x_M = \frac{3}{2}$ thay vào

(*), ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{{x_M}^2}{9} + \frac{{y_M}^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{{y_M}^2}{5} = 1 \Leftrightarrow {y_M}^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Trường hợp 2: $2MF_1 = MF_2 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{3}x_M = 2\left(3 + \frac{2}{3}x_M\right) \Rightarrow x_M = \frac{-3}{2}$ thay vào

(*), ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{{x_M}^2}{9} + \frac{{y_M}^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{{y_M}^2}{5} = 1 \Leftrightarrow {y_M}^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \vee M\left(\frac{3}{2}; \frac{-\sqrt{15}}{4}\right) \vee M\left(\frac{-3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \vee M\left(\frac{-3}{2}; \frac{-\sqrt{15}}{4}\right)}$$

b. Xét tam giác MF_1F_2 có: $\cos(MF_1; MF_2) = \dfrac{MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2}{2MF_1MF_2} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra

$MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2 = MF_1MF_2 \Leftrightarrow (MF_1 + MF_2)^2 - F_1F_2^2 = 3MF_1MF_2$

$\Leftrightarrow (2a)^2 - (2c)^2 = 3MF_1MF_2$

Suy ra $20 = 3\left(3 + \frac{2x_M}{3}\right)\left(3 - \frac{2x_M}{3}\right) = 3\left(9 - \frac{4{x_M}^2}{9}\right) \Rightarrow \boxed{{x_M}^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow {y_M}^2 = \frac{25}{12}}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$M\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)\vee M\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\frac{-5\sqrt{3}}{6}\right)\vee M\left(\frac{-\sqrt{21}}{2};\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)\vee M\left(\frac{-\sqrt{21}}{2};\frac{-5\sqrt{3}}{6}\right)$$

BÀI TOÁN 6 (QUỸ TÍCH LÀ MỘT ĐƯỜNG ELIP).*Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tọa độ điểm* $A(3\cos t;0),\ B(0;2\sin t)\ (t\in\mathbb{R})$. *Tìm tập hợp các điểm M(x; y) sao cho* $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ *khi t thay đổi.*

(Trích đề thi Đại học Ngoại Thương, năm 1993)

■ **Đặt vấn đề:***Từ lâu bài toán xác định quỹ tích của một điểm thỏa điều kiện cho trước đã không còn quá xa lạ bạn đọc. Ở đây có thể tọa độ của điểm đã được tham số hóa theo 1 tham số nào đó (hoặc chưa được tham số hóa). Việc chứng minh quỹ tích của tập hợp điểm là một đường elip đòi hỏi ta phải nắm vững một số tính chất và định nghĩa của Elip để dễ dàng đưa ra kết luận.*

► ***Nhận xét*:**

Như ta đã biết phương trình chính tắc của elip có dạng:

$$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

Nếu đặt $\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos t\\ \dfrac{y}{b}=\sin t\end{cases},t\in[0;2\pi]\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},t\in[0;2\pi]}$ Đây dạng lượng giác hóa của Elip.

Từ đây với những dạng toán cho các điểm có dạng tọa độ $M(a\cos t,b\sin t)$.

Ta tìm khử các hàm lượng giác và biểu diễn về dạng chính tắc của elip.

Chú ý:*cách lượng giác hóa trên cũng được dùng để giải một số bài toán max – min liên quan đến các đường Conic (sẽ được trình bày kỹ hơn trong chủ đề 2.5).*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Ta có $\overrightarrow{AM}=(x-3\cos t;y),\ \overrightarrow{BM}=(-x;-y+2\sin t)$.

Ta có M thỏa

$$2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-6\cos t=0\\ -3y+10\sin t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\cos t\\ y=\dfrac{10}{3}\sin t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}=\cos^2 t\\ \dfrac{y^2}{\frac{100}{9}}=\sin^2 t\end{cases}$$

Do đó: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=\sin^2 t+\cos^2 t=1,\ \forall t\in R$.

Vậy quỹ tích của tập hợp những điểm M trên chính là elip (E) có phương trình

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1}$$

BÀI TOÁN 7 (SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC ELIP). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phương trình chính tắc của hai elip*

$$(E_1):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1,\ (E_2):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ .$$

a. *Chứng minh rằng $(E_1),(E_2)$ cắt nhau tại 4 điểm.*

b. *Lập phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.*

c. *Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 elip trên.*

►***Nhận xét và phân tích*:**

Bài toán trên xét theo ý ở câu a có thể tổng quát lên thành vị trí tương đối giữa các elip cụ thể như sau:

Cho phương trình chính tắc của hai elip

$$(E_1):\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\ (E_2):\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{a_3^2}=1\,.$$

Giao điểm của *$(E_1),(E_2)$ là nghiệm của hệ* $\boxed{\begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1\\ \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{a_3^2}=1\end{cases}\quad (*)}$

Nếu hệ (*) vô nghiệm suy ra *(E_1) nằm trong (E_2) (hoặc ngược lại)*

Nếu hệ (*) có hai nghiệm suy ra *$(E_1),(E_2)$ tiếp xúc nhau tại hai đỉnh đối nhau qua gốc tọa độ.*

Nếu hệ (*) có bốn nghiệm suy ra *$(E_1),(E_2)$ cắt nhau tại 4 điểm phân biệt (Khi đó tồn tại một đường tròn đi qua 4 điểm trên và có đến 4 tiếp tuyến chung của 2 elip).*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Giao điểm của $(E_1),(E_2)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{432}{55} \\ y^2 = \dfrac{28}{55} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{55}} \\ y^2 = \pm\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{55}} \end{cases}$$

Do đó tọa độ các giao điểm là

$$\boxed{M_1\left(\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{55}};\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{55}}\right), M_2\left(\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{55}};\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{55}}\right), M_3\left(\frac{-12\sqrt{3}}{\sqrt{55}};\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{55}}\right), M_4\left(\frac{-12\sqrt{3}}{\sqrt{55}};\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{55}}\right)}$$

Dễ thấy $OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4 = \sqrt{\dfrac{92}{11}}$.

Vậy phương trình đường tròn đi qua 4 điểm trên là: $\boxed{(C): x^2 + y^2 = \dfrac{92}{11}}$

Gọi phương trình đường thẳng tiếp tuyến chung có dạng:
$\Delta: y = kx + m \Leftrightarrow kx - y + m = 0$

Do Δ tiếp xúc với $(E_1): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{16k^2 + 1 = m^2 \ (1)}$

Do Δ tiếp xúc với $(E_2): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{9k^2 + 4 = m^2 \ (2)}$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} 16k^2 + 1 = m^2 \\ 9k^2 + 4 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = \dfrac{3}{7} \\ m^2 = \dfrac{55}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \pm\dfrac{\sqrt{21}}{7} \\ m = \pm\dfrac{\sqrt{385}}{7} \end{cases}$

Vậy phương trình đường tiếp tuyến chung của 2 elip là:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \Delta_{1,2}: \sqrt{21}x - 7y \pm \sqrt{385} = 0 \\ \Delta_{3,4}: -\sqrt{21}x - 7y \pm \sqrt{385} = 0 \end{array}\right.}$$

BÀI TOÁN 8 (ĐƯỜNG THẲNG CẮT ELIP TẠI HAI ĐIỂM). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phương trình chính tắc của hai elip* $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, *lập phương trình đường thẳng d qua* $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ *và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho MA = 2MB.*

► ***Nhận xét và phân tích***: *Dạng toán đường thẳng qua điểm* $M(x_M;y_M)$ *cắt elip* $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ *tại 2 điểm A, B có thể tổng quát thành MA = kMB (k > 0) hay hình thành độ dài cung AB = m > 0 cho trước. Ta thực hiện các bước giải sau:*

Bước 1:*Xét vị trí tương đối giữa điểm M và elip (E)*

TH1.1: *Nếu điểm* $M(x_M;y_M)$ *nằm ngoài (E)*

$$\Leftrightarrow \frac{{x_M}^2}{a^2}+\frac{{y_M}^2}{b^2}>0 \text{ thì } MA=kMB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$$

TH1.2: *Nếu điểm* $M(x_M;y_M)$ *nằm trong*

$$(E) \Leftrightarrow \frac{{x_M}^2}{a^2}+\frac{{y_M}^2}{b^2}<0 \text{ thì } MA=kMB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-k\overrightarrow{MB}$$

Bước 2:*Do hai trường hợp trên tương tự ta xét trường hợp* $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$.

Cách 1: Sử dụng phương pháp gọi điểm (*tương tự như phép biến hình*).

Gọi $B(x_B;y_B)\in(E)\Rightarrow \boxed{\frac{{x_B}^2}{a^2}+\frac{{y_B}^2}{b^2}=1\ (1)}$

Do

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A-x_M=k(x_B-x_M)\\ y_A-y_M=k(y_B-y_M)\end{cases}\Rightarrow\boxed{A\left(kx_B+(1-k)x_M;ky_B+(1-k)y_M\right)}$$

Thay tọa độ A vào phương trình (E):

$$\boxed{\frac{\left(kx_B+(1-k)x_M\right)^2}{a^2}+\frac{\left(ky_B+(1-k)y_M\right)^2}{b^2}=1\ (2)}\ .$$

Từ (1) và (2) phương trình đã thiết lập xong ta tìm tọa độ điểm B. Khi đó đường thẳng cần đi qua tọa độ điểm M và B (xem lại phần viết phương trình đường thẳng chủ đề 2.2)

Cách 2: Sử dụng đường thẳng có hệ số góc k. Ta xét 2 trường hợp:

TH 2.1: Đường thẳng d đi qua M và song song trục tung Oy nên có dạng $\boxed{d:x=x_M}$

Đến đây ta xét hệ phương trình gồm $\begin{cases}x=x_M\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow A,B$ và kiểm tra điều kiện MA = kMB.

TH 2.2: Đường thẳng d đi qua M không song song trục tung Oy nên có dạng $\boxed{d: \mathrm{y} = \mathrm{k}(x - x_M) + y_M}$

Xét hệ phương trình gồm $\begin{cases} y = k(x - x_M) + y_M \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ kết hợp với $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases}$$

(giải hệ trên rất khó khăn do độ dài của bài toán và cần nhiều kỹ năng biến đổi đại số cũng như vận dụng các hệ thức Vi-et).

☺ **Hướng dẫn giải.**

Nhận xét: $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}{4} + \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}{1} = \dfrac{5}{9} < 1 \Rightarrow$ M nằm trong (E) và Gọi d là phương trình đường thẳng cần tìm.

Gọi $B(x_B; y_B) \in (E) \Rightarrow \boxed{\dfrac{{x_B}^2}{25} + \dfrac{{y_B}^2}{9} = 1 \ (1)}$

Do M nằm trong Elip nên

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = -2(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = -2(y_B - y_M) \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2x_B + 2; -2y_B + 2)}$$

Thay tọa độ A vào phương trình (E): $\boxed{\dfrac{(2 - 2x_B)^2}{4} + \dfrac{(2 - 2y_B)^2}{1} = 1 \ (2)}$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{{x_B}^2}{25} + \dfrac{{y_B}^2}{9} = 1 \ (1) \\ \dfrac{(2 - 2x_B)^2}{4} + \dfrac{(2 - 2y_B)^2}{1} = 1 \ (2) \end{cases}$ (I)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{{x_B}^2}{4} + \dfrac{{y_B}^2}{1} = 1 \\ 5{y_B}^2 - 8y_o + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = 1 \end{cases} hay \begin{cases} x_B = \dfrac{8}{5} \\ y_B = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(0;1) \\ B\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{8}{5}\right) \end{array} \right.$$

Với B(0; 1) ta có đường thẳng cần tìm qua B(0; 1) nhận

$\overrightarrow{MB}=\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{3}(2;-1)$ làm vecto chỉ phương nên có dạng là:

$\Delta:\frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{-1}\Leftrightarrow \boxed{\Delta: x+2y-2=0}$.

Với $B\left(\frac{8}{5};\frac{3}{5}\right)$ ta có đường thẳng cần tìm qua $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ nhận

$\overrightarrow{MB}=\left(\frac{14}{15};\frac{-1}{15}\right)=\frac{1}{15}(14;-1)$ làm vecto chỉ phương nên có dạng là:

$\Delta:\frac{x-\frac{2}{3}}{14}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-1}\Leftrightarrow \boxed{\Delta: 5x+70y-50=0}$

Vậy có hai phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} x+2y-2=0 \\ 5x+70y-50=0 \end{array}\right.}$$

BÀI TOÁN 9 (HÌNH VUÔNG NGOẠI TIẾP ELIP).*Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phương trình* $(E):\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1$. *Xét hình vuông ngoại tiếp elip (các cạnh hình vuông tiếp xúc với elip). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Dễ thấy các cạnh của hình vuông ngoại tiếp elip không song song với các trục tọa độ (tứ giác có các cạnh song song với các trục tọa độ, ngoại tiếp elip là hình chữ nhật cơ sở của elip).

Giả sử một cạnh của hình vuông có phương trình $d: mx+y+n=0$, khi đó cạnh kế bên của d có phương trình: $d': x-my+p=0\ \ (do\, d'\perp d)$.

Do d' và d' tiếp xúc (E) nên ta có: $\begin{cases} 24m^2+12=n^2 \ \ (1) \\ 24+12m^2=p^2 \ \ (2) \end{cases}$.

Ta lại có khoảng cách từ O(0; 0) đến d và d' bằng nhau nên:

$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|p|}{\sqrt{m^2+1}}$ (3) .

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $|n|=|\mathrm{p}|=6, |\mathrm{m}|=1$.

Vậy phương trình các đường thẳng chứa 4 cạnh của hình vuông là:

$$\boxed{x+y+6=0,\ x+y-6=0,\ x-y+6=0,\ x-y-6=0}$$

BÀI TOÁN 10 (TIẾP TUYẾN CỦA HYPEBOL). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phương trình* $(\text{H}): \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A(1; 4) tiếp xúc với hypebol (H) và tìm tọa độ các tiếp điểm.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi M(a; b) là tiếp điểm Δ và (H).

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $ax-\frac{by}{4}=1$

Vì Δ qua A(1; 4) nên $a-b=1$ (1)

Mặt khác M(a; b) thuộc (H) nên $\frac{a^2}{1}-\frac{b^2}{4}=1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ \frac{a^2}{1}-\frac{b^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 4(b+1)^2-b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 3b^2+8b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, a=1 \\ b=\frac{-8}{3}, a=\frac{-5}{3} \end{array}\right.$$

Vậy 2 tiếp điểm cần tìm là $\boxed{M_1(1;0),\ M_2\left(\frac{-5}{3};\frac{-8}{3}\right)}$

Và ***phương trình đường thẳng*** Δ ***thỏa yêu cầu bài toán*** là

$$\boxed{x-1=0 \text{ hay } 5x-2y+3=0}$$

BÀI TOÁN 11 (TIẾP TUYẾN CỦA PARABOL). *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phương trình* $(\text{P}): \text{y}^2=2x$ và điểm A(0; 6). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho độ dài AM là nhỏ nhất. Chứng minh rằng với vị trí đó của M, AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Ta có: $AM^2=(x_M)^2+\left(y_M-6\right)^2=x_M^2+y_M^2-12y_M+36$.

Lại có M thuộc (P) nên $y_M{}^2=2x_M \Rightarrow x_M^2=\frac{y_M^4}{4}$.

Do đó

$$AM^2=\frac{y_M^4}{4}+y_M^2-12y_M+36=\frac{1}{4}(y_M^4-8y_M^2+16)+3(y_M^2-4y_M+4)+20\geq 20.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y_M^2 = 4 \\ y_M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y_M = 2 \Rightarrow x_M = 2$

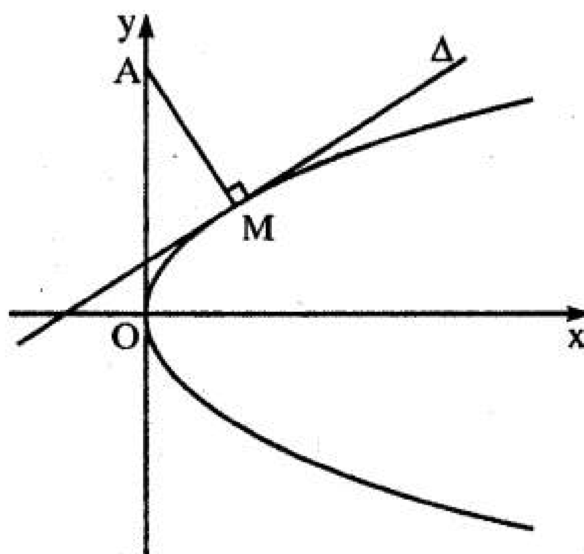
$\Rightarrow M(2;2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = (2;-4) = 2(1;-2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M(2; 2) là:

$\Delta: 2y = 2 + x \ hay\ x - 2y + 2 = 0$

có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-2)$



Ta có: $\overrightarrow{AM} = 2\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AM} // \vec{n}$ do đó AM vuông góc d.

Để xác định AM ngắn nhất ta có thể dùng hàm số:

Xét hàm số $f(t = y_M) = AM^2 = \dfrac{t^4}{4} + t^2 - 12t + 36\ (t \in R)$.

Khi đó $f'(t) = AM^2 = t^3 + 2t - 12,\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$$\min_{t \in R} f(t) = 20 \Leftrightarrow t = 2 = y_M \Rightarrow x_M = 2 \Rightarrow M(2;2)$$

BÀI TẬP CHỌN LỌC - TỰ LUYỆN CHỦ ĐỀ 4

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm M thuộc $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ sao cho thỏa mãn:

a. $MF_1 = 2MF_2$.

b. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

c. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Ta có: $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3\ (do\ a,b,c > 0) \\ c = 4 \end{cases}$ và

$$\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a = 10 \\ F_1F_2 = 2c = 8 \end{cases}$$

Giả sử $M(x_o; y_o)$ là tọa độ điểm cần tìm thuộc elip $\Rightarrow \dfrac{x_o^2}{25} + \dfrac{y_o^2}{9} = 1$ (1)

a. Ta có: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex_o = 2(a - ex_o) \Leftrightarrow 3ex_o = a \Rightarrow x_o = \frac{a}{3e} = \frac{25}{12}$

Thay vào (1) ta được: $y_o{}^2 = 9\left(1 - \frac{25^2}{12^2.25}\right) = \frac{9.119}{12^2} \Leftrightarrow y_o = \pm\frac{\sqrt{119}}{4}$

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{M\left(\frac{25}{12};\frac{\sqrt{119}}{4}\right) \; hay \; M\left(\frac{25}{12};\frac{-\sqrt{119}}{4}\right)}$$

b. M nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc vuông nên M ở trên đường kinh F_1F_2 , đó là đường tròn tâm O có bán kinh bằng 4. Phương trình đường tròn này là $(C): x^2 + y^2 = 16$.

Ta có $M \in (C) \Rightarrow x_o{}^2 + y_o{}^2 = 16 \Rightarrow y_o{}^2 = 16 - x_o{}^2$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{x_o^2}{25} + \frac{16 - x_o^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x_o^2 = \frac{7.25}{16} \Leftrightarrow \boxed{x_o = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4}}$$

$$\Rightarrow y_o^2 = 16 - x_o^2 = \frac{81}{16} \Rightarrow \boxed{y_o = \pm\frac{9}{4}}$$

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{\pm 9}{4}\right) \; hay \; M\left(\frac{-5\sqrt{7}}{4};\frac{\pm 9}{4}\right)}$$

c. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0 nên

$$\cos 60^0 = \frac{MF_1^2 + MF_2{}^2 - F_1F_2{}^2}{2MF_1MF_2} \Leftrightarrow (MF_1 + MF_2)^2 - F_1F_2{}^2 = 3MF_1MF_2$$

Suy ra

$$4a^2 - 4c^2 = 3(a - ex_o)(a + ex_o) \Leftrightarrow a^2 - e^2x_0^2 = 12 \Rightarrow x_0^2 = \frac{25.13}{16} \Rightarrow \boxed{x_o = \pm\frac{5\sqrt{13}}{4}}$$

Thay vào (1) ta được: $y_o = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4};\frac{\pm 3\sqrt{3}}{4}\right) \; hay \; M\left(\frac{-5\sqrt{14}}{4};\frac{\pm 3\sqrt{3}}{4}\right)}$$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của Hypebol (H) có hai đường tiệm cận là $4x \pm 3y = 0$ và hai đường chuẩn $5x \pm 9 = 0$.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (b^2 = c^2 + a^2)$

Hai đường tiệm cận $4x \pm 3y = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{4x}{3} = \pm\frac{bx}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ (1)

Hai đường chuẩn $5x \pm 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{9}{5} = \pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{a^2}{c}$ (2)

Từ (1) ta có

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3b = 4a \Leftrightarrow 9b^2 = 16a^2 \Leftrightarrow 9(c^2 - a^2) = 16a^2 \Leftrightarrow \boxed{9c^2 = 25a^2}$$

Thay $c = \frac{5a^2}{9} \Rightarrow \frac{25a^4}{81} = \frac{25a^2}{9} \Rightarrow a^2 = 9\ (do\, a > 0) \Rightarrow b^2 = 16$

Vậy phương trình chính tắc của Hypebol cần tìm là: $\boxed{(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi có cạnh bằng 5, chiều cao bằng $\frac{24}{5}$. Hai đường chéo nằm trên hai trục Ox và Oy. Viết phương trình chính tắc của (E) đi qua hai đỉnh đối diện của hình thoi và nhận hai đỉnh đối diện còn lại làm hai tiêu điểm.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (c^2 = a^2 - b^2)$

Gọi b là nửa trục nhỏ của (E), c là khoảng cách từ tâm đến tiêu điểm.

Ta có: $b^2 + c^2 = 25$ (1)

Mặt khác diện tích hình thoi là $S_{thoi} = 2bc = 5.\frac{24}{5} = 24 \Rightarrow bc = 12$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b^2 + c^2 = 25 \\ bc = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3, c = 4 \\ b = 4, c = 3 \end{array}\right.$

Với b = 3, c = 4 suy ra $a^2 = 25 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Với b = 4, c = 3 suy ra $a^2 = 25 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Vậy phương trình chính tắc của Elip cần tìm là:

$$\boxed{(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \; hay\, (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Viết phương trình chính tắc Hypebol (H), biết

a. (H) có 2 tieu điểm $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$ và điểm M thuộc (H) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0 thì diện tích tam giác MF_1F_2 bằng $9\sqrt{3}$.

b. (H) tiếp xúc với đường thẳng d: x – y – 2 = 0 tại điểm A có hoành độ bằng 4.

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (b^2 = c^2 + a^2)$

Áp dụng định lý hàm cosin trong tam giác MF_1F_2 ta có:

$F_1F_2^{\;2} = MF_1^2 + MF_2^{\;2} - 2MF_1MF_2\cos 60^0 \Rightarrow MF_1MF_2 = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$

Mặt khác

$S_{MF_1F_2} = \frac{1}{2}MF_1MF_2 \sin 60^0 = 9\sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

Vậy phương trình chính tắc của Hypebol cần tìm là: $\boxed{(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1}$

b. Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (b^2 = c^2 + a^2)$

(H) tiếp xúc với đường thẳng d: x – y – 2 = 0 $\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4$ (1)

Mặt khác, với x = 4 suy ra y = 2 suy ra A(4; 2) thuộc (H) $\Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 4 \end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của Hypebol cần tìm là: $\boxed{(H): \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1}$

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$.

Giả sử A, B là hai điểm thay đổi trên (E) sao cho OA vuông góc OB.

a. Tính $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ theo a và b.

b. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB. Tìm tập hợp các điểm H khi A, B thay đổi trên (E).

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. Giả sử đường thẳng đi qua OA có phương trình y = kx.

Nếu k = 0, hiển nhiên $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$

Nếu $k \neq 0$, khi đó gọi tọa độ của A và B tương ứng là: $A(x_A; y_A),\ B(x_B; y_B)$.

Ta có:

$$1 = \frac{{x_A}^2}{a^2} + \frac{k^2 {x_A}^2}{b^2} \Rightarrow {x_A}^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + k^2 a^2}$$

$$\Rightarrow OA^2 = {x_A}^2 + k^2 {x_A}^2 = (1 + k^2)\frac{a^2 b^2}{b^2 + k^2 a^2}\ (1)$$

Do OA vuông góc OB nên đường thẳng OB có dạng: $y = \frac{-1}{k} x$

Từ đó ta có:

$$1 = \frac{{x_B}^2}{a^2} + \frac{{x_B}^2}{k^2 b^2} \Rightarrow {x_B}^2 = \frac{k^2 a^2 b^2}{b^2 + k^2 a^2} \Rightarrow OB^2 = {x_B}^2 + \frac{1}{k^2}{x_B}^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + k^2)}{b^2 + k^2 a^2}\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$

b. Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$ không đổi suy ra OH không đổi, Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn tâm O bán kinh $R = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}}$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phương trình chính tắc của elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình đường thẳng song song Oy và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho AB = 4.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình đường thẳng song song Oy là d: x = a $(a \neq 0)$.

Tung độ giao điểm giữa d và elip là:

$$\frac{a^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow\frac{y^2}{9}=1-\frac{a^2}{25}=\frac{25-a^2}{25}\Rightarrow\boxed{y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\ (|a|\le 5)}$$

Do đó tọa độ điểm

$$A\left(a;\frac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\right),\ B\left(a;\frac{-3}{5}\sqrt{25-a^2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(0;\frac{6}{5}\sqrt{25-a^2}\right)$$

Theo đề bài ta có AB = 4 $\Leftrightarrow 16=\frac{36}{25}(25-a^2)\Leftrightarrow a^2=\frac{125}{9}\Rightarrow\boxed{a=\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{x=\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}}$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol $y^2=2x$ và điểm K(2; 0). Đường thẳng d đi qua K cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN nằm trên d.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Trường hợp 1: d vuông góc Ox suy ra d: x = 2.

Xét phương trình tung độ giao điểm giữa d và (P) là:

$$\begin{cases}x=2\\y^2=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=\pm2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M(2;2)\\N(2;-2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0$$

Trường hợp 2: d không vuông góc Ox suy ra d: y = kx – 2k. Khi đó tọa độ M, N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y=kx-2k\\y^2=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2}{2}\\y=k\dfrac{y^2}{2}-2k\end{cases}\Rightarrow ky^2-2y-4k=0\ (2)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm pân biệt (2) phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases}k\neq0\\4+4k^2>0\end{cases}\Rightarrow\boxed{k\neq0}$$

Gọi $M\left(\frac{{y_1}^2}{2};y_1\right),N\left(\frac{{y_2}^2}{2};y_2\right)$

Ta có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left(\frac{y_1y_2}{2}\right)^2+y_1y_2=(-2)^2+(-4)=0\ (3)$

Từ (1) và (3) suy ra OM vuông góc ON suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN là trung điểm MN suy ra I thuộc d.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2 - 2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Chứng minh rằng (P) và (E) có 4 giao điểm chung phân biệt nằm trên 1 đường tròn. Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (E) và (P) là :

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0 \ (*)$$

Xét $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$, *f(x)* liên tục trên R có :

$$\begin{cases} f(-1) = 73 \\ f(0) = -9 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = -5 \\ f(3) = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1).f(0) = -657 < 0 \\ f(0).f(1) = -9 < 0 \\ f(1).f(2) = -5 < 0 \\ f(2).f(3) = -405 < 0 \end{cases}$$

Suy ra (*) có 4 nghiệm phân biệt do đó (E) và (P) cắt nhau tại 4 điểm.

Tọa độ (P) và (E) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y - 1 = 0 \ (*)}$$

(*) là phương trinh đường tròn tâm $I\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right), R = \frac{\sqrt{161}}{9}$. Do đó 4 giao điểm cũng nằm trên đường tròn (*)

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}}$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho A(2; 0) và đường tròn $(C): (x+2)^2 + y^2 = 36$. Viết phương trình quĩ tích tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc (C).

☺ **Hướng dẫn giải.**

Xét $(C): (x+2)^2 + y^2 = 36$ là đường tròn tâm B(-2; 0), bán kinh R = 6.

Gọi M là tâm đường tròn đi qua A và tiếp xúc (C) tại N. Ta có:

MA + MB = MN + MB = BN = 6.

Vậy quĩ tích M là elip (E) nhận A, B làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng 6.

$A, B \in Ox$ và đối xứng nhau qua O nên (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

Với 2a = 6 và $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - \frac{AB^2}{4} = 5 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

Vậy quỹ tích cần tìm là: $\boxed{(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(C_1): (x+5)^2 + y^2 = 441$, $(C_2): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Gọi M là tâm đường tròn (C) di động tiếp xúc với $(C_1), (C_2)$. Tìm quỹ tích M biết:

a. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2).

b. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và (C_2).

☺ **Hướng dẫn giải.**

Đường tròn (C_1) có tâm $\begin{cases} O_1(-5;0) \\ R_1 = 21 \end{cases}$ và (C_2) có tâm $\begin{cases} O_1(5;0) \\ R_1 = 5 \end{cases}$

M(x; y) là tâm: $\begin{cases} R_1 - R = MO_1 \\ R_2 + R = MO_2 \end{cases} \Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 + R_2 = 26$

Từ đó suy ra tập hợp các điểm M thuộc elip $\boxed{(E): \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1}$ nhận O_1, O_2 làm hai tiêu điểm.

M(x; y) là tâm: $\begin{cases} R_1 - R = MO_1 \\ R - R_2 = MO_2 \end{cases} \Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 - R_2 = 16$

Từ đó suy ra tập hợp các điểm M thuộc elip $\boxed{(E): \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1}$ nhận O_1, O_2 làm hai tiêu điểm.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$, với các tiểu điểm là F_1, F_2. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ trên (E) là phân giác của góc $\widehat{F_1MF_2}$

☺ **Hướng dẫn giải.**

Lấy bất kỳ điểm $M(x_o;y_o)\in(E)$

Suy ra phương trình tiếp tuyến d của (E) tại M có dạng: $\boxed{d:\frac{x_o}{a^2}x+\frac{y_o}{b^2}y=1}$

Gọi I là giao điểm giữa d và trục hoành Ox suy ra $I\left(\frac{a^2}{x_0};0\right)\ (x_o\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases}MF_1=a+ex_o\\MF_2=a-ex_o\end{cases}$ và $\boxed{\frac{IF_1}{IF_2}=\frac{\overrightarrow{IF_1}}{\overrightarrow{IF_2}}=\frac{a^2+cx_o}{a^2-cx_o}=\frac{a+ex_o}{a-ex_o}=\frac{MF_1}{MF_2}}$

Từ đó suy ra tập d là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ (đpcm)

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip có phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

Tìm điểm M trên (E) thỏa

a. Có bán kinh qua tiêu điểm này bằng 3 lần bán kinh qua tiêu điểm kia.

b. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

☺ **Hướng dẫn giải.**

$$(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=9\\b^2=1\\c^2=9-1=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\quad(do\,a,b,c>0)\\c=2\sqrt{2}\end{cases}$$

a. Gọi M(x; y) là điểm cần tìm. Khi đó từ giả thiết ta suy ra:

$$\left[\begin{array}{l}MF_1=3MF_2\\MF_2=3MF_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}MF_1-3MF_2=0\\MF_2-3MF_1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow(MF_1-3MF_2)(MF_2-3MF_1)=0$$

Khai triển rút gọn ta được:

$$16MF_1.MF_2-3(MF_1+MF_2)^2=0\Rightarrow 16(a+ex_o)(a-ex_o)-3(4a^2)=0$$

Suy ra $x_o{}^2=\frac{a^2}{4e^2}=\frac{a^4}{4c^2}=\frac{81}{32}\Leftrightarrow\boxed{x_o=\pm\frac{9\sqrt{2}}{8}}$

Lại có $M \in (E) \Rightarrow {y_o}^2 = 1 - \frac{{x_o}^2}{9} = \frac{23}{32} \Leftrightarrow \boxed{y_o = \pm\frac{\sqrt{46}}{8}}$

Vậy tọa độ các điểm M thỏa yêu cầu bài toán *là:*

$$\boxed{M\left(\frac{9\sqrt{2}}{8};\frac{\sqrt{46}}{8}\right) \vee M\left(\frac{9\sqrt{2}}{8};\frac{-\sqrt{46}}{8}\right) \vee M\left(\frac{-9\sqrt{2}}{8};\frac{\sqrt{46}}{8}\right) \vee M\left(\frac{-9\sqrt{2}}{8};\frac{-\sqrt{46}}{8}\right)}$$

b. Ta có $M \in (E) \Rightarrow \boxed{\frac{{x_o}^2}{9} + {y_o}^2 = 1 \ (1)}$

Cách 1: do

□ $F_1MF_2 = 90^0 \Rightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 = 32 \Leftrightarrow (a + ex_o)^2 + (a - ex_o)^2 = 32$

Suy ra ${x_o}^2 = \frac{(16 - a^2)a^2}{c^2} = \frac{63}{8} \xrightarrow{(1)} {y_o}^2 = \frac{1}{8}$.

Vậy tọa độ các điểm M thỏa yêu cầu bài toán *là:*

$$\boxed{M\left(\frac{3\sqrt{14}}{8};\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \vee M\left(\frac{-3\sqrt{14}}{8};\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \vee M\left(\frac{3\sqrt{14}}{8};\frac{-\sqrt{2}}{4}\right) \vee M\left(\frac{-3\sqrt{14}}{8};\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Cách 2: □ $F_1MF_2 = 90^0 \Rightarrow \Delta F_1MF \perp M$ suy ra M thuộc đường tròn đường kinh F_1F_2 có phương trình là $(C): x^2 + y^2 = 8$. Nên

$M \in (C) \Rightarrow \boxed{{x_o}^2 + {y_o}^2 = 8 \ (2)}$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{{x_o}^2}{9} + {y_o}^2 = 1 \\ {x_o}^2 + {y_o}^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_o}^2 = \frac{63}{8} \\ {y_o}^2 = \frac{1}{8} \end{cases}$

Vậy tọa độ các điểm M thỏa yêu cầu bài toán *là:*

$$\boxed{M\left(\frac{3\sqrt{14}}{8};\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \vee M\left(\frac{-3\sqrt{14}}{8};\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \vee M\left(\frac{3\sqrt{14}}{8};\frac{-\sqrt{2}}{4}\right) \vee M\left(\frac{-3\sqrt{14}}{8};\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(0; 2) và trục đối xứng Oy. Biết rằng diện tích tam giác ABC bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$. Viết phương trình chính tắc của (E) qua 3 điểm trên.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình elip cần tìm có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a > 0, \, b > 0)$

Ta có A(0; 2) là giao điểm (E) và Oy nên A là một đỉnh của (E) suy ra **b = 2**.

Lại có diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A; BC).BC = \frac{49\sqrt{3}}{12}$ mà tam giác ABC đều nên ta có:

$$d(A;\text{BC}) = \text{AB}.\sin \widehat{ABC} = BC.\sin 60^0 \Rightarrow \boxed{BC = \frac{2}{\sqrt{3}} d(A;BC)}$$

Do đó $S_{ABC} = \frac{49\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[d(A;BC)\right]^2.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{49\sqrt{3}}{12} \Rightarrow \boxed{\left[d(A;BC)\right] = \frac{7}{2} (1)}$

Mặt khác Oy là trục đối xứng của tam giác ABC nên BC vuông góc Oy

Suy ra phương trình BC có dạng: y = m với $m \in (-2; 2)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow |m - 2| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{-3}{2} (tm) \\ m = \frac{11}{2} (\text{ktm}) \end{array}\right. \Rightarrow m = \frac{-3}{2}$

Elip không thay đổi khi ta hoán đổi vị trí B và C nên ta có thể giả sử hoành độ B âm.

Suy ra $B\left(\frac{-7\sqrt{3}}{6}; \frac{-3}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{49}{12a^2} + \frac{9}{16} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{28}{3}$

Vậy phương trình elip cần tìm là $\boxed{(E): \frac{x^2}{\frac{28}{3}} + \frac{y^2}{4} = 1}$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 16$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tâm sai e = $\frac{1}{2}$. (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB song song với trục hoành và AB = 2BC.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình elip cần tìm có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a > 0, \, b > 0)$

Ta có e = $\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = 4c^2 \Leftrightarrow a^2 = 4(\text{a}^2 - b^2) \Leftrightarrow \boxed{b^2 = \frac{3a^2}{4}}$ (1)

Vì (E) và (C) đều nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng và AB = 2BC nên giả sử B(2t; t) (t > 0)

Thay tọa độ B vào phương trình (C) ta được: $t^2 = \dfrac{1}{5}$

Thay vào phương trình (E) ta được: $\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 5 \\ b^2 = \dfrac{3a^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{256}{15} \\ b^2 = \dfrac{64}{5} \end{cases}$

Vậy phương trình elip cần tìm là $\boxed{(E): \dfrac{x^2}{\frac{256}{15}} + \dfrac{y^2}{\frac{64}{5}} = 1}$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng d: 3x + 4y – 12 = 0. Gọi các giao điểm của đường thẳng d và elip (E) là A, B. Tìm trên (E) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Ta có A, B là giao điểm giữa d và (E) nên thỏa hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, y = 0 \\ x = 0, y = 3 \end{array}\right.$$

Do đó A(4; 0), B(0; 3) hay A(0; 3), B(4; 0). Suy ra AB = 5.

Gọi $C(a;b) \in (E) \Rightarrow \dfrac{a^2}{16} + \dfrac{b^2}{9} = 1$ (1) .

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.d(C;AB) = \dfrac{1}{2} AB.d(C;d) = \dfrac{|3a + 4b - 12|}{2} = 6$

Suy ra $|4a + 3b - 12| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a + 3b = 24 \\ 4a + 3b = 0 \end{array}\right.$ (I)

Từ (1) và (2) ta tìm được: $\boxed{C\left(2\sqrt{2}; \dfrac{-3}{\sqrt{2}}\right) \; hay \; C\left(-2\sqrt{2}; \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)}$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) thỏa mãn khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) bằng $\frac{8}{\sqrt{3}}$, điểm M có hoành độ dương thuộc (E) sao cho độ lớn 2 bán kinh qua tiêu là $\frac{5}{2}$ và $\frac{3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M và viết phương trình chính tắc của (E).

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình elip cần tìm có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0,\ b > 0)$

Khi đó phương trình của hai đường chuẩn là $\Delta_1 : x = \frac{-a}{e}; \Delta_2 : x = \frac{a}{e}$

Suy ra $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\frac{a}{e} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a^2}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}} \ (1)}$

Bán kinh qua tiêu của M thuộc (E) là: $\begin{cases} a + \frac{c}{a}x_M = \frac{5}{2} \\ a - \frac{c}{a}x_M = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ cx_M = 1 \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $a = 2, c = \sqrt{3} \Rightarrow b = 1, x_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_M = \frac{\pm\sqrt{33}}{6}$

Vậy phương trình elip cần tìm là $\boxed{(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1}$ và $\boxed{M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\pm\sqrt{33}}{6}\right)}$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: 2x + y + 3 = 0 và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình đường thẳng d’ vuông góc d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Vì d’ vuông góc nên d’ có dạng: d’: x + 2y – m = 0. Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - m = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2y \\ 8y^2 - 4my + m^2 - 4 = 0 \ (1) \end{cases}$$

d’ cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

Suy ra $\Delta = 32 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}}$

Khi đó gọi a, b lần lượt 2 nghiệm của phương trình (1).

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} a + b = \dfrac{m}{2} \\ ab = \dfrac{m^2 - 4}{8} \end{cases}$

Ta đươc tọa độ $A(2a - m; a),\ B(2b - m; b)$ và

$$AB^2 = 5(b-a)^2 = 5\left[(a+b)^2 - 4ab\right] = \frac{5(8 - m^2)}{4}$$

Mặt khác,

$$d(O; AB) = d(O; d') = \frac{|m|}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} d(O; AB).AB = 1 \Rightarrow m = \pm 2\ (tm)$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right.}$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 9$. Lập phương trình chính tắc của elip có tam sai $e = \dfrac{1}{3}$. Biết (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB song song trục hoành và AB = 3BC.

☺ **Hướng dẫn giải.**

Gọi phương trình elip cần tìm có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$

Ta có e = $\dfrac{1}{3} = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = 9c^2 \Leftrightarrow a^2 = 9(a^2 - b^2) \Leftrightarrow \boxed{b^2 = \dfrac{8a^2}{9}}$ (1)

Vì (E) và (C) đều nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên ABCD là hình chữ nhật.

Giả sử A(x; y(vì AB song song với Ox nên B(-x; y), C(-x;-y), D(x; -y).

Ta có AB = 3BC $\Leftrightarrow |x| = 3|y| \Leftrightarrow x^2 = 9y^2 \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 = 0$ (2) .

Lại có A, B, C, D thuộc đường tròn (C) nên ta có $x^2 + y^2 = 9$ (3) .

Từ (2) và (3) suy ra $x^2 = \dfrac{81}{10}; y^2 = \dfrac{9}{10}$

Và tọa độ các điểm này thuộc (E) nên ta lại có: $\boxed{\dfrac{81}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 10\ \ (4)}$

Từ (1) và (4) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{81}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 10 \\ b^2 = \dfrac{8a^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{729}{80} \\ b^2 = \dfrac{81}{10} \end{cases}$

Vậy phương trình elip cần tìm là $\boxed{(E): \dfrac{x^2}{\frac{729}{80}} + \dfrac{y^2}{\frac{81}{10}} = 1}$

CHỦ ĐỀ 2.5:

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG OXY

Không chỉ riêng các bài toán bất đẳng thức hóc búa bên đại số, các bài toán tìm cực trị bên giải tích mà ở hình học cũng bắt gặp vô số các bài toán max – min cực trị liên quan giữa các đối tượng như điểm, đường thẳng, đường tròn và các đường conic trong quá trình xét vị trí tương đối giữa chúng.

Trong quá trình tìm hiểu, tiếp cận và giải các bài toán liên quan đến max – min cực trị hình học trong mặt phẳng Oxy, ta bắt gặp một số câu hỏi sau :

Các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất có tồn tại không ? Vì sao ?

Ta có thể tiếp cận bài toán trên dựa trên các hướng nào ?

Liệu rằng có một nguyên tắc chung, một thuật toán chung nào đó cho việc giải các bài toán trên không ?

Giả sử các bài toán hình học được giải dựa trên hai con đường chính là sử dụng công cụ của Đại Số và Giải Tích thì ngược lại ta có thể ứng dụng các tính chất cực trị trong hình học để giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất không ? Và làm như thế nào ?

Trong chủ đề cuối của chương 2 này, chúng ta sẽ tìm ra các câu trả lời cho những câu hỏi trên và cũng là để giải quyết một phần nào đó những khó khăn trong việc giải các bài toán trên của bạn đọc.

PHẦN 2.5.1:

CỞ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN VÀ CÁC KIẾN THỨC CẦN ÁP DỤNG.

Trong phần này, tác giả tập trung trình bày và giới thiệu một số kiến thức và tính chất đặc biệt quan trọng làm cơ sở cho phương pháp để giới thiệu ở các phần sau. Mời bạn đọc cùng theo dõi.

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên tập *D*

►Giá trị *M* được gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $f\left(x\right)$ trên *D* nếu

$$\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f(x_o) = M \end{cases} \Leftrightarrow M = \max_{x \in D} f(x)$$

►Giá trị *m* được gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $f\left(x\right)$ trên *D* nếu

$$\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f(x_o) = m \end{cases} \Leftrightarrow m = \min_{x \in D} f(x)$$

Lưu ý: Đối với hàm hai biến, ba biến…ta cũng có định nghĩa tương tự.

►Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

2. Các bất đẳng thức cơ bản thường dùng.

►Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM–GM).

- Cho *n* số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$. Khi đó ta có:

$$\boxed{\frac{a_1, + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$$

- Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

►Bất đẳng thức Bunyakovsky.

- Cho hai bộ *n* số: $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\boxed{\left(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)}$$

- Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số $b_i\,(i = \overline{1,n})$ nào đó bằng 0 thì tương ứng a_i bằng 0.
- Hệ quả của bất đẳng trên, ta có: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge (4abcd)$.

►Bất đẳng thức Véctơ.

- Cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ nằm trong mặt phẳng Oxy.

  Khi đó ta có: $\boxed{\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \le |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

  Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in R^* : \vec{a} = k\vec{b}$ *hay* một trong hai vecto bằng $\vec{0}$

  Tổng quát $\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\overrightarrow{a_i}\right| \; (n = \overline{1,n})}$

- Cho hai vecto $\vec{u}, \vec{v}$ nằm trong mặt phẳng Oxy.

  Khi đó ta có: $\boxed{-|\vec{u}|.|\vec{v}| \le \vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

  Dấu bằng bên trái xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng hoặc $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$.

  Dấu bằng bên phải xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng hoặc $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$.

►Bất đẳng thức tam giác.

- Với ba điểm bất kì A, B, C ta luôn có:

  $\boxed{AB + AC \geq BC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A nằm trong đoạn BC.(*Tổng độ dài hai cạnh bất kì trong một tam giác luôn lớn hơn hoặc bằng cạnh thứ ba*).

  $\boxed{|AB - AC| \leq BC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A nằm trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC. (*Hiệu độ dài hai cạnh bất kì trong một tam giác luôn nhỏ hơn hoặc bằng cạnh thứ ba).*
- **Tổng quát**: trong tất cả các đường gấp khúc nối 2 điểm A, B cho trước thì đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất.

►Bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.

- Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng :

  $$\boxed{A^2 \geq 0 \text{ hay } -A^2 \leq 0}$$

- Do đó với m là hằng số, ta có: $\boxed{\begin{cases} f = A^2 + m \geq m \Rightarrow \min f = m \Leftrightarrow A = 0 \\ f = -A^2 + M \leq M \Rightarrow \max f = M \Leftrightarrow A = 0 \end{cases}}$

►Bất đẳng thức về lượng giác.

- Các bất đẳng thức quen thuộc trong lượng giác thường sử dụng là:

  $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$

- Cho trước n góc $0 \leq \alpha; 0 \leq a_1, a_2, ..., a_n \leq \pi$ ta có các bất đẳng thức sau:

$\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$	$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \leq n \sin\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}$	$\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \leq \left(\sin\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}\right)^n$

- Cho trước n góc $0 \leq \alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}$ ta có các bất đẳng thức sau:

$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \leq n \cos\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_1}{n}$	$\prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \leq \left(\cos\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}\right)^n$

- Cho tam giác ABC ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \qquad \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \qquad \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \qquad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}$$

3. Các tính chất cực trị hình học thường dùng.

► Quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên và hình chiếu .

- *Trong các đoạn thẳng nối một điểm đến một đường thẳng, đoạn vuông góc với đoạn thẳng có độ dài ngắn nhất.*

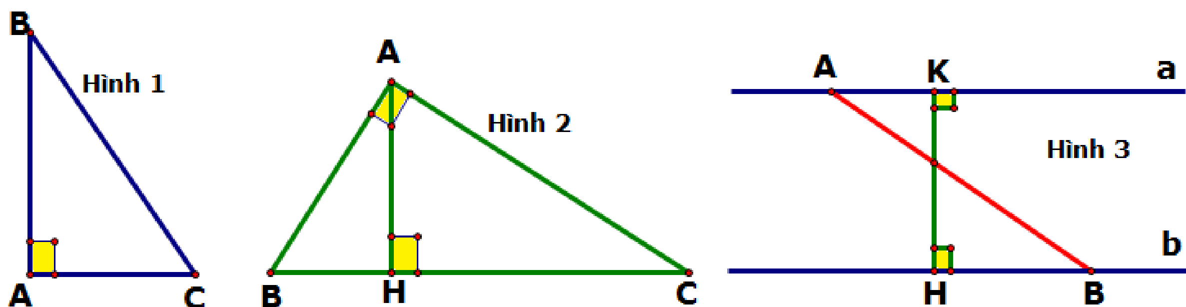
Ví dụ:ΔABC vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) thì cạnh huyền lớn hơn hoặc bằng cạnh góc vuông) . $AB \leq BC$ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv C$ ***(Hình 1)***

- *Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm đến một đường thẳng, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.*

Ví dụ:ΔABC vuông tại A có đường cao AH thì $AH \leq AB$ dấu bằng xảy ra khi $B \equiv H$. **(*Hình 2*)**

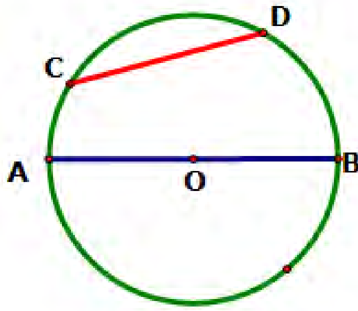
Đặc biệt, nếu $AB < AC \Leftrightarrow HB < HC$

- *Cho A, K thuộc đường thẳng a và B, H thuộc đường thẳng b. Khi đó:* $HK \perp a \Rightarrow HK \leq AB$, *dấu bằng xảy ra khi và chỉ* A ≡ K và B ≡ H. **(*Hình 3*)**

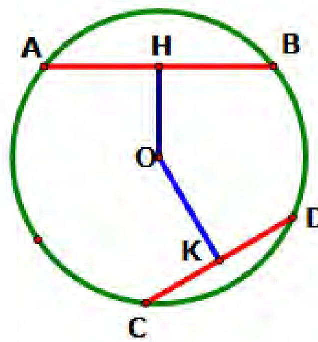


►Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

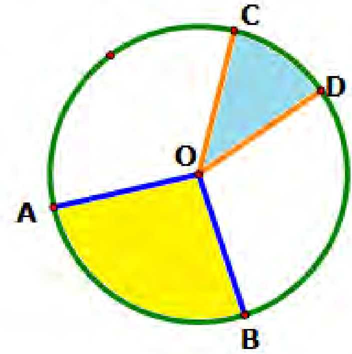
- *Trong một đường tròn đường kính có độ dài lớn nhất:* trong hình 4, AB là đường kính, CD là dây cung bất kỳ nên ta luôn có $CD \leq AB$
- *Trong một đường tròn, nếu dây cung này lớn hơn dây cung kia thì khoảng cách từ tâm đến hai cung tương ứng lớn hơn và ngược lại*: trong hình 5, OH, OK lần lượt là khoảng cách từ tâm đến dây cung AB và CD do đó ta luôn có: $AB \geq CD \Leftrightarrow OH \geq OK$
- *Trong một đường tròn, nếu cung AB lớn hơn cung CD thì góc ở tâm chắn cung AB cũng nhỏ hơn góc ở tâm chắn cung CD và ngược lại. (tương tự với góc nội tiếp và độ dài cung). (xem hình 6).*



Hình 4



Hình 5



Hình 6

4. Vị trí tương đối giữa các đối tượng hình học trong mặt phẳng tọa độ (điểm, đường thẳng, đường tròn, các đường conic, …).

►Điểm đối với đường thẳng, đường tròn và đường Conic.

- ***Điểm và đường thẳng***

Giả sử điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $d: ax+by+c=0$.

Khi đó, $\begin{cases} A\in d \Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0 \\ B\notin d \Leftrightarrow ax_B+by_B+c\neq 0 \end{cases}$

Đặc biệt, ***A và B cùng phía so với đường thẳng d***

$\Leftrightarrow (ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)>0$

Đồng thời, ***A và B trái phía so với đường thẳng d***

$\Leftrightarrow (ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)<0$

- ***Điểm và đường tròn***

Giả sử đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R và có phương trình

$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

A nằm ngoài (C) khi IA > R $\Leftrightarrow (x_A-a)^2+(y_A-b)^2>R^2$

A nằm trong (C) khi IA < R $\Leftrightarrow (x_A-a)^2+(y_A-b)^2<R^2$

A thuộc (C)khi IA = R $\Leftrightarrow (x_A-a)^2+(y_A-b)^2=R^2$

- ***Điểm và đường conic.***

Giả sử elip (E) có phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

A nằm ngoài (E)	*A nằm trong (E)*	*A thuộc đường (E)*
$\Leftrightarrow \frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}>1$	$\Leftrightarrow \frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}<1$	$\Leftrightarrow \frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$

►Đường thẳng với đường thẳng, đường tròn.

- ***Đường thẳng và đường thẳng***

Giả sử d_1, d_2 là hai đường thẳng lần lượt có phương trình

$$\begin{cases} d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0) \end{cases}$$

Khi đó, giải hệ phương trình $\begin{cases} d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} (I)$

Hệ (I) có duy nhất 1 nghiệm	Hệ (I) vô nghiệm	Hệ (I) có vô số nghiệm
$\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = b_1c_2 - b_2c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 = c_1a_2 - c_2a_1 \end{cases}$
d_1 và d_2 cắt nhau.	***d_1 và d_2 song song.***	***d_1 và d_2 trùng nhau***

- ***Đường thẳng và đường tròn.***

Giả sử đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R và có phương trình

$$(C) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Và đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$

(Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.	**(Δ) tiếp xúc với (C) tại A**	**(Δ) không cắt (C).**
$\Leftrightarrow d(I;\Delta) < R$	$\Leftrightarrow d(I;\Delta) = R = IA$	$\Leftrightarrow d(I;\Delta) > R$

►**Đường tròn và đường tròn.**

Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có tâm và bán kính lần lượt là I_1, R_1, I_2, R_2. Ta có:

- $I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau → Có 4 tiếp tuyến chung.
- $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) **tiếp xúc ngoài** → Có 3 tiếp tuyến chung.
- $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm → Có 2 tiếp tuyến chung.
- $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) **tiếp xúc trong** → Có 1 tiếp tuyến chung.
- $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) ở trong nhau → không có tiếp tuyến chung.

PHẦN 2.5.2:

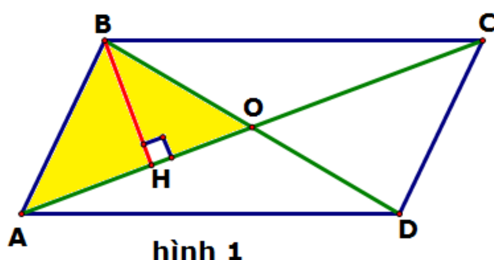
MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA CHO VIỆC SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH HỌC THUẦN TÚY.

Việc sử dụng bất đẳng thức, phương pháp hàm số để giải các bài toán max – min hình học từ lâu đã không còn xa lạ với bạn đọc. Tuy nhiên, ở một góc độ

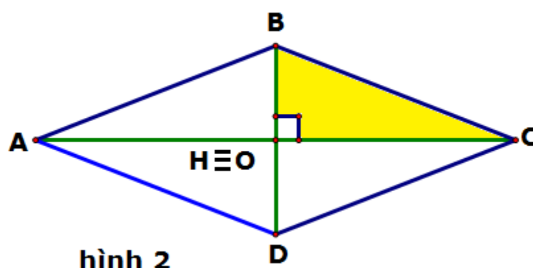
khác, hình học được giải bằng chính công cụ của hình học bao giờ cũng mang đến cho những lời giải đẹp. Để hình thành cho bạn đọc một số ý tưởng, các dạng toán thường gặp, tác giả trình bày một số bài toán minh họa cho việc sự dụng tính chất hình học thuần túy nhằm mục đích giới thiệu ở phần tiếp theo đây. Mời bạn đọc cùng theo dõi.

BÀI TOÁN 1.*Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm ,hình nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.*

☺ **Hướng dẫn giải.**







* Xét hình bình hành ABCD có AC = 8 cm; BD = 6 cm *(hình 1)*

* Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Kẻ BH ⊥ AC.

Ta có : $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

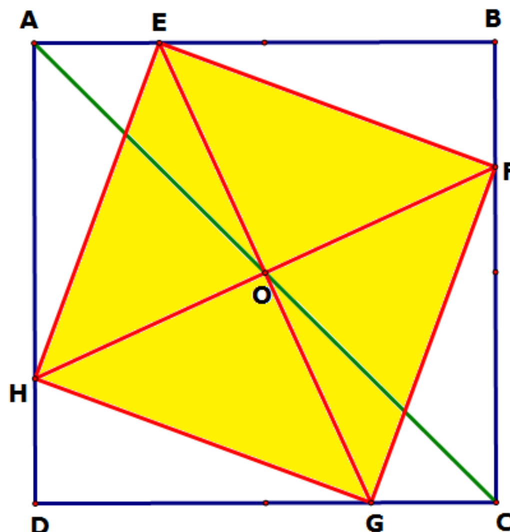
* Ta có AC = 8cm, BH ≤ BO = 3cm. Do đó :$S_{ABCD} \le 8.3 = 24\ (cm^2)$

* $S_{ABCD} = 24\ cm^2 \Leftrightarrow BH \equiv BO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow BD \perp AC$.

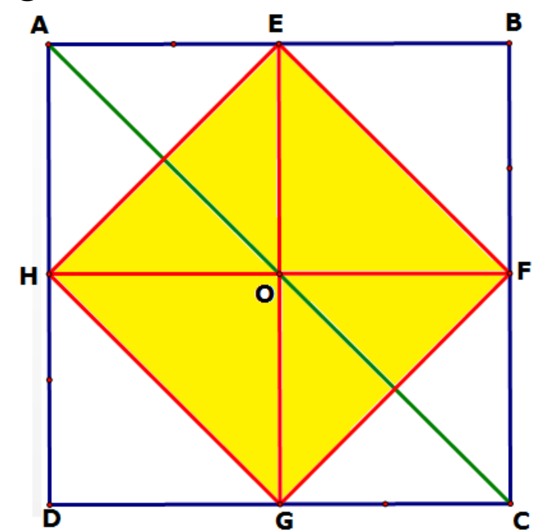
Vậy max $S_{ABCD} = 24\ cm^2$ *. Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi (hình 2) có diện tích 24cm².*

BÀI TOÁN 2.*Cho hình vuông ABCD . Trên các cạnh AB,BC ,CD,DA ta lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho AE = BF = CG = DH . Xác định vị trí của các điểm E, F,G,H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .*

☺ **Hướng dẫn giải.**







* Ta có: ΔHAE = ΔEBF = ΔFCG = ΔGHD ⇒ HE = EF = FG = GH ⇒ EFGH là hình thoi .

* Mặt khác: $AHE = BEF \Rightarrow AHE + AEH = 90^0 \Rightarrow BEF + AEH = 90^0$

Suy ra $HEF = 90^0 \Rightarrow$ EFGH là hình vuông

* Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

* ΔHOE vuông cân : $HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$.

Chu vi EFGH = 4HE = $4\sqrt{2}$ OE . Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất ⇔ OE nhỏ nhất

Kẻ OK ⊥AB ⇒ OE ≥OK (OK không đổi). OE = OK ⇔ E ≡ K

Do đó minOE = OK.

Vậy chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

BÀI TOÁN 3. *Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau ở A và B . một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O’) tại C và D . Xác định vị trí của cát tuyến CBD để ΔACD có chu vi lớn nhất.*

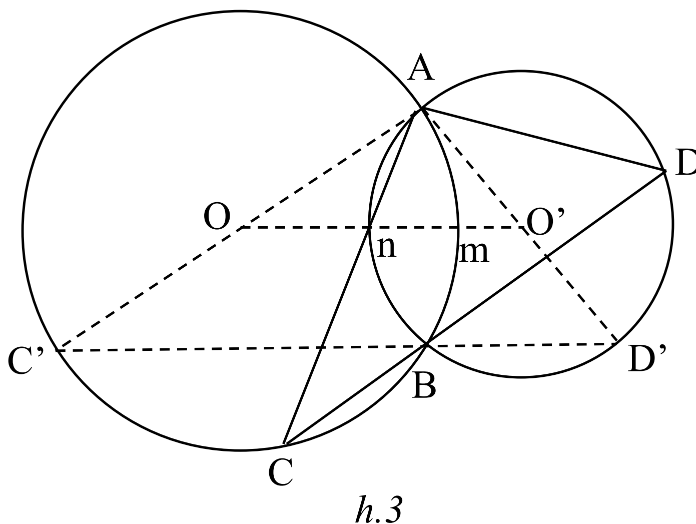
☺ **Hướng dẫn giải.**

* sđ $C = \frac{1}{2}$ sđ AmB ;

sđ $D = \frac{1}{2}$ sđ AnB

⇒ số đo các góc ΔACD không đổi

⇒ΔACD có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất , chẳng hạn AC là lớn nhất.

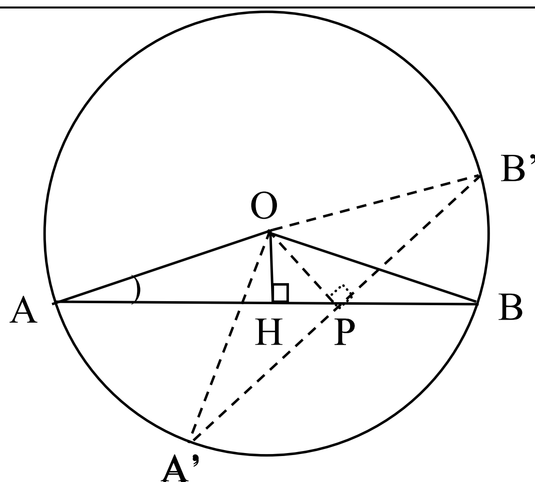


h.3

AC là dây của đường tròn (O) , do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O), khi đó AD là đường kính của đường tròn (O’). Cát tuyến CBD ở vị trí C’BD’ vuông góc với dây chung AB.

BÀI TOÁN 4. *Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn . Xác định dây AB đi qua P sao cho góc OAB có giá trị lớn nhất .*

☺ **Hướng dẫn giải.**



h.4

* Xét tam giác cân OAB , góc ở đáy OAB lớn nhất nếu góc ở đỉnh OAB nhỏ nhất . $AOB = \frac{1}{2}$ sđ AB

* Góc OAB nhỏ nhất ⇔ Cung AB nhỏ nhất ⇔ dây AB nhỏ nhất

⇔ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

* Ta có $OH \le OP$. OH =OP

⇔ $H \equiv P$ nên max OH = OP ⇔ $AB \perp OP$

* Suy ra dây AB phải xác định là dây A'B' vuông góc với OP tại P .

BÀI TOÁN 5. *Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích tam giác có cạnh đáy nhỏ hơnlà tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

* Xét các tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH . Đặt $BAC = \alpha$

* ΔAHC vuông tại H, ta có: $HAC = \frac{\alpha}{2}$.

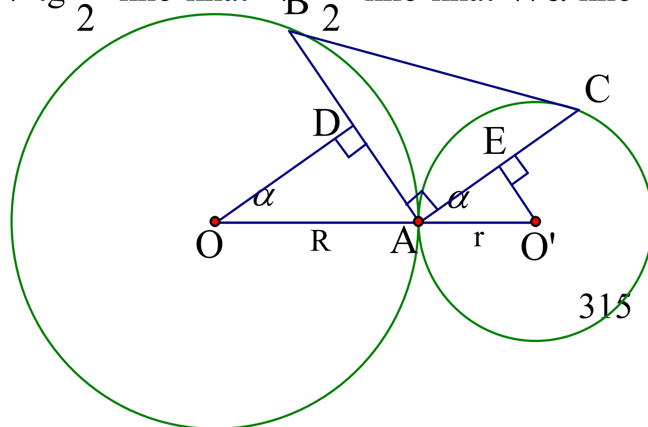
Và $AH = HC.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}$

$= \frac{1}{2}BC.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}$

* Do đó : $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}BC.\frac{1}{2}BC.\text{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}BC^2\text{cotg}\frac{\alpha}{2}$

* Suy ra $BC = \sqrt{\frac{4S}{\text{cotg}\frac{\alpha}{2}}} = 2\sqrt{S.\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Do S không đổi nên :BC nhỏ nhất ⇔ $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ nhỏ nhất ⇔ $\frac{\alpha}{2}$ nhỏ nhất ⇔α nhỏ nhất ⇔ BAC nhỏ nhất



BÀI TOÁN 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A .Qua

A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt các đường tròn (O), (O') lần lượt tại B và C. Xác định vị trí của các tia đó để Δ ABC có diện tích lớn nhất.

☺ **Hướng dẫn giải.**

* *Kẻ OD ⊥ AB ; O'E ⊥ AC ta có:*

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.2AD.2AE = 2.AD.AE$

* *Đặt OA = R ; O'A = r ;* $AOD = O'AE = \alpha$

Ta có: $AD = R\sin\alpha$; $AE = r\cos\alpha \Rightarrow S_{ABC} = Rr.\ 2\sin\alpha.\cos\alpha$

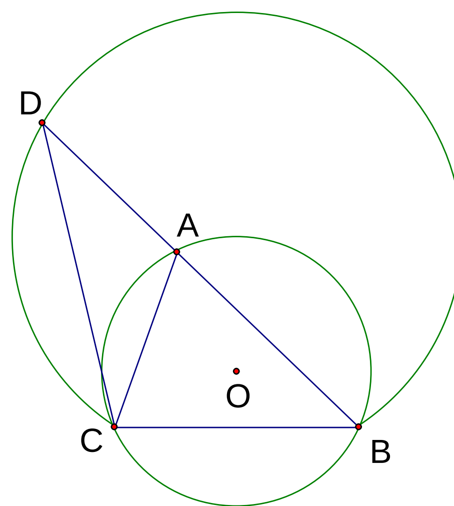
Mặt khác, $2\sin\alpha.\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow S_{ABC} \le Rr$

* *Do đó : max* $S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

* *Vậy nếu ta vẽ các tia AB,AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc* $OAB = O'AC = 45^0$ *thì Δ ABC có diện tích lớn nhất.*

BÀI TOÁN 7. Cho đường tròn (O; R), dây BC cố định. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC để tam giác ABC có chu vi lớn nhất.

☺ **Hướng dẫn giải.**



* BC cố định nên góc CAB không đổi, độ dài BC không đổi. Chu vi tam giác ABC chỉ còn phụ thuộc vào AB + AC.

* Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho AC = AD vậy chu vi của tam giác ABC phụ thuộc vào độ dài của BD.

* Hơn nữa góc CDB cũng không đổi hay BD là dây của cung chứa góc $\frac{1}{2}\angle A$ dựng trên BC

*Vậy BD lớn nhất bằng đường kính của cung chứa góc $\frac{1}{2}\angle A$ dựng trên BC khi và chỉ khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC

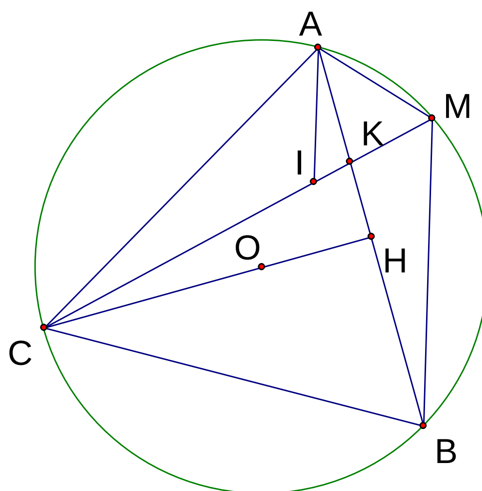
BÀI TOÁN 8. Cho đường tròn (O; R) với dây AB cố định sao cho khoảng cách từ O tới AB bằng $\frac{R}{2}$. Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt đường tròn (O; R) tại C. Trên cung nhỏ AB lấy M tùy ý (khác A, B). Đường thẳng qua A và song song với MB cắt CM tại I. Dây CM cắt dây Ab tại K

a. So sánh góc AIM với góc ACB.

b. Chứng minh: $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MK}$.

c. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAK và tam giác MBK, hãy xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AB để tích $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

►Phân tích và gợi ý:



a) OH=$\frac{1}{2}$R => Nhận xét quan hệ giữa dây và và sđ cung căng dây (Sđ cung AB = 120^0)
Từ đó tìm được quan hệ giữa hai góc AIM và ACB.

b) Thường chuyển về tỉ số các đoạn thẳng
(Cần chứng minh $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=1$)
Tìm cách quy đồng mẫu vế trái bằng cách chỉ ra các tam giác đồng dạng?
Tam giác chứa hai cạnh MK, MA đồng dạng với tam giác nào? tam giác chứa hai cạnh MK, MB đồng dạng với tam giác nào?
(Tam giác MKA và tam giác MBC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MK}{MA}=\frac{MB}{MC}$, tam giác MKB và tam giác MAC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MK}{MB}=\frac{MA}{MC}$
Vậy $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=\frac{MA+MB}{MC}$ do đó ta phải chứng minh MA+MB = MC

c) Để tìm giá trị lớn nhất của tích $R_1.R_2$, ta tìm mối liên hệ của tổng R_1+R_2 với các yếu tố không đổi của bài toán
Để ý hai tam giác AMK, BMK có hai góc AMK, BMK không đổi (= 60^0), tổng hai cạnh đối diện không đổi. (dùng công thức $R=\frac{a}{2\sin A}$)

☺ **Hướng dẫn giải.**

- Xét tam giác AOH có CosO = $\frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOH = 60^0$

  $\Rightarrow \angle AOB = 120^0 \Rightarrow$ sđ cung $AB = 120^0 \Rightarrow \angle ACB = 60^0$

  Tam giác ABC có đường cao CH đồng thời là trung tuyến. Vậy tam giác ABC đều => $\angle ACB = 60^0$

  AI // MB => góc AIM = góc CMB = góc CAB = 60^0

  Vậy góc AIM = góc ACB.

- Tam giác AIM đều (có hai góc bằng 60^0) => AM = MI.

  $\Delta AIC = \Delta AMB$ (c - g - c) $\Rightarrow CI = MB$

  ΔMKA và ΔMBC đồng dạng nên $\frac{MK}{MA} = \frac{MB}{MC}$

  ΔMKB và ΔMAC đồng dạng nên $\frac{MK}{MB} = \frac{MA}{MC}$

  Vậy: $\frac{MK}{MA} + \frac{MK}{MB} = \frac{MB}{MC} + \frac{MA}{MC} = \frac{MB+MA}{MC} = 1$ hay $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MK}$.

- Áp dụng định lý hàm sin ta có:

  Trong tam giác AKM: $R_1 = \frac{AK}{2\sin M} = \frac{AK}{2\sin 60^0} = \frac{AK}{\sqrt{3}}$

  Trong tam giác BKM: $R_2 = \frac{BK}{2\sin M} = \frac{BK}{2\sin 60^0} = \frac{BK}{\sqrt{3}}$

  Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số không âm R_1, R_2 có:

  $\sqrt{R_1R_2} \le \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{AK + BK}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2}$ = hs dấu bằng khi $R_1=R_2$

  ⇔ AK = BK ⇔ M là điểm chính giữa của cung AB.

  Vậy $R_1R_{2\,max} = \frac{R^2}{4}$ khi M là điểm chính giữa của cung AB.

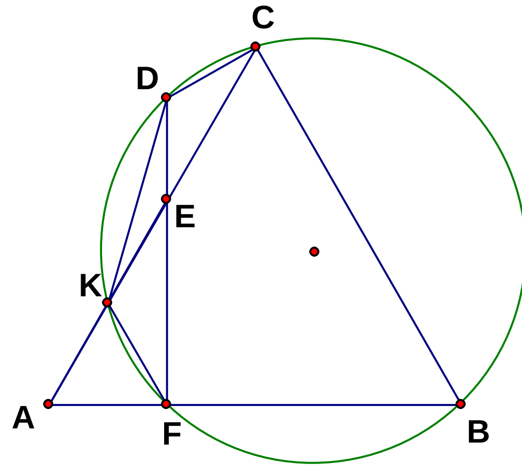
BÀI TOÁN 9. Cho tam giác đều ABC, E là một điểm trên cạnh AC (E khác A), K là trung điểm của đoạn AE. Đường thẳng EF đi qua E và vuông góc với đường thẳng AB (F thuộc AB) cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng BC tại D. Xác định vị trí của E sao cho đoạn KD có độ dài nhỏ nhất.

►Phân tích và gợi ý:

- Khai thác Tam giác ABC đều, tam giác AEF vuông, K là trung điểm AE, góc DCB vuông.

- Do đó,5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn => KD là một dây cung .
- Vìsđ cung DK không đổi. Do đó: KD nhỏ nhất ⇔ bán kính nhỏ nhất.

☺ **Hướng dẫn giải.**



* Tam giác AEF vuông tại F, góc A = 60^0, FK là trung tuyến ứng với cạnh huyền => Tam giác AKF đều => góc FKC = 120^0. Vậy Tứ giác BCKF nội tiếp.

* Tứ giác BCDF có góc F = góc C = 90^0. Vậy Tứ giác BCDF nội tiếp hay 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.

* sđ cung DK = 2 góc DFK = 60^0

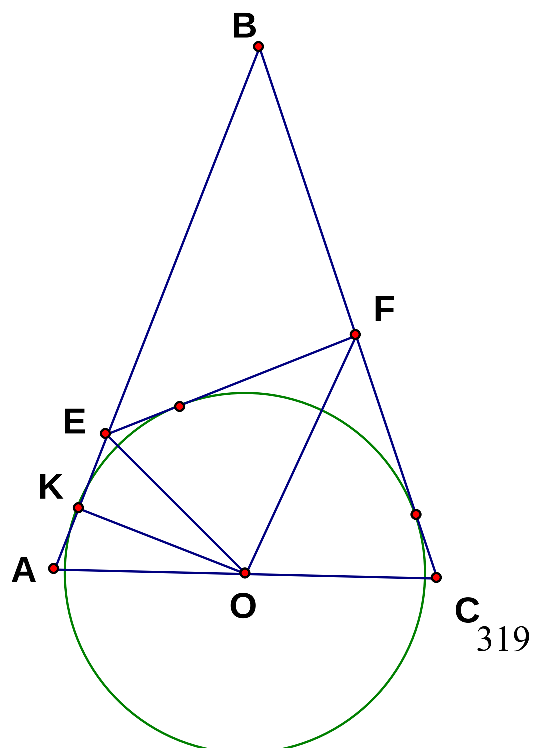
$\Rightarrow$ KD = $\frac{1}{2}$ DB $\le \frac{1}{2}CB$ dấu bằng khi E trùng với C

* Vậy KD $_{min}$ = $\frac{1}{2}CB$ khi E ≡C.

BÀI TOÁN 10. Cho tam giác ABC cân ở B có góc ABC bằng β, O là trung điểm của cạnh AC, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB, (ω) là đường tròn tâm O bán kính OK. E là một điểm thay đổi trên cạnh BA sao cho góc AOE bằng α (20^0 <α< 90^0). F là điểm trên cạnh BC sao cho EF tiếp xúc với (ω). Tìm α để AE + CF nhỏ nhất.

►**Phân tích và gợi ý:** Để Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng, ta đi chứng minh tích không đổi.Nhận xét quan hệ của hai tam giác AEO và OEF ?(Sử dụng tính chất tiếp tuyến, tổng các góc của tứ giác, tam giác)

☺ **Hướng dẫn giải.**



* Trong tam giác OEF:

$$\angle EOF = 180^0 - \angle OEF - \angle OFE$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}\angle AEF - \frac{1}{2}\angle CFE$$

* Trong tứ giác AEFC:

$$\angle AEF + \angle AFE$$

$$= 360^0 - (\angle A + \angle C) = 180^0 + \beta$$

$$\Rightarrow \angle EOF = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

* Tam giác ABC cân tại B:

$$\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^0 - \beta) = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

Vậy $\angle$ EOF = $\angle$ A = $\angle$ C.

Suy ra:

Tam giác AEO và tam giác OEF đồng dạng,

Tam giác OEF và tam giác COF đồng dạng

Vậy tam giác AEO và tam giác COF đồng dạng.

* $\Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{CO}{CF} \Rightarrow AE.CF = AO.CO = hs$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$AE + CF \geq 2\sqrt{AE.AF} = 2\sqrt{AO.CO} = hs$ dấu bằng khi và chỉ khi AE = CF

Suy ra tam giác OEF cân tại O ⇔ tam giác AEO cân tại A ⇔

Suy ra $\angle$ AOE = $90^0 - \frac{1}{2}\angle A = 90^0 - \frac{1}{2}(90^0 - \frac{1}{2}\beta) = 45^0 + \frac{1}{4}\beta$

Vậy khi $\angle$ AOE = $45^0 + \frac{1}{4}\beta$ thì AE + CF nhỏ nhất

PHẦN 2.5.3:

NGUYÊN TẮC CHUNG VÀ CÁC CÁCH TIẾP CẬN KHI GIẢI BÀI TOÁN MAX – MIN TRONG TỌA ĐỘ OXY.

Sau khi đã giới thiệu các cơ sở, các kiến thức nền cần có, thì giờ là lúc ta xây dựng một nguyên tắc chung trong tiếp cận khi giải bài toán liên quan đến max – min cực trị trong hình học mặt phẳng tọa độ Oxy. Cụ thể có thể thực hiện như sau:

Lưu ý: *ở bước 2, có những bài toán mà ta có thể thực hiện bằng cả hai cách nên đó cũng là một cách giúp ta kiểm tra và khẳng định kết quả tìm được của cách này bằng cách khác.*

Nguyên tắc chung:

♦ **Bước 1**: ***Xét vị trí tương đối giữa các đối tượng hình học***. (*xem phần 2.5.1*) : đây là một bước chuẩn bị cực kỳ quan trọng không thể bỏ qua dù ta có giải bài toán theo cách này hay cách khác.

♦ **Bước 2**: ***Chọn hướng đi cho bài toán:*** Sau quá trình phân tích các kiến thức cơ sở trên thì ta có thể chọn hướng giải quyết bài toán theo các cách sau:

– **Cách 1**: Tìm được biểu thức chứa biến cần đặt Max – min.

– **Cách 2**: Không tìm được biểu thức chứa biến cần đạt Max – min.

♦ **Bước 3**: ***Ứng với các cách đã chọn, vận dụng các kiến thức liên quan để giải bài toán.***

– **Ứng với cách 1**: ta vận dụng ***phương pháp hàm số*** (đối với 1 biến) hoặc các ***Bất đẳng thức quen thuộc*** *(đối với nhiều biến) để tìm giá trị cần đạt max – min.*

– **Ứng vớicách 2**: ta vận dụng ***các tính chất hình học thuần túy****để tìm giá trị cần đặt max – min.*

♦ **Bước 4**: ***Kiểm tra lại các kết quả đã tìm được (nếu có) và đưa ra kết luận.***

Sau đây tác giả sẽ lấy các bài toán minh họa cho các nguyên tắc chung trên, cũng như tổng quát hóa một số bài toán, Mời bạn đọc cùng theo dõi.

BÀI TOÁN 1. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chođường thẳng* $\Delta: x-2y+2=0$ *và tọa độ các điểm* $A(0;6),\ B(2;5)$. *Tìm tọa độ điểm M thuộc đường* Δ *sao cho :*

a. $MA+MB$ *nhỏ nhất.*

b. $|MA-MB|$ *lớn nhất.*

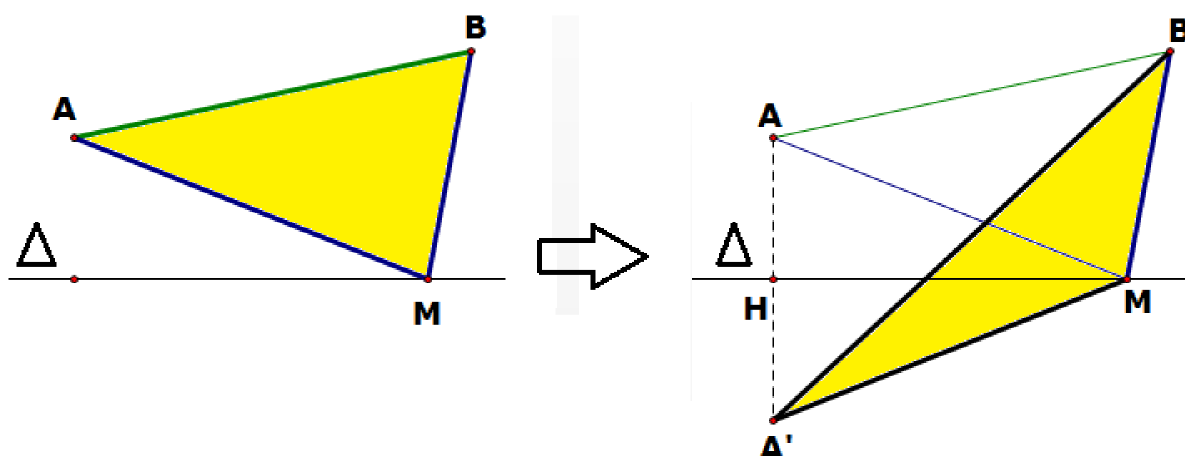
☺ **Hướng dẫn giải.**

- Thay tọa độ A và B vào phương trình đường thẳng Δ ta có:

$(x_A-2y_A+2)(x_B-2y_B+2)=(0-12+2)(2-10+2)=60>0$ suy ra A và B cùng phía so với đường thẳng Δ.

a. $MA+MB$ ***nhỏ nhất***

Cách 1: ***sử dụng tính chất hình học thuần túy (các bất đẳng thức trong tam giác).***



* Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ. Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$ (***bất đẳng thức tam giác***)

Do đó

$$(MA+MB)_{\min}\Leftrightarrow(MA'+MB)_{\min}\Leftrightarrow MA'+MB=A'B\Rightarrow \boxed{M=A'B\cap\Delta}$$

Khi đó: $AA':2(x-0)+1(y-6)=0\Leftrightarrow 2x+y-6=0$

* Gọi $H=AA'\cap\Delta$. Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(2;2)}$$

Do H là trung điểm của $AA^/$ nên ta có: $A^/(4;-2)$. Từ đó $\overrightarrow{A^/B}=(-2;7)$.

* Đường thẳng $A^/B: 7(x-2)+2(y-5)=0 \Leftrightarrow 7x+2y-24=0$

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 7x+2y-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{4}; \\ y=\dfrac{19}{8}. \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{19}{8}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{19}{8}\right)}$

Cách 2: ***sử dụng phương pháp hàm số***

* Gọi $M\in\Delta: x-2y+2=0 \Rightarrow M(2m-2;m)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AM}=(2m-2;m-6) \Rightarrow AM=\sqrt{5m^2-20m+40} \\ \overrightarrow{BM}=(2m-4;m-5) \Rightarrow BM=\sqrt{5m^2-26m+41} \end{cases}$

* Khi đó ta có: $AM+BM=\sqrt{5m^2-20m+40}+\sqrt{5m^2-26m+41}$.

Đặt $f(m)=\sqrt{5m^2-20m+40}+\sqrt{5m^2-26m+41}$.

Ta có: $f'(m)=\dfrac{5m-10}{\sqrt{5m^2-20m+40}}+\dfrac{5m-13}{\sqrt{5m^2-26m+41}}$.

Cho $f'(m)=0 \Leftrightarrow (5m-10)\sqrt{5m^2-26m+41}=(5m-13)\sqrt{5m^2-20m+40}$

$\Leftrightarrow \boxed{m=\dfrac{19}{8}}$

* Bảng biến thiên:

m	$-\infty$		$\dfrac{19}{8}$		$+\infty$
$f^/(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{53}$	$\nearrow$	$+\infty$

* Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

$$\min(\text{MA}+\text{MB})=\min_{m\in R} f(m)=\sqrt{53}\Leftrightarrow m=\frac{19}{8}\Leftrightarrow M\left(\frac{11}{4};\frac{19}{8}\right)$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\frac{11}{4};\frac{19}{8}\right)}$

Cách 3: ***sử dụng bất đẳng thức véctơ***

* Gọi $M\in\Delta: x-2y+2=0\Rightarrow M(2m-2;m)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(2m-2;m-6)\Rightarrow AM=\sqrt{5m^2-20m+40}\\ \overrightarrow{BM}=(2m-4;m-5)\Rightarrow BM=\sqrt{5m^2-26m+41}\end{cases}$

* Khi đó ta có: $AM+BM=\sqrt{5m^2-20m+40}+\sqrt{5m^2-26m+41}$.

Suy ra $AM+BM=\sqrt{(m\sqrt{5}-2\sqrt{5})^2+20}+\sqrt{\left(m\sqrt{5}-\frac{13}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{36}{5}}$.

Đặt $\vec{u}=\left(m\sqrt{5}-2\sqrt{5};2\sqrt{5}\right)$, $\vec{v}=\left(\frac{13}{\sqrt{5}}-m\sqrt{5};\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ suy ra $\vec{u}+\vec{v}=\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{16}{\sqrt{5}}\right)$

* Sử dụng bất đẳng thức $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Leftrightarrow MA+MB\ge\sqrt{53}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}m\sqrt{5}-2\sqrt{5}=k\left(\frac{13}{\sqrt{5}}-m\sqrt{5}\right)\\ 2\sqrt{5}=k\frac{6}{\sqrt{5}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{19}{8}\\ k=\frac{5}{3}\end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\frac{11}{4};\frac{19}{8}\right)}$

b. $|MA-MB|$ ***lớn nhất.***

* Sử dụng kết quả câu a) ta có hai điểm $A;B$ nằm về cùng phía so với Δ nên ta có đánh giá: $\left|MA-MB\right|\le AB=$ hằng số.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M;A;B$ thẳng hàng.

* Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(2;-1\right)$ nên $AB:1(x-0)+2(y-6)=0\Leftrightarrow x+2y-12=0$

* Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y-12=0\\ x-2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5;\\ y=\frac{7}{2}.\end{cases}\Rightarrow\boxed{M\left(5;\frac{7}{2}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(5;\frac{7}{2}\right)}$

■ ***Lời bình:Qua việc giải bài toán 1, ta rút ra được một số nhận xét sau:***

Với cách 1 vận dụng để giải cho câu a và b thì ta thấy có thể tổng quát thành thuật toán như sau:

►***Bài toán tìm điểm M thuộc Δ thỏa MA + MB nhỏ nhất.***

+ **TH1:** Nếu hai điểm *A, B* khác phía so với đường thẳng Δ thì điểm M cần tìm chính là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng AB.

+ **TH2:** Nếu hai điểm *A, B* cùng phía so với đường thẳng Δ, khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

- ***Bước 1***: Xác định điểm A' là điểm đối xứng với *A* qua Δ.
- ***Bước 2***: Từ đánh giá: $MA+MB=MA'+MB\geq A'B=$ hằng số. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A';M;B$ thẳng hàng. Nên ta đi viết phương trình đường thẳng $A'B$.
- ***Bước 3***: Điểm $M=\Delta\cap A'B$.

►***Bài toán tìm điểm M thuộc Δ thỏa |MA – MB| lớn nhất.***

+ **TH1:** Nếu hai điểm *A; B* mà nằm về hai phía so với Δ thì ta lại phải đi tìm điểm A' đối xứng với *A* qua Δ. Sau đó ta sử dụng đánh giá: $|MA-MB|=|MA'-MB|\leq A'B=$ hằng số. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M,A',B thẳng hàng. Từ đó tìm ra tọa độ của *M.* $\left(M=A'B\cap\Delta\right)$

+ **TH2:** Nếu hai điểm $A;B$ nằm về cùng một phía so với Δ thì ta có ngay đánh giá: $|MA-MB|\leq AB=$hằng số. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M;A;B$ thẳng hàng. Do đó điểm *M* cần tìm là giao của AB với

Với cách 2 và 3 đã vận dụng đung tinh thần của nguyên tắc chung là cố gắng tìm kiếm biểu thức chứa biến cần đạt max – min nhưng so với cách 1 thì lời giải ở cách 2 có phần nặng nề và gây khó khăn khi giải quyết phương trình $f'(m)=0$ hay phải vận dụng biến đổi vài kỹ thuật đại số ở cách 3.

BÀI TOÁN 2. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho đường thẳng* $\Delta: x-2y-2=0$ *và tọa độ các điểm* $A(3;4)$, $B(-1;2)$. *Tìm tọa độ điểm M thuộc đường* Δ *sao cho :*

a. MA^2+2MB^2 *nhỏ nhất.*

b. MA^2-2MB^2 *lớn nhất.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

Cách 1: ***sử dụng phương pháp hàm số.***

* Ta có $M \in \Delta : x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow M(2m+2; m)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (2m-1; m-4) \Rightarrow AM^2 = 5m^2 - 12m + 17 \\ \overrightarrow{BM} = (2m+3; m-2) \Rightarrow BM^2 = 5m^2 + 8m + 13 \end{cases}$

* Ta có: $MA^2 + 2MB^2 = 15m^2 + 4m + 43$

* Đặt $f(m) = 15m^2 + 4m + 43, (m \in R)$.

Ta có: $f'(m) = 30m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-2}{15}$

* Bảng biến thiên:

m	$-\infty$		$\dfrac{-2}{15}$		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{641}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

* Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

$$\min(MA^2 + 2MB^2) = \min_{m \in R} f(m) = \frac{641}{15} \Leftrightarrow m = \frac{-2}{15} \Leftrightarrow M\left(\frac{26}{15}; \frac{-2}{15}\right)$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\dfrac{26}{15}; \dfrac{-2}{15}\right)}$

Cách 2: ***sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.***

* Tương tự cách 1, ta có: $MA^2 + 2MB^2 = 15m^2 + 4m + 43$

* Do đó $MA^2 + 2MB^2 = (15m^2 + 4m) + 43 = \left(m\sqrt{15} + \dfrac{2}{\sqrt{15}}\right)^2 + \dfrac{641}{15} \geq \dfrac{641}{15}$

* Vậy

$$\left(MA^2 + 2MB^2\right)_{\min} = \frac{641}{15} \Rightarrow m\sqrt{15} + \frac{2}{\sqrt{15}} = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{15} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{26}{15}; \frac{-2}{15}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\frac{26}{15};\frac{-2}{15}\right)}$.

Cách 3: ***sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2.***

* Tương tự cách 1, ta có: $MA^2+2MB^2=15m^2+4m+43$
* Đặt $y=15m^2+4m+43\Rightarrow 15m^2+4m+43-y=0$ (*). Xem phương trình (*) có m là ẩn số và y là tham số. Ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta'=4-15(43-y)\geq 0\Leftrightarrow y\geq\frac{641}{15}\Leftrightarrow\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}=\frac{641}{15}$$

* thay y = $\frac{641}{15}$ vào phương trình (*)

$$\Leftrightarrow 15m^2+4m+\frac{4}{15}=0\Rightarrow m=\frac{-2}{15}\Rightarrow\boxed{M\left(\frac{26}{15};\frac{-2}{15}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\frac{26}{15};\frac{-2}{15}\right)}$.

b. MA^2-2MB^2 lớn nhất.

* Tương tự câu a ta có: $MA^2-2MB^2=-5m^2-28m-9$
* Đặt $h(m)=-5m^2-28m-9,(m\in R)$.

  Ta có: $h'(m)=-10m-28=0\Leftrightarrow m=\frac{-14}{5}$
* Tương tự ta lập bảng biến thiên và nhận xét:

$$\max(MA^2-2MB^2)=\max_{m\in R}f(m)=\frac{151}{5}\Leftrightarrow m=\frac{-14}{5}\Leftrightarrow\boxed{M\left(\frac{-18}{5};\frac{-14}{5}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(\frac{-18}{5};\frac{-14}{5}\right)}$.

■ ***Lời bình:*** bài toán trên có thể tổng quát lên là: "*Cho n điểm* A_i $(i=1,2,...,n)$ *và n số thực* a_i *. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng* $\Delta: ax-by-c=0$ *sao cho* $S=\sum_{i=1}^{n}a_iMA_i^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất).*

Với cách giải 1 (Lớp 12), có thể giải cho bài toán tổng quát, cách giải 2 và 3 thì với học sinh THCS (lớp 9) là bắt đầu có thể sử dụng không đòi hỏi quá nhiều kiến thức, chỉ là vận dụng một số phép biến đổi hằng đẳng thức liên quan.

BÀI TOÁN 3. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho đường thẳng* $\Delta: x-2y-2=0$ *và tọa độ các điểm* $A(3;4),\ B(-1;2), C(0;1)$. *Tìm tọa độ điểm M thuộc đường* Δ *sao cho :* $P=\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

Cách 1: ***Tìm biểu thức chứa biến cần đạt max – min***

* Ta có $M\in\Delta: x-2y-2=0 \Rightarrow M(2m+2;m)$.

Do đó, ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(1-2m;4-m)\\ \overrightarrow{MB}=(-2m-3;-m+2)\Rightarrow \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=(1-4m;3-2m)\\ \overrightarrow{MC}=(-2m-2;-m+1)\end{cases}$$

* Mặt khác, $P^2=20m^2-20m+10=20\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+5\ge 5$

* Do đó, $P_{\min}\Leftrightarrow {P_{\min}}^2=5\Leftrightarrow m-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{M\left(3;\frac{1}{2}\right)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(3;\frac{1}{2}\right)}$

Cách 2: ***Vận dụng phương pháp véctơ.***

* Ta có $M\in\Delta: x-2y-2=0 \Rightarrow M(2m+2;m)$.

* Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x_G)-2(-1-x_G)+3(0-x_G)=0\\ 4-y_G-2(2-y_G)+3(1-y_G)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_G=\frac{5}{2}\\ y_G=\frac{3}{2}\end{cases}$$

* Xét $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})=2\overrightarrow{MG}$

(do $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$*)*

Do đó ta có: $P_{\min}=\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|_{\min}=MG_{\min}$

* Gọi K là hình chiếu vuông góc của G lên $\Delta: x-2y-2=0$. Ta có: $MG\ge GK$.

Vì vậy $MG_{\min} \Leftrightarrow MG = GK \Rightarrow M \equiv K$

$\Rightarrow$ *M chính là của G lên* $\Delta: x - 2y - 2 = 0$.

Ta có $GK \perp \Delta \Rightarrow GK: 2x + y + c = 0$, GK qua $G\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ suy ra c = $\frac{-13}{2}$

Suy ra **GK: 4x + 2y – 13 = 0.**

Khi đó M thỏa hệ $\begin{cases} 4x + 2y - 13 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(3; \frac{1}{2}\right)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M\left(3; \frac{1}{2}\right)}$

■ ***Lời bình:****Bài toán trên ta có thể tổng quát lên là**:* *" Cho n điểm* A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ *và n số thực* a_i . *Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng* $\Delta: ax - by - c = 0$ *sao cho* $S = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Với cách giải 1, *chỉ cần bình phương "thoát căn bậc 2" là ta đã có thể vận dụng các kỹ thuật như dùng phương pháp hàm số, bất đẳng thức đối với lũy thừa bậc 2 để xử lý.*

Với cách giải 2, *là một sự kết hợp thú vị giữa véctơ và các tính chất hình học. Trong đó tính chất đường xiên luôn lớn hơn đường vuông góc đã được vận dụng một cách tốt. Ứng với bài toán đã được tổng quát ở trênvà vận dụng cách giải 2, ta có cách giải tổng quát là:*

Gọi $I(x_I; y_I)$ *là điểm thỏa mãn*

$a_1\overrightarrow{IA_1} + a_2\overrightarrow{IA_2} + ... + a_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{IA_i} = \vec{0}$. *Khi đó:*

$$S = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i}\right| = \left|a_1(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + a_2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + ... + a_n(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MI}\right|$$

Do đó S nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, để giải tiếp ta có thể sử dụng cách 1 hoặc làm như cách 2 trình bày.

BÀI TOÁN 4. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho đường tròn* $(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ *và đường thẳng* $\Delta: x + 2y + 10 = 0$ *và điểm A(2; 1). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho:*

a. *Độ dài AM nhỏ nhất và lớn nhất.*

b. *Khoảng cách từ M đến* Δ *nhỏ nhất và lớn nhất*

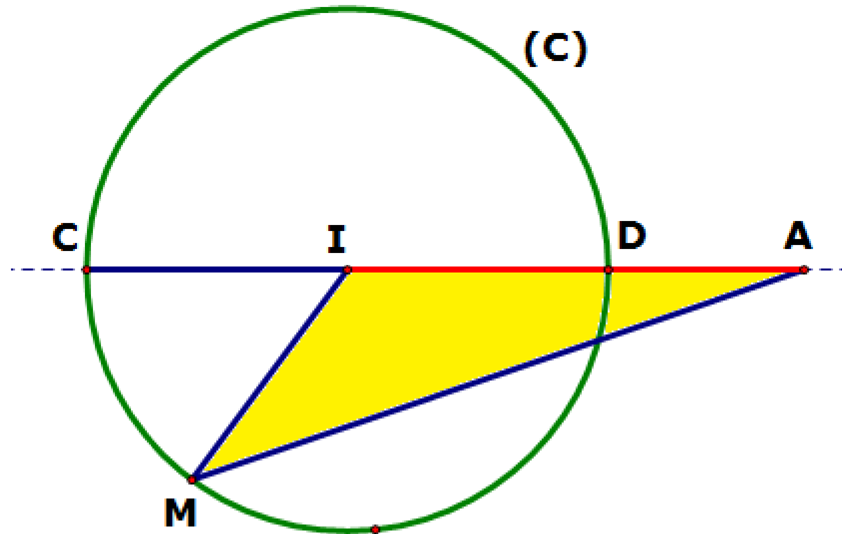
☺ **Hướng dẫn giải.**

- Đường tròn (C) có tâm I(–2; 1) và bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có:

  $IA = \sqrt{4^2} = 4 > \sqrt{5} = R$. Do đó A nằm ngoài đường tròn (C).

a. Độ dài AM nhỏ nhất và lớn nhất.

Cách 1: ***sử dụng các tính chất hình học trong đường tròn.***



* Kẻ đường kính CD qua A (D là điểm nằm giữa C và A).

* Ta có: $AM \geq |IA - IM| = |IA - ID| = DA \Rightarrow AM_{\min} = AD \Rightarrow M \equiv D$

* Lại có: $AM \leq IA + IM = IA + IC = AC \Rightarrow AM_{\max} = AC \Rightarrow M \equiv C$

* Khi đó M là giao điểm giữa đường thẳng IA và đường tròn (C) nên tọa độ M thỏa hệ:

$$\begin{cases} IM: y - 1 = 0 \\ (C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 - \sqrt{5}; y = 1 \\ x = -2 + \sqrt{5}; y = 1 \end{array}\right.$$

Tính độ dài AM ta suy ra tọa độ $\boxed{C(-2-\sqrt{5};1),\ D(-2+\sqrt{5};1)}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{C(-2-\sqrt{5};1),\ D(-2+\sqrt{5};1)}$

Cách 2: ***sử dụng phương pháp đại số***

* Giả sử $M(a;b) \in (C) \Rightarrow (a+2)^2 + (b-1)^2 = 5$ (*)

* Ta có: $AM^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 = (a+2)^2 + (b-1)^2 - 8a = 5 - 8a$

* Mặt khác:

$$(*) \Rightarrow (b-1)^2 = 5 - (a+2)^2 = a^2 + 4a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{5} \leq a \leq -2 + \sqrt{5}$$

* Do đó $AM_{\max} \Leftrightarrow D(-2-\sqrt{5};1),\ AM_{\min} \Leftrightarrow C(-2+\sqrt{5};1)$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{C(-2-\sqrt{5};1),\ D(-2+\sqrt{5};1)}$

b. $d(M;\Delta)$ **nhỏ nhất và lớn nhất.**

- Ta có: $d(I;\Delta)=5\sqrt{2}>\sqrt{5}=R$. Do đó Δ không cắt đường tròn (C).

Cách 1: ***sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky***

* Gọi $M(a;b)\in(C)\Rightarrow(a+2)^2+(b-1)^2=5$ (*)

* Xét khoảng cách $d(M;\Delta)=\dfrac{|a+2b+10|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|(a+2)+2(b-1)+10|}{\sqrt{5}}$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\left[(a+2)+2(b-1)\right]^2\le(1+4).\left[(a+2)^2+(b-1)^2\right]=5.5=25$$

Suy ra: $-5\le(a+2)+2(b-1)\le5\Rightarrow5\le(a+2)+2(b-1)+10\le15$

Do đó: $\sqrt{5}\le\dfrac{(a+2)+2(b-1)+10}{\sqrt{5}}\le3\sqrt{5}\Leftrightarrow\boxed{\sqrt{5}\le d(M;\Delta)\le3\sqrt{5}}$

* Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{a+2}{1}=\dfrac{b-1}{2}\\(a+2)^2+(b-1)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}a=-3\\b=-1\end{cases}\ hay\ \begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}}$$

* Tính khoảng cách từ M đến Δ, ta kết luận $\begin{cases}d(M;\Delta)_{\max}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-1;3)\\d(M;\Delta)_{\min}=\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-3;-1)\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{\begin{cases}d(M;\Delta)_{\max}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-1;3)\\d(M;\Delta)_{\min}=\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-3;-1)\end{cases}}$

Cách 2: ***sử dụng lượng giác hóa tọa độ kết hợp Bất đẳng Bunyakovsky.***

* Đặt $\begin{cases}\dfrac{x+2}{\sqrt{5}}=\cos t\\\dfrac{y-1}{\sqrt{5}}=\sin t\end{cases}$

Phương trình đường tròn *tham số của đường tròn là*

$$\begin{cases}x=-2+\sqrt{5}\cos t\\y=1+\sqrt{5}\sin t\end{cases}(t\in[0;2\pi])$$

* $M\in(C)\Rightarrow M(-2+\sqrt{5}\cos t;1+\sqrt{5}\sin t)$.

Ta có: $d(M;\Delta)=\dfrac{|\sqrt{5}\cos t+2\sqrt{5}\sin t+10|}{\sqrt{5}}=\left|\cos t+2\sin t+2\sqrt{5}\right|$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$(\cos t+2\sin t)^2\le(1+4)(\cos^2 t+\sin^2 t)=5\Rightarrow-\sqrt{5}\le\cos t+2\sin t\le\sqrt{5}$ **.**

Do đó: $\sqrt{5}\le\cos t+2\sin t+2\sqrt{5}\le3\sqrt{5}\Leftrightarrow\boxed{\sqrt{5}\le d(M;\Delta)\le3\sqrt{5}}$

* Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\cos t}{1}=\frac{\sin t}{2}\Rightarrow\tan t=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin t=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos t=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin t=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$$

* Tính khoảng cách từ M đến Δ, ta kết luận $\begin{cases}d(M;\Delta)_{\max}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-1;3)\\ d(M;\Delta)_{\min}=\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-3;-1)\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{\begin{cases}d(M;\Delta)_{\max}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-1;3)\\ d(M;\Delta)_{\min}=\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-3;-1)\end{cases}}$

Cách 3: ***sử dụng tính chất hình học thuần túy.***

* Gọi PQ là đường kính vuông góc với đường thẳng Δ tại H. (P nằm giữa Q và H)
* Gọi K là hình chiếu của M trên (C) ta có: $PH\le MK\le QH$
* Suy ra $d(M;\Delta)_{\max}\Leftrightarrow M\equiv Q,\ d(M;\Delta)_{\min}\Leftrightarrow M\equiv P$
* Khi đó P, Q là giao điểm giữa đường PQ qua I vuông góc Δ và đường tròn (C) nên tọa độ P và Q thỏa

$$\begin{cases}PQ:2x-y+5=0\\ (C):(x+2)^2+(y-1)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3;y=-1\\ x=-1;y=3\end{array}\right.$$

* Tính khoảng cách từ M đến Δ, ta kết luận $\begin{cases}d(M;\Delta)_{\max}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-1;3)\\ d(M;\Delta)_{\min}=\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-3;-1)\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{\begin{cases}d(M;\Delta)_{\max}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-1;3)\\ d(M;\Delta)_{\min}=\sqrt{5}\Leftrightarrow M(-3;-1)\end{cases}}$

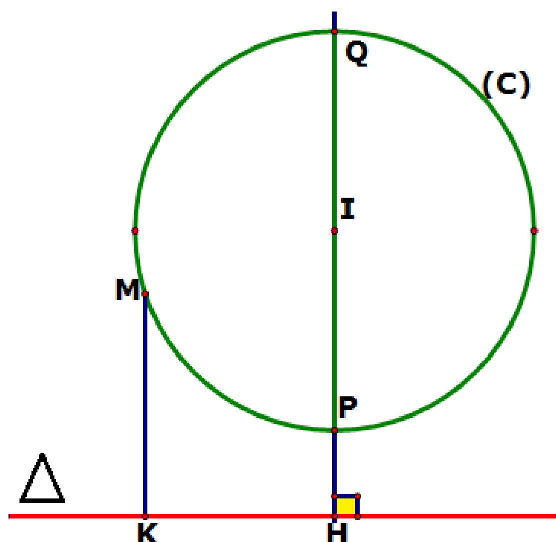
■ ***Lời bình:Cả 2 câu a và b chúng ta đều có thể sử dụng tính chất thuần túy hình học để giải và bao giờ cũng***

cho lời giải ngắn gọn, quá trình tính toán nhẹ nhàng.

Đối với câu b, ứng với cả 3 cách giải ta đều có thể tìm được cách giải tổng quát, tuy nhiên xét về mặt nào đó thì cách 3 vẫn là tốt nhất.

"Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ *và đường thẳng* Δ *có phương trình* $Ax+By+C=0$.

Tìm điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến Δ *đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. ".*



Sử dụng tính chất thuần túy hình học. (trường hợp Δ và (C) không cắt nhau)

Bước 1: Viết phương trình đường kính PQ qua I và vuông góc Δ.

Bước 2: Tìm giao điểm P và Q bằng cách giải hệ phương trình bao gồm PQ và (C).

Bước 3: Tính d[P; Δ **] và d[Q;** Δ **] và kết luận max – min.**

Lưu ý: *Với trường hợp "* Δ *tiếp xúc (C) tại P " thì P chính là điểm mà khoảng cách đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm Q là điểm đối xứng của P qua tâm I chính là điểm mà khoảng cách đạt giá trị lớn nhất*

Với trường hợp " Δ *cắt (C) tại M và N " thì M và N chính là hai điểm mà khoảng cách đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó để tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách ta viết phương trình trung trực của MN cắt (C) tại hai điểm P và Q và giải tương tự như các bước đã làm ở cách 3.*

BÀI TOÁN 5. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho điểm M(2; 1). Đường thẳng* Δ *qua M cắt Ox, Oy lần lượt tại* $A(a;0);B(0;b);(a>0;b>0)$. *Tìm a, b sao cho*

a. *Diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. $P=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

c. *OA + OB đạt giá trị nhỏ nhất.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. *Diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất*

Cách1: ***Vận dụng bất đẳng thức AM – GM.***

* Ta có AB là phương trình đoạn chắn 2 trục tọa độ nên có dạng: $\Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

* Lại có $M \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1; \quad (1)$. Mặt khác $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2} a.b$

* Theo bất đẳng thức AM–GM ta có:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \Leftrightarrow 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 8; \quad (2)$$

* Từ đó suy ra: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} ab \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (2) xảy ra dấu bằng.

Khi đó kết hợp với (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4; \\ b = 2. \end{cases}$

Cách 2: ***Vận dụng phương pháp hàm số.***

* Từ kết quả (1) ta rút ra: $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-2}$.

Theo đề bài ra, do $b > 0; a > 0 \Rightarrow a > 2$

* Từ đó: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} ab = \frac{a^2}{2a-4} = f(a); \quad (a > 2)$ có

$$f'(a) = \frac{2a.(2a-4) - 2a^2}{(2a-4)^2} = \frac{2a^2 - 8a}{(2a-4)^2}$$

* Cho $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 0 & (ktm) \\ a = 4 & (tm) \end{array}\right. (do\, a > 2)$

* Lại có: $\lim_{a \to 2^+} f(a) = \lim_{a \to 2^+} \frac{a^2}{2a-4} = +\infty$ và $\lim_{a \to +\infty} f(a) = \lim_{a \to +\infty} \frac{a^2}{2a-4} = +\infty$

Lập bảng biến thiên ta có:

a	2		4		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Suy ra: $\min(S_{OAB}) = \min\limits_{a>2} f\left(a\right) = 4 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 2$

b. $P = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Cách 1: ***Đổi biểu thức cần đạt Max – min và vận dụng tính chất hình học.***

* Gọi H là chân đường cao hạ từ O xuống cạnh AB.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{OM^2} = \text{hằng số.}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$. Tức là $OM \perp AB$

* Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OM} = 0 \\ M \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 5. \end{cases}$

Cách 2: ***Vận dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.***

* Ta có: $M \in \Delta \Rightarrow \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$

* Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có: $\left(2.\dfrac{1}{a} + 1.\dfrac{1}{b}\right)^2 \leq \left(4+1\right)\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) = 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geq \dfrac{1}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2a = b.

* Kết hợp với giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b = 2a \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 5. \end{cases}$

c. *OA + OB đạt giá trị nhỏ nhất.*

Tình huống1: ***Vận dụng sai bất đẳng thức AM – GM.***

* Ta có $OA + OB = a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $\left(3\right)$ (Theo bất đẳng thức AM–GM)

* Mặt khác $1 = \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 8$; $\left(4\right)$ (Theo bất đẳng thức AM–GM)

* Từ đó suy ra: $OA + OB \geq 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi cả hai đánh giá $\left(3\right);\left(4\right)$ cùng xảy ra dấu bằng.

* Điều đó tương đương với $\begin{cases} a = b \\ \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Dễ nhận thấy hệ trên vô nghiệm.

Như vậy lời giải là sai!

Tình huống 2: ***Vận dụng phương pháp hàm số.***

* Ta có $OA+OB=a+b$. Mặt khác $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow b=\frac{a}{a-2}$.

Do $a>0;b>0\Rightarrow a>2$

* Ta được $OA+OB=a+\frac{a}{a-2}=\frac{a^2-a}{a-2}=f\left(a\right)$ và

$$f'\left(a\right)=\frac{\left(2a-1\right)\left(a-2\right)-a^2+a}{\left(a-2\right)^2}=\frac{a^2-4a+2}{\left(a-2\right)^2}$$

* Ta có: $f'\left(a\right)=0\Leftrightarrow a^2-4a+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2-\sqrt{2}\left(ktm\right)\\a=2+\sqrt{2}\left(tm\right)\end{array}\right.$

$$\begin{cases}\lim\limits_{a\to 2^+}f\left(a\right)=\lim\limits_{a\to 2^+}\frac{a^2-a}{a-2}=+\infty\\\lim\limits_{a\to+\infty}f\left(a\right)=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a^2-a}{a-2}=+\infty\end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

a	2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	↘	$3+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Từ đó ta có kết luận: $\min\left(OA+OB\right)=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+\sqrt{2};\\b=\sqrt{2}+1.\end{cases}$

■ ***Lời bình:*** *Đến bài toán 5 này thì bạn đọc có vẻ đã tiếp nhận hầu hết các hướng giải quyết bài toán max – min. Mỗi cách giải đều có mặt ưu nhược điểm của nó. Đặc biệt trong lời giải câu c ở tình huống thứ 1 đã chỉ ra 1 số sai lầm mà học sinh hay mắc phải trong quá trình vận dụng các kỹ thuật trên. Theo bạn đọc do đâu có những sai lầm đó ?*

BÀI TOÁN 6. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho điểm A(3; 1), đường tròn* $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=25$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua A, cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho*

a. *Độ dài MN lớn nhất.*

b. *Độ dài MN nhỏ nhất.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

a. Độ dài MN lớn nhất

* Đường tròn (C) có tâm I(2; –3) và bán kính R = 5.

Ta có: $IA = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} < \sqrt{25} = R$ suy ra điểm A nằm bên trong đường tròn.

* Ta có MN là dây cung của đường tròn (C) mà $MN \le 2R$ do đó MN có độ dài lớn nhất khi MN là đường kính. Do đó M, N chính là giao điểm giữa IA và đường tròn (C)

* Đường thẳng IA qua I(2; –3) nhận $\overrightarrow{IA} = (1;4)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

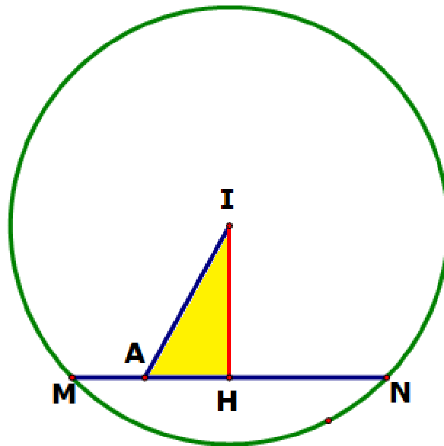
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{4} \Leftrightarrow 4x - y - 11 = 0$$

* Khi đó tọa độ M và N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{34+5\sqrt{17}}{17}, y = \dfrac{-51+20\sqrt{17}}{17} \\ x = \dfrac{34-5\sqrt{17}}{17}, y = \dfrac{-51-20\sqrt{17}}{17} \end{array} \right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là:

$$\boxed{M\left(\frac{34+5\sqrt{17}}{17}; \frac{-51+20\sqrt{17}}{17}\right), N\left(\frac{34-5\sqrt{17}}{17}; \frac{-51-20\sqrt{17}}{17}\right)}$$



b. Độ dài MN nhỏ nhất

* Gọi H là trung điểm MN. Ta có $IH \le IA$

* Mặt khác $MN = 2MN = 2\sqrt{IM^2 - IH^2} \ge 2\sqrt{R^2 - IA^2} = 4\sqrt{2}$.

* Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$H \equiv A$ *hay* $\Delta \perp IA : 4x - y - 11 = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta : x + 4y - 7 = 0}$

* Khi đó tọa độ M và N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=25\\ x+4y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{17+2\sqrt{34}}{17}, x=\dfrac{51-8\sqrt{34}}{17}\\ y=\dfrac{17-2\sqrt{34}}{17}, x=\dfrac{-51-8\sqrt{34}}{17}\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là:

$$M\left(\frac{17+2\sqrt{34}}{17};\frac{-51+8\sqrt{34}}{17}\right), N\left(\frac{17-2\sqrt{34}}{17};\frac{-51-8\sqrt{34}}{17}\right)$$

■ ***Lời bình:***

Với câu a, *ta thấy MN có độ dài lớn nhất là đường kính luôn đung với mọi trường hợp của điểm A nằm trong hay ngoài đường tròn.*

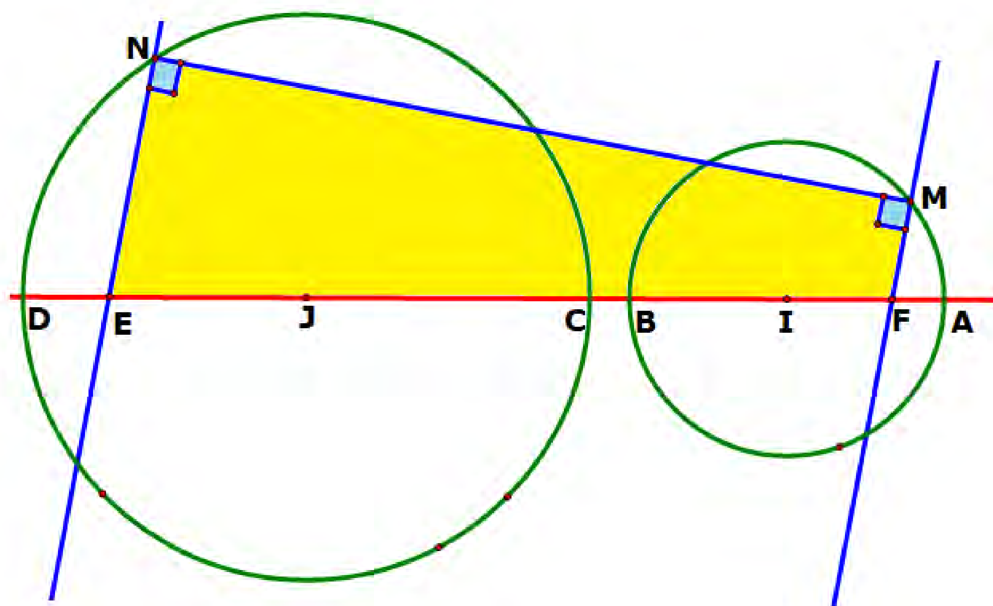
Với câu b, *kết quả chỉ đung cho trường hợp A nằm trong đường tròn. Với tinh huống này thì ta luôn có* $4\sqrt{2} \le MN \le 10$

BÀI TOÁN 7. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho hai đường tròn* $(C_1):(x-1)^2+y^2=1$ *và đường tròn* $(C_2):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. *Tìm tọa độ điểm* $M \in (C_1), N \in (C_2)$ *sao cho:*

a. *Độ dài MN lớn nhất.*

b. *Độ dài MN nhỏ nhất.*

☺ **Hướng dẫn giải.**



* Đường tròn (C1) có bán kính R = 1 và tâm I(1; 0), Đường tròn (C2) có bán kính r = 2 và tâm J(1; 4)

* Ta có: R + r = 3 < 4 = IJ suy ra 2 đường tròn nằm ngoài nhau.

* Giả sử IJ cắt (C1) và (C2) lần lượt tại A, B, C, D. Kẻ các đường vuông góc với MN tại M và N cắt IJ tại E và F.

Ta luôn có: $MN \le EF \le AD \Rightarrow MN_{max} = AD \Leftrightarrow \{M;N\} \in IJ$

* Ta có phương trình IJ qua I(1; 0) nhận $\overrightarrow{IJ} = (0;-4)$ làm VTCP nên có dạng là: ***IJ: x – 1 = 0***.

* Tương tự hạ MH và NK vuông góc với CD, ta có:

$$BC \le HK \le MN \Rightarrow MN_{min} = BC \Leftrightarrow MN = BC \Leftrightarrow \{M;N\} \in IJ$$

Khi đó A, B là giao điểm giữa IJ và (C) nên thỏa hệ:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=1 \\ x=1; y=-1 \end{array}\right.$$

Khi đó C, D là giao điểm giữa IJ và (C) nên thỏa hệ:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ (x-1)^2+(y-4)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=1; y=6 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\begin{cases} M(1;1),\ N(1;2) \Leftrightarrow \text{MN}_{min} \\ M(1;-1),\ N(1;6) \Leftrightarrow \text{MN}_{max} \end{cases}$

■ ***Lời bình:*** *Có thể thấy việc thiết lập các biểu thức cần đạt max – min không phải lúc nào cũng dễ dàng. Vì vậy sử dụng các tính chất thuần túy hình học giúp ta tiếp cận hướng giải rất nhiều.*

BÀI TOÁN 8. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho tọa độ điểm A(1; –3) và phương trình đường tròn* $(C):(x-2)^2+(y+6)^2=50$ *.Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho góc* $\angle AMI$ *lớn nhất với I là tâm của đường tròn (C).*

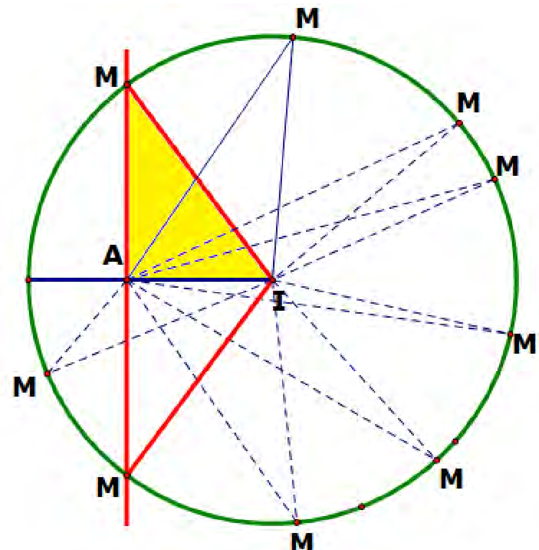
☺ **Hướng dẫn giải.**

Cách 1: ***Vận dụng bất đẳng thức AM – GM.***

* Đường tròn (C) có tâm I(2; –6) và bán kính $R = 5\sqrt{2}$. Ta có $AI^2 = 10$

* Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác AMI ta có:

$$\cos\angle AMI = \frac{AM^2+MI^2-AI^2}{2AM.MI}$$
$$= \frac{1}{40\sqrt{2}}\left(AM + \frac{40}{AM}\right)$$



* Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\cos\angle AMI \geq \frac{1}{10\sqrt{2}} 2\sqrt{40} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Do đó $\cos\angle AMI$ đạt min hay $\angle AMI$ đạt max khi và chỉ khi

$$AM = \frac{40}{AM} \Rightarrow AM^2 = 40$$

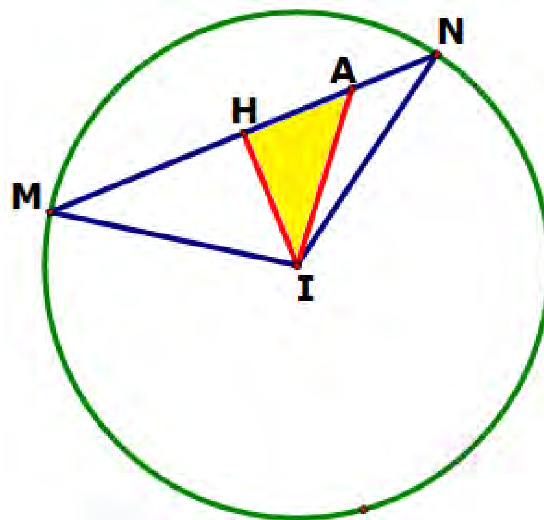
* Khi đó $AM^2 + AI^2 = 50 = R^2 = MI^2 \Rightarrow \Delta AMI \perp A$.

Ta có tọa độ M thỏa hệ: $\begin{cases} x-3y-10=0 \\ (x-2)^2+(y+6)^2=50 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7; y=-1 \\ x=-5; y=-5 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M(7;-1) \text{ hay } M(-5;-5)}$

Cách 2: ***Vận dụng tính chât hình học thuần túy.***

* Gọi N là giao điểm của AM với (C), H là trung điểm MN ta có IH vuông góc MN (định lý đường kính và dây cung).



* Suy ra $\sin\angle AMI = \frac{IH}{IM} \leq \frac{IA}{IM} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi MN vuông góc IA.

* AM qua A và nhận $\overrightarrow{AI} = (1;-3)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là: **x – 3y – 10 = 0**

Ta có tọa độ M thỏa hệ:

$$\begin{cases} x-3y-10=0 \\ (x-2)^2+(y+6)^2=50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7; y=-1 \\ x=-5; y=-5 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{M(7;-1) \text{ hay } M(-5;-5)}$

■ ***Lời bình:*** *Tương tự như các cách làm đã đề cập ở các bài toán trước, với bài toán này ta cần lưu ý:*

$$\boxed{\begin{cases} (\cos\alpha)_{\min} \Leftrightarrow \alpha_{\max}, (\sin\alpha)_{\min} \Leftrightarrow \alpha_{\min}. \\ -1 \leq \sin\alpha \leq 1, -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \end{cases}}$$

BÀI TOÁN 9. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho phương trình đường tròn* $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=5$ *và điểm A(3; 1). Viết phương trình đường thẳng* Δ *, cắt (C) tại M và N sao cho tam giác IMN có diện tích lớn nhất.*

☺ Hướng dẫn giải.

Cách1: ***Vận dụng bất đẳng thức lượng giác.***

* Đường tròn (C) có tâm I(2; –3) và bán kính R = 5. Ta có: $IA=\sqrt{17}<R$ suy ra điểm A nằm trong đường tròn (C).

* Ta có

$$S_{MIN}=\frac{1}{2}IM.IN.\sin\angle \text{MIN}=\frac{IM^2}{2}\sin\angle \text{MIN}=\frac{25}{2}\sin\angle \text{MIN}\le\frac{25}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin\angle \text{MIN}=1\Rightarrow\angle \text{MIN}=90^0\Rightarrow\Delta MIN\perp I$

* Gọi H là trung điểm MN, theo định lý đường kính và dây cung ta có: $IH\perp MN\Rightarrow IH=\frac{MN}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

* Đường thẳng Δ đi qua A có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(a;b),(a^2+b^2>0)$ có dạng: $a(x-3)+b(y-1)=0$.

Ta có:

$$IH=d(I;\Delta)\Leftrightarrow\frac{|-a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 23a^2-16ab-7b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\23a=-7b\end{array}\right.$$

Với a = b suy ra phương trình cần tìm là **x + y – 4 = 0**

Với 23a = – 7b suy ra phương trình cần tìm là **7x – 23y + 2 = 0**

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là là:

$$\boxed{x+y-4=0\ hay\ 7x-23y+2=0}$$

Cách 2: ***Vận dụng bất đẳng thức AM – GM .***

* Gọi H là trung điểm MN suy ra IH vuông góc MN và ta có:

$$S_{IMN}=2S_{IMN}=2.\frac{1}{2}IH.HM=IH\sqrt{25-IH^2}$$

* Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$S_{IMN}=IH\sqrt{25-IH^2}\le\frac{IH^2+25-IH^2}{2}=\frac{25}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $IH=\sqrt{25-IH^2}\Rightarrow IH=\frac{5}{\sqrt{2}}$

* Đến đây ta thực hiện như cách 1 và tìm được phương trình đường thẳng.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là là:

$$\boxed{x+y-4=0 \; hay \; 7x-23y+2=0}$$

Cách 3: ***Vận dụng phương pháp hàm số.***

* Tương tự cách 2, ta xây dựng được biểu thức chứa biến cần đạt max – min cho diện tích tam giác IMN là: $S_{IMN}=2S_{IMN}=2.\frac{1}{2}IH.HM=IH\sqrt{25-IH^2}$

* Đặt $IH=t>0$ và $IH\le IA=\sqrt{17}\Rightarrow \boxed{0<t\le\sqrt{17}}$.

  Do đó $S_{IMN}=t\sqrt{25-t^2}=f(t)$

* Ta có: $f'(t)=\sqrt{25-t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{25-t^2}}=\frac{25-2t^2}{\sqrt{25-t^2}}$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{\sqrt{2}}$

* Lập bảng biến thiên và ta chỉ ra S max khi và chỉ khi $t=\frac{5}{\sqrt{2}}=IH$. *(đến đây làm tương tự như cách 1)*

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là là:

$$\boxed{x+y-4=0 \; hay \; 7x-23y+2=0}$$

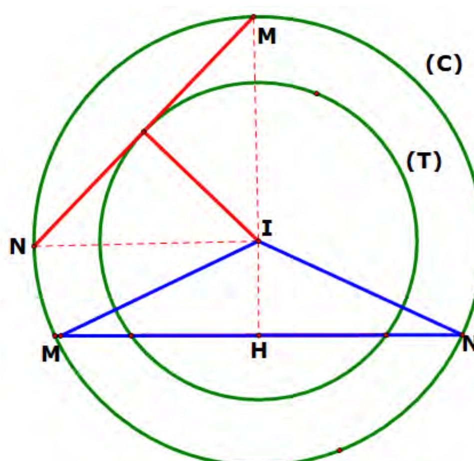
■ ***Lời bình:*** *Nếu điểm A nằm bên trong đường tròn (C) thì với 3 cách làm trên, có cách 1 và 2 phát huy thế mạnh vốn có của nó. Nhưng nếu giả sử điểm A lúc này có tọa độ A(3; –2) thì ta vẫn giải tốt. Ta thử kiểm chứng.*

* Đặt $IH=t>0$ và $IH\le IA=\sqrt{2}\Rightarrow \boxed{0<t\le\sqrt{2}}$.

  Do đó $S_{IMN}=t\sqrt{25-t^2}=f(t)$

* Ta có: $f'(t)=\sqrt{25-t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{25-t^2}}=\frac{25-2t^2}{\sqrt{25-t^2}}>0$ suy ra hàm số f(t) đạt max tại $t=\sqrt{2}$. Khi đó H trùng A hay đường thẳng $\Delta\perp IA\Rightarrow\Delta: x-y-5=0$.

  Để giải thích cho tình huống này, ta xét bài toán sau: "cho đường tròn (T) có tâm I bán kính $\frac{R}{\sqrt{2}}$, *đồng tâm và nằm trong (C) (I; R). Ta có:* $S=\frac{R^2}{2}\Leftrightarrow d(I;\Delta)=\frac{R}{\sqrt{2}}$ *hay AB là tiếp tuyến (T)*



Nếu $IA > \frac{R}{\sqrt{2}}$ *hay M nằm ngoài (T) thì 2 có 2 đường thẳng* Δ *là tiếp tuyến với (T) kẻ qua A.*

Nếu $IA \le \frac{R}{\sqrt{2}}$ *hay M thuộc (T) hoặc M nằm trong (T) thì khi đó có đúng 1 đường thẳng* Δ *thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó* $\Delta \perp IA$.

BÀI TOÁN 10. *Trong mặt phẳng với hệ toa độ Oxy, cho đường elip* $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ *và điểm* $M\left(-1; \frac{-3}{2}\right)$. *A và B là hai điểm thuộc (E) đối xứng nhau qua M. Tìm tọa độ C nằm trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.*

☺ **Hướng dẫn giải.**

- Giả sử $A(x; y)$. Do A và B đối xứng qua M nên ta có $B(-2-x; -3-y)$.
- Lại có: $\begin{cases} A \in (E) \\ B \in (E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4; y = 0 \\ x = 2; y = -3 \end{array}\right.$.
- Giả sử $A(-4;0),\ B(2;-3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{5},\ AB: x + 2y + 4 = 0$
- Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} d[C; AB].AB$. Do đó $\left(S_{ABC}\right)_{max} \Leftrightarrow \left(d[C; AB]\right)_{\max}$

Cách 1: ***Vận dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.***

* Giả sử tọa độ điểm C(a; b) là điểm cần tìm. Ta có $d[C; AB] = \frac{|a + 2b + 4|}{\sqrt{5}}$

Nên $\left(d[C; AB]\right)_{\max} \Leftrightarrow |a + 2b + 4|_{\max} \Leftrightarrow (a + 2b)_{\max},\ a + 2b > 0$

* Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\left(4\frac{a}{4} + 4\sqrt{3}\frac{b}{2\sqrt{3}}\right)^2 \le (16 + 48)\left(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{12}\right) = 64$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a}{16} = \frac{b}{24} \\ a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(2;3)} \in (E)$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{C(2;3)}$

Cách 2: ***Lượng giác hóa tọa độ điểm C và vận dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.***

* Ta có $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ *có dạng tham số là* $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sqrt{3}\sin t \end{cases} (t \in R)$.

Do $C \in (E) \Rightarrow C(4\cos t; 2\sqrt{3}\sin t)$

* Ta có $d[C; AB] = \dfrac{|4\cos t + 4\sqrt{3}\sin t + 4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}|\cos t + \sqrt{3}\sin t + 1|$

Nên $\left(d[C; AB]\right)_{\max} \Leftrightarrow |\cos t + \sqrt{3}\sin t + 1|_{\max}$

$\Leftrightarrow (\cos t + \sqrt{3}\sin t)_{\max}, \cos t + \sqrt{3}\sin t > 0$

* Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$\left(\cos t + \sqrt{3}\sin t\right)^2 \le (1+3)\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{\sin t}{\sqrt{3}} \\ \cos t + \sqrt{3}\sin t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{1}{2} \\ \sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(2;3)}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{C(2;3)}$

Cách 3: ***Vận dụng ý nghĩa hình học – Nhận biết tọa độ C bằng phương pháp tiếp tuyến.***

* Ta có C là một tiếp điểm của tiếp tuyến d của (E) và d song song với AB:
  x + 2y + 4 = 0
  Do đó đường thẳng d có dạng: x + 2y – m = 0.
* Điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc với (E) là:
  $1^2.16 + 2^2.12 = m^2 \Leftrightarrow m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 8$.
* Với $m = 8 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow C = d \cap (E) \Rightarrow \mathrm{C}(2;3) \Rightarrow \mathrm{d(C;AB)} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$
* Với $m = -8 \Rightarrow x + 2y + 8 = 0 \Rightarrow C = d \cap (E) \Rightarrow \mathrm{C}(-2;-3) \Rightarrow \mathrm{d(C;AB)} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm thỏa là: $\boxed{C(2;3)}$

■ ***Lời bình:*** *Việc vận dụng bất đẳng thức của đại số, phương pháp hàm số của giải tích cùng với các tính chất hình học thuần túy đã giúp cho các bài toán Max – min trở nên hấp dẫn và gần gũi hơn với người làm. Sau bài toán này sẽ đến phần bài tập chọn lọc – tự luyện có lời giải để bạn đọc củng cố và rèn luyện hơn.*

BÀI TẬP CHỌN LỌC – TỰ LUYỆN CHỦ ĐỀ 5

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có tọa độ trọng tâm G(0; 4) và C(–2; –4). Biết trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường d: x + y – 2 = 0. Tìm M để độ dài AB ***ngắn nhất***.

Gợi ý: ** Bài toán 5 này thuộc mặt phẳng Oxy, ta sẽ tìm tọa độ M theo hướng lập biểu thức của đường AB.*

+ Biểu diễn tọa độ M theo đường d ⇒ tọa độ M

+ Áp dụng CT trung điểm BC và trọng tâm G, tính tọa độ A và B theo M

+ Lập được biểu thức ⇒ dùng phương pháp Hàm số hoặc bất đẳng thức quen thuộc.

☺ **Hướng dẫn giải.**

- Ta có: M ∈ d ⇒ M(m; 2 –m)

  Do M là trung điểm BC ⇒ $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_C \\ y_B = 2y_M - y_C \end{cases}$ ⇒**B(2m+ 2; 8 – 2m)**

- Lại có G là trọng tâm ΔABC ⇒ $\begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C \end{cases}$ ⇒**A(–2m; 8 + 2m)**

  Ta có $AB^2 = (2m + 2 + 2m)^2 + (4m)^2 = 32m^2 + 16m + 4$

- Xét $f(m) = 32m^2 + 16m + 4$ với m ∈ R, f'(m) = 64m + 16

  Cho f'(m) = 0 ⇒ $m = \frac{-1}{4}$, dựa vào bảng biến thiên, ta có $m = \frac{-1}{4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $\boxed{M\left(\frac{-1}{4};\frac{9}{4}\right)}$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d_1: 3x + y + 5 = 0$, $d_2: x - 3y + 5 = 0$ và điểm I(1; –2). Gọi A là giao điểm giữa d_1, d_2. Lập phương trình đường Δ qua I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại B và C sao cho $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ đạt ***giá trị nhỏ nhất***.

Gợi ý: *Ta thấy biểu thức mà đề yêu cầu có dáng dấp tương tự một công thức đã học trong chương trình đó là* $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

+ Ta hy vọng sẽ chuyển biểu thức lại thành $\frac{1}{AH^2}$*, để làm được như vậy ta cần c/m* $d_1 \perp d_2$

+ Do đường Δ qua I, mà AH lại là đường cao của ΔABC nên AH ≤ AI

⇒ $AH_{max} = AI$

+ Như vậy đường Δ lúc này qua I và nhận AI làm vectơ pháp tuyến.

☺ **Hướng dẫn giải.**

- Ta có $A = d_1 \cap d_2$ ⇒ A(–2; 1) và d_1, d_2 lần lượt có vectơ pháp tuyến là

$\overrightarrow{n_1} = (3; 1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1; -3)$.

- Xét $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2 \Rightarrow \Delta ABC \perp A$. Gọi H là hình chiếu của A lên BC

  $\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

- Vậy để $\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right)_{min} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{AH^2}\right)_{min} \Leftrightarrow AH_{max}$.

  Ta lại có $AH \le AI \Rightarrow AH_{max} \Leftrightarrow AH = AI \Leftrightarrow H \equiv I$.

- Do đó đường Δ qua I(1; –2) nhận $\overrightarrow{AI} = (3; -3)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng là:

  Δ: $3(x - 1) - 3(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow$ **Δ: x – y – 3 = 0**

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{x - y - 3 = 0}$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x\sqrt{2} + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ và phương trình đường tròn (C) là $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Chứng minh rằng đường Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B với mọi giá trị m. Tìm m để **diện tích tam giác IAB lớn nhất** và tính giá trị đó ?

Gợi ý: *Trước tiên ta cần nhớ lại vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn trong mặt phẳng Oxy*

+ Δ không cắt (C) ⇒ d[I;(Δ)] >R.

+ Δ tiếp xúc (C) (Δ cắt (C) tại một điểm) ⇒ d[I;(Δ)] = R.

+ Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt ⇒ d[I;(Δ)] < R.

Sau khi tìm được điều kiện của m?,

Ta sử dụng công thức $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}$ IA.IBsinBIA

Từ đây ta thấy rằng $S_{max} \Leftrightarrow sinBIA_{max} \Rightarrow$ *sinBIA = 1⇒ΔIAB là tam giác vuông cân tại I*

☺ Hướng dẫn giải.

- (C) có tâm I(1; –2) và bán kính R = 3. Xét $d[I;\Delta] = \frac{|1-2m|}{\sqrt{m^2+2}}$

- Để Δ luôn cắt (C) tại hai điểm A,B $\Rightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} < R = 3 \Rightarrow 5m^2 + 4m + 17 > 0$ (luôn đúng với mọi m)

- Ta có $S_{\Delta IBA} = \frac{1}{2}$ IA.IB.sinAIB $\le \frac{1}{2}R^2 = \frac{9}{2}$ (vì sinAIB ≤ 1)

- Suy ra $S_{\Delta AIBmax} \Leftrightarrow \mathbf{S_{\Delta IAB} = \frac{9}{2}} \Rightarrow \Delta AIB$ vuông cân
- Vậy khi đó $d[I;(\Delta)] = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} \Rightarrow \mathbf{m = -4.}$

Vậy giá trị m cần tìm là $\boxed{m = -4}$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm E(–1;0) và đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-2)^2=36$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm E cắt (C) theo dây cung MN có độ dài ngắn nhất.

☺ **Hướng dẫn giải.**

- $(C):(x-4)^2+(y-2)^2=36 \Rightarrow I(4;2), R=6$ và ta có

  $IE=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}<\sqrt{36}=R$ suy ra điểm E nằm trong đường tròn (C).
- Gọi d là đường thẳng qua E(–1;0) có véc tơ chỉ phương

  $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d:\begin{cases} x=-1+at \\ y=bt \end{cases} (t\in R)$
- Đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm M,N có tọa độ là nghiệm của hệ :

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+at \\ y=bt \\ (x-4)^2+(y-2)^2=36 \end{cases} \Rightarrow (a^2+b^2)t^2-2(5a+2b)t-7=0. \ (1)$$
- Gọi $\begin{cases} M(-1+at;bt) \\ N(-1+at';bt') \end{cases}$ với t và t' là 2 nghiệm của (1).
- Khi đó độ dài MN $=\dfrac{2\sqrt{18a^2+20ab+11b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

  $$=\sqrt{\frac{18+20\left(\frac{b}{a}\right)+11\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=2\sqrt{\frac{18+20t+11t^2}{1+t^2}} \text{ với}\left(t=\frac{b}{a}\right)$$
- Xét hàm số f(t)=$\dfrac{18+20t+11t^2}{1+t^2}$. Tính đạo hàm f'(t) = 0 , lập bảng biến thiên suy ra GTLN của t , từ đó suy ra t (tức là suy ra tỷ số a/b)). Tuy nhiên cách này dài.

- Ta sử dụng tính chất dây cung ở lớp 9 : Khoảng cách từ tâm đến dây cung càng nhỏ thì dây cung càng lớn.
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d bất kỳ qua E(–1;0).
- Xét tam giác vuông HIE (I là đỉnh) ta luôn có :

  $IH^2 = IE^2 - HE^2 \le IE^2 \Rightarrow IH \le IE$.

  Do đó IH lớn nhất khi HE=0 có nghĩa là H trùng với E . Khi đó d cắt (C) theo dây cung nhỏ nhất .

  Lúc này d là đường thẳng qua E và vuông góc với IE cho nên d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IE} = (5;2)$, do vậy d: 5(x+1)+2y=0 hay : 5x+2y+5=0 .

  Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{5x+2y+5=0}$

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: 3x – y + 5 = 0 và đường tròn $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Tìm điểm M thuộc (C) và điểm N thuộc d sao cho MN có độ dài nhỏ nhất ?

☺ **Hướng dẫn giải.**

- (C) : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1 \Rightarrow I(-1;3), R = 1$
- Gọi d' //d thì d': 3x–y+m=0 . d' tiếp xúc với (C) tại M (M là điểm cách d nhỏ nhất) , khi đó :

  $$h(I;d') = R \Leftrightarrow \frac{|-3-3+m|}{\sqrt{10}} = 1 \Leftrightarrow |m-6| = \sqrt{10}$$

  $$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6+\sqrt{10} \to d': 3x - y + 6 + \sqrt{10} = 0 \\ m = 6-\sqrt{10} \to d': 3x - y + 6 - \sqrt{10} = 0 \end{array}\right.$$

- Giả sử N' thuộc d ta luôn có : $M_2N' \ge M_2N$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi N' trùng với N .

  Vậy ta chỉ cần lập đường thẳng Δ qua I(–1;3) và vuông góc với d suy ra đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3-t \end{cases}$. Khi đó Δ cắt d' tại 2 điểm : $M_1\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - 1; 3 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, và $M_2\left(-1 - \frac{3}{\sqrt{10}}; 3 + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

  Tương tự Δ cắt d tại N có tọa độ là nghiệm : $N\left(-\frac{7}{10}; \frac{29}{10}\right)$

- Ta chọn M bằng cách tính M_1N, M_2N , sau đó so sánh : Nếu $M_1N > M_2N$ thì M là M_2 . Còn $M_1N < M_2N$ thì M là M_1 .

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(C):(x+1)^2+(y-3)^2=1$ và điểm $M\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. Tìm trên (C) điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất?

☺ **Hướng dẫn giải.**

- (C) viết dưới dạng tham số :

$$\begin{cases}x=-1+\sin t\\ y=3+\cos t\end{cases}(t\in[0;2\pi])\Rightarrow N\in(C)\Rightarrow N(-1+\sin t;3+\cos t)$$

$$MN=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}+\sin t\right)^2+\left(-\frac{8}{5}+\cos t\right)^2}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t-\frac{12}{5}\sin t-\frac{16}{5}\cos t+4}$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{-\frac{12}{5}\sin t-\frac{16}{5}\cos t+5}=\sqrt{5-4\left(\frac{12}{20}\sin t+\frac{16}{20}\cos t\right)}(*)$$. Vì :

$$\left(\frac{12}{20}\right)^2+\left(\frac{16}{20}\right)^2=1,$$

$$\Rightarrow \cos\varphi=\frac{12}{20}=\frac{3}{5};\sin\varphi=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$ thì (*) trở thành :

$$\sqrt{5-4\sin(t+\varphi)}\le\sqrt{5-4}=1$$

- Dấu đẳng thức xảy ra khi : $\sin(t+\varphi)=1\Leftrightarrow t=-\varphi+\frac{\pi}{2}+k2\pi$
- Do vậy : $\sin t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=-1+\sin t=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$
- Tương tự :

$$\cos t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{4}{5}\Rightarrow y=3+\cos t=3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5}\Rightarrow N\left(-\frac{2}{5};\frac{19}{5}\right)$$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng (Δ) có phương trình: $2x-3y-1=0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm toạ độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

☺ **Hướng dẫn giải.**

- Đường tròn (C) có tâm I(–1; 2), bán kính R = $\sqrt{13}$.

- Ta có: $d_{(I,\Delta)} = \dfrac{9}{\sqrt{13}} < R$;

  Vậy đường thẳng (Δ) cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt.

- Gọi M là điểm nằm trên (C), ta có $S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{2}AB.d_{(M,\Delta)}$.

  Trong đó AB không đổi nên $S_{\Delta ABM}$ lớn nhất khi $d_{(M,\Delta)}$ lớn nhất.

- Gọi d đi qua tâm I và vuông góc với (Δ). Phương trình đường thẳng d là 3x + 2y – 1 = 0
- Gọi P, Q là giao điểm của đường thẳng d vời đường tròn (C).

  Toạ độ P, Q là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

  ⇒ P(1; –1); Q(–3; 5)

- Ta có $d_{(P,\Delta)} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $d_{(Q,\Delta)} = \dfrac{22}{\sqrt{13}}$ Ta thấy $d_{(M,\Delta)}$ lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với Q.
- Vậy tọa độ điểm M (–3; 5) hay Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với AM ; PT đường thẳng Δ : x + y – 2 = 0.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình x + 2y – 3 = 0 và hai điểm A(1;0),B(3;–4). Hãy tìm trên đường thẳng Δ một điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right|$ là nhỏ nhất

☺ **Hướng dẫn giải.**

- M $\in \Delta \Rightarrow M(3-2t;t)$ có nên ta có :

  $\overrightarrow{MA} = (2t-2;-t), 3\overrightarrow{MB} = (6t;-3t-12)$. Suy ra tọa độ của

  $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (8t;-4t-14)$

  $\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(8t)^2 + (4t+14)^2} = \sqrt{80t^2 + 112t + 196}$.

- Xét g(t) = $80t^2 + 112t + 196$, tính đạo hàm g'(t) = 160t + 112.
- g'(t) = 0 khi $t = -\dfrac{112}{80} = -\dfrac{51}{80} \Leftrightarrow g\left(-\dfrac{51}{80}\right) = \dfrac{15.169}{80} = 196$.

  Lập bảng biến thiên và ta kết luận

- min $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{196} = 14$, đạt được khi t=$-\dfrac{51}{80}$ và $M\left(-\dfrac{131}{40};-\dfrac{51}{80}\right)$

Chương 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXY VÀO VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC THUẦN TÚY.

Hình học trong mặt phẳng tọa độ Oxy hay còn gọi là hệ tọa độ Decartes (Nhà triết học kiêm vật lí và toán học nổi tiếng của Pháp đã phát mnh ra phương pháp tọa độ), đã đánh dấu cho sự mở đầu của một cuộc cách mạng trong toán học nói chung và hình học nói riêng. Với phương pháp tọa độ, mỗi thứ hình học gắn với một cấu trúc như trường số thực, trường số phức, trường Galois, ... và như vậy chúng ta sẽ có nhiều thứ hình học khác nhau. Việc làm này đã giúp cho hình học thoát ra khỏi lối tư duy cụ thể, trực quan nhằm đạt tới những đỉnh cao của sự khái quát và trừu tượng của Toán học trong nhiều lĩnh vực.

Ở hình học tọa độ Oxy, hình học thuần túy luôn giữ một vai trò quan trọng vì ta không thể tách rời khỏi các khái niệm, định nghĩa, tính chất, định lý đã xây dựng được từ chúng khi giải các bài toán hình học tọa độ. Vậy ngược lại khi "soi sáng" lại các phép chứng minh của hình học thuần túy, thì hình học tọa độ cũng giữ một vai trò vô cùng quan trọng.

Có những bài toán hình học phẳng khá là "kinh khủng khiếp", gây không ít khó khăn, trăn trở cho người làm toán. Vì thế việc tìm hiểu một cách tường minh (ở một mức độ tương đối) là một giải pháp khả dĩ có thể kỳ vọng của tác giả. Sử dụng công cụ tọa độ là giải pháp được đề cập ngay trong chương này nhưng trước đó là những câu hỏi rất "tự nhiên" được đặt ra là:

Dựa vào dấu hiệu nào của bài toán mà ta nghi đến việc sử dụng công cụ tọa độ ?

Với mỗi một bài toán, việc xây dựng hệ trục tọa độ được hình thành qua những công đoạn nào ? (tất là chúng ta quan tâm đến cách thức xây dựng chúng).

Liệu rằng có một nguyên tắc chung trong việc vận dụng công cụ tọa độ khi giải các bài toán trên không ?

Với kết cấu và yêu cầu chung của chương trình iện nay, việc giải toán bằng công cụ tọa độ được đặc biệt nhấn mạnh.

CHỦ ĐỀ 3.1:

CÁC NGUYÊN TẮC CẦN LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG BẰNG CÔNG CỤ TỌA ĐỘ.

3.1.1 Chọn hệ trục tọa độ: gốc tọa độ, trục tọa độ thường gắn liền với điểm và đường đặc biệt của bài toán như: “*tâm đường tròn, đỉnh góc vuông, trung điểm đoạn thẳng, chân đường cao, v.v..*”

3.1.2 Chuyển đổi ngôn ngữ từ yếu tố hình học “thuần túy” sang ngôn ngữ hình học tọa độ:

_ Chuẩn hóa độ dài các đoạn thẳng và đơn vị trục.

_ Từ đó xác định tọa độ các điểm và phương trình các đường, theo hướng hạn chế đến mức thấp nhất việc sử dụng các tham số, điều chỉnh giá trị của các tham số để nhận được những “tọa độ đẹp” giúp các phép toán trở nên đơn giản hơn.

3.1.3 Khai thác các tính chất và phép toán liên quan đến vecto và tọa độ như:

_ Điều kiện theo tọa độ để hai vecto vuông góc, cùng phương, v,v…

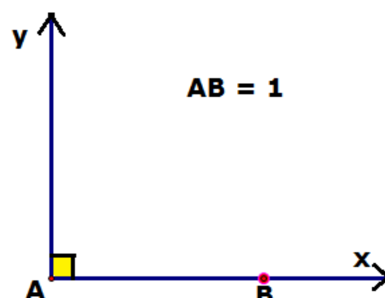
_ Tính khoảng cách, tính số đo góc dựa theo tọa độ,. v,v…

_ Lập phương trình các đường thẳng, đường tròn, đường conic theo các điểm đã được tọa độ hóa.

3.1.4 Hình thành hệ trục tọa độ trong mặt phẳng như thế nào ?

Bài toán có đơn giản hay không, phần lớn phụ thuộc vào việc hình thành hệ trục tọa độ và đơn vị trục. Sau đây là cách hệ chọn hệ trục tọa độ tương ứng với những loại hình đơn giản, thường gặp.

3.1.4.1 Đoạn thẳng AB cố định:

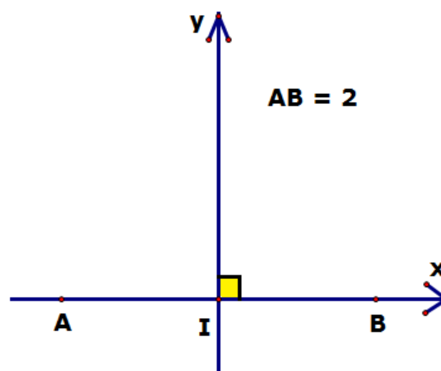


Ta có thể dựng hệ trục tọa độ tại điểm A như hình vẽ và đồng thời chuẩn hóa một số đại lượng:

Đặt AB = 1. Dễ dàng suy ra tọa độ điểm A(0; 0) và B(1; 0) (B thuộc tia Ax).

Hay ta cũng có thể chọn trung điểm của AB làm hệ trục tọa độ. Khi đó hệ tọa độ sẽ là Ixy như hình vẽ.

Đặt AB = 2 thì IA = IB = 2. Dễ dàng suy ra tọa độ I(0; 0),A(–1;0), B(1;0).



Lưu ý: *ta cũng có thể chọn dựng hệ trục ở B (Bxy) hoặc bất kì điểm nào nằm trên đường thẳng AB (điều này phụ thuộc và giả thiết của bài toán dẫn dắt đi theo hướng nào ?). Trên*

đây chỉ là 2 cách khả dĩ thường gặp khi xử lý tinh huống trên.

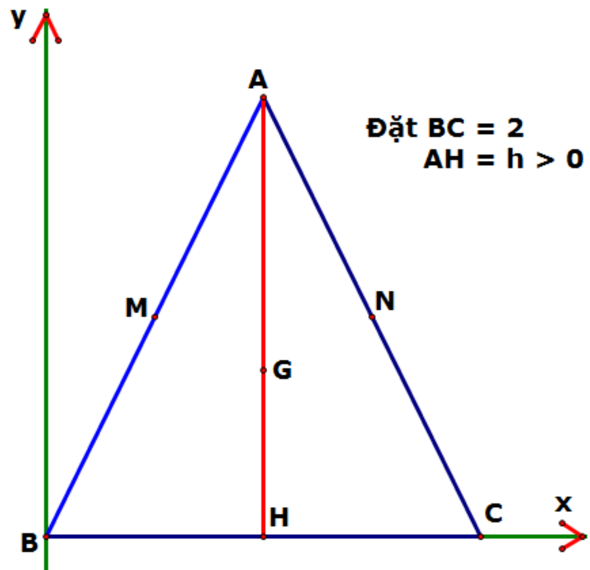
3.1.4.2 Tam giác cân.

Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm BC, AB, AC và G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có thể dựng hệ trục tọa độ tại B (Bxy), chuẩn hóa bằng cách đặt BC = 2, AH = h> 0

Khi đó tọa độ các điểm là:

$\boxed{B(0;0), A(1;h), C(2;0), H(1;0)}$.

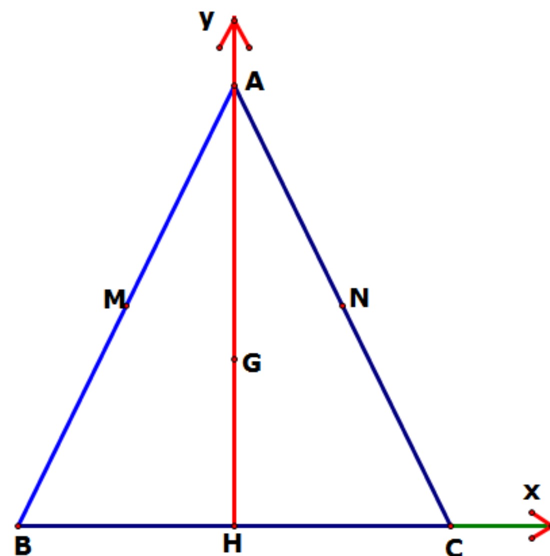


Đối với các bài toán có hình dạng là tam giác cân, ta cũng thường hạ đường cao từ các đỉnh cân đến cạnh đối diện. Ở đây ta cũng có thể dựng hệ trục Hxy như hình vẽ.

Khi đó đặt BC = 2, AH = h > 0.

Ta có tọa độ các điểm là:

$\boxed{H(0;0), A(0;h), C(1;0), B(-1;0)}$



Lưu ý: *ta vẫn có thể đặt hệ trục tọa độ tại các điểm khác trên đây chỉ là 2 cách đặt thông thường mà ta hay gặp.*

*Với trường hợp là **tam giác đều**thì ta có thể dựng tại 3 vị trí là trung điểm của 3 cạnh của tam giác hoặc tại 3 đỉnh của tam giác. Tương tự với trường hợp **tam giác vuông cân**.*

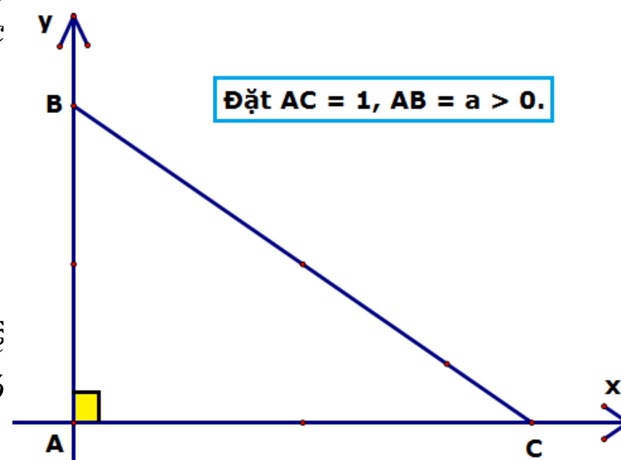
3.1.4.3 Tam giác vuông.

*Trong trường hợp này ta có thể **dựng trực tiếp tại góc vuông của tamgiác** (dựng hệ trục Axy như hình vẽ).*

Khi đó nếu ta chuẩn hóa đặt AC = 1, AB = a > 0 thì tọa độ của các điểm sẽ là:

$\boxed{A(0;0), B(0;a), C(1;0)}$

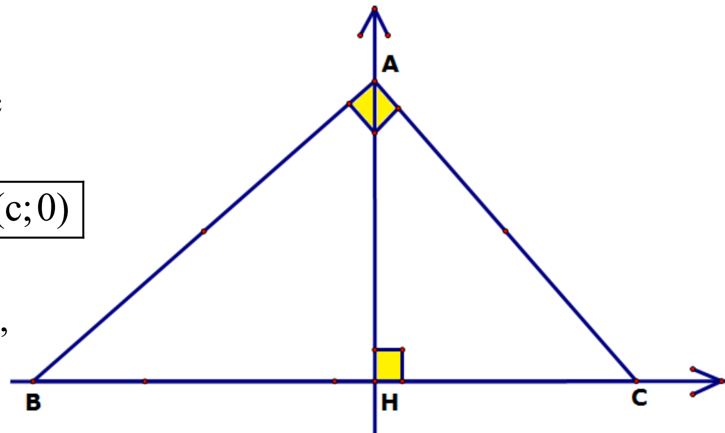
Đặc biệt nếu trong giả thiết của đề có có thêm đường cao AH thì ta có



*thể **dựng tại chân đường cao của tam giác**. Cụ thể ta dựng hệ trục Hxy như hình vẽ dưới đây*

Khi đó, nếu ta chuẩn hóa đặt AH = 1, BH = b, HC = c (b, c > 0) thì tọa độ các điểm là:

$H(0;0),\ A(0;1),\ B(-b;0),\ C(c;0)$



Hay ta có thể chuẩn hóa đặt AH = 1, BH = b, HC = kb (b > 0, $k \neq 0, k \in R$), thì ta được:

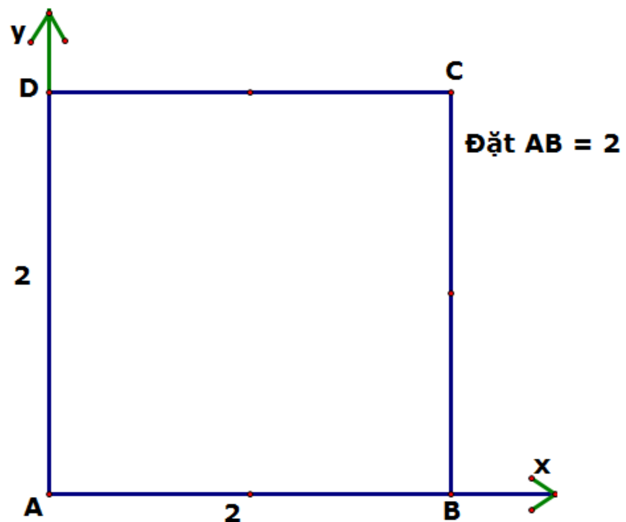
$H(0;0),\ A(0;1),\ B(-b;0),\ C(kb;0)$

3.1.4.4 Hình vuông.

Cách 1: Trong trường hợp này ta có thể ***dựng hệ trục tọa độ tại các đỉnh vuông của hình*** (cụ thể trong hình dưới đây ta dựng hệ trục Axy) và chuẩn hóa AB = 2.

Khi đó tọa độ các điểm sẽ là:

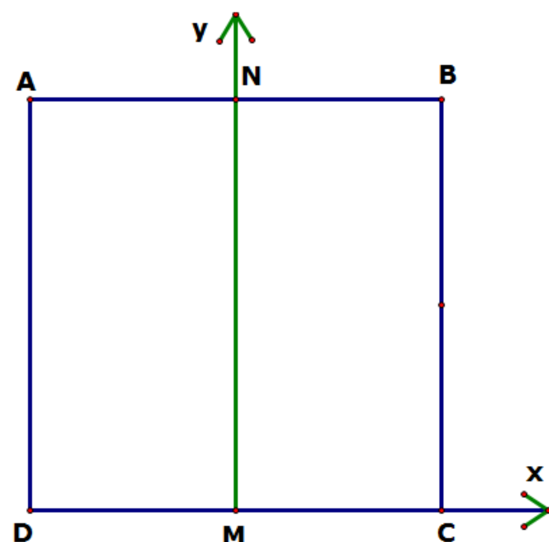
$A(0;0),\ B(2;0),\ C(2;2),\ D(0;2)$



Cách 2: Tương tự ta cũng có thể ***dựng tại trung điểm của các cạnh hình vuông***. Cụ thể trong hình vẽ dưới đây, ta dựng hệ trục Mxy và chuẩn hóa đặt cạnh CD = 2.

Khi đó tọa độ các điểm sẽ là:

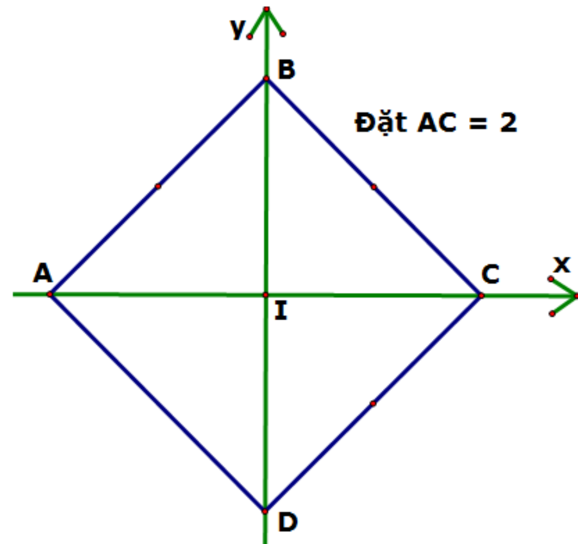
$M(0;0),\ C(1;0),\ D(-1;0),$
$A(-1;2),\ B(1;2)$



Cách 3: Ngoài ra ta cũng có thể ***chọn giao điểm hai đường chéo của hình vuông làm nơi đặt hệ trục tọa độ***. Cụ thể trong hình vẽ dưới đây, ta dựng hệ trục Ixy và chuẩn hóa đặt AC = BD = 2.

Khi đó tọa độ các điểm sẽ là:

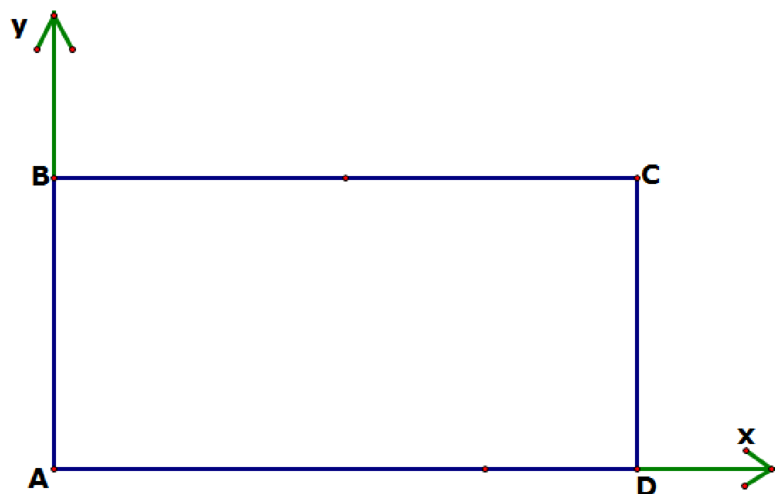
$$\boxed{I(0;0),\ A(-1;0),\ C(1;0),\ B(0;1),\ D(0;-1)}$$



Lưu ý: *ta vẫn có thể đặt hệ trục tọa độ tại các điểm khác trên đây chỉ là 3 cách đặt thông thường mà ta hay gặp.*

3.1.4.5 Hình chữ nhật.

Tương tự như cách dựng hệ trục cho hình vuông, ta có thể ***chọn gốc tọa độ tại các đỉnh của hình chữ nhật (hay 2 cạnh liên tiếp của hình chữ nhật tương ứng với hai trục tọa độ***, cụ thể trong hình vẽ dưới đây ta có thể dựng hệ trục tại A (Axy như hình vẽ).



Vấn đề đặt ra là với một cách chuẩn hóa đặt độ dài tương ứng ta sẽ có được rất nhiều tọa độ mới của các điểm, cụ thể:

Nếu Đặt AB = a, AD = b (a, b > 0, $a \neq b$) thì khi đó ta có:

$$\boxed{A(0;0),\ B(0;a),\ C(a;b),\ D(0;b)}$$

Nếu Đặt AD = a, AB = ka (a > 0, $k \neq 0, k \in R$) thì khi đó ta có:

$$\boxed{A(0;0),\ B(0;ka),\ C(a;ka),\ D(0;ka)}$$

Nếu Đặt AD = a, AB = 1 (a > 0) thì khi đó ta có:

$$\boxed{A(0;0),\ B(0;1),\ C(a;1),\ D(0;1)}$$

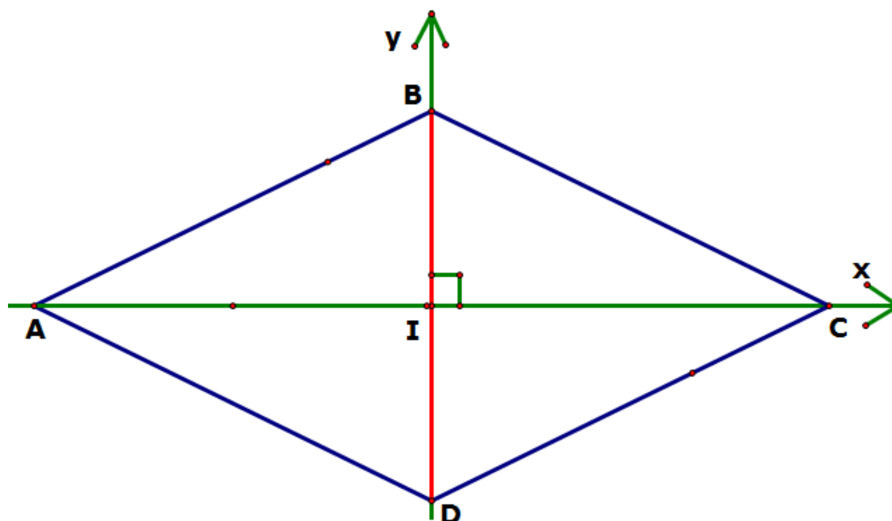
Lưu ý: *không mất tính tổng quát, ta đặt chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 2a, 2b (a > b > 0). Khi đó ta nhận được nhiều kết quả đẹp như:*

Tâm của hình chữ nhật I(a; b) và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình nhật khi đó là:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2}$$

3.1.4.6 Hình thoi.

Với hình thoi, thì ta có thể có những cách dựng sau:

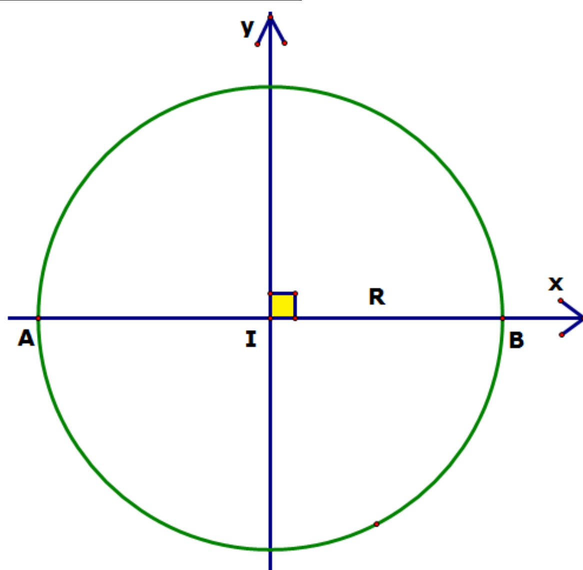


Dựng hệ trục Ixy như hình vẽ (***I là giao điểm 2 đường chéo AC và BD của hình thoi***).

Nếu chuẩn hóa, đặt AC = 2 và BD = 2a (a > 0) thì tọa độ các điểm là:

$$\boxed{I(0;0), A(-1;0),\ B(0;\text{a}),\ C(1;0),\ D(0;-\text{a})}$$

3.1.4.7 Đường tròn.



Ta có thể chọn một đường kinh bất kì của đường tròn để làm thành 1 trục tọa độ. Khi đó tùy bài toán thiết lập ta có thể thể chuẩn hóa R = 1 để tiện cho việc tính toán.

Ta có tọa độ các điểm là:

$A(-R;0),\ I(0;0), B(R;0)$

và phương trình đường tròn là:

$$\boxed{(C): x^2+y^2=R^2}$$

Với biến đổi $\boxed{(C): \left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2=1}$.

Ta đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{R} = \cos\varphi \\ \dfrac{y}{R} = \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \left(\varphi \in [0; 2\pi]\right)$

Khi đó ta có: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Nên mọi điểm M thuộc đường tròn sẽ có tọa độ là:

$$\forall M \in (C) \Rightarrow \mathrm{M}\left(R\cos\varphi; R\sin\varphi\right), \left(\varphi \in [0; 2\pi],\ R > 0\right)$$

3.1.4.8 Lưu ý các loại hình khác.

_ *Một số các loại hình khác mà ở đó đôi khi ta chỉ cần chọn 1 trục tọa độ, trục còn lại không cần quan tâm tới, bài toán vẫn có thể giải tốt.*

_ *Trên cùng một loại hình, ta có thể lựa chọn những hệ trục tọa độ khác nhau, nhưng vẫn đem lại kết quả như nhau.*

_ *Việc chuẩn hóa có ý nghĩa quan trọng trong quá trình đại số hóa hình học, vì vậy qua các ví dụ dựng hình trên các bạn lưu ý việc đặt sao cho giảm càng ít ẩn càng tốt. Vạn bất đắc dĩ mới phải đặt nhiều ẩn.*

_ *Như vậy việc chọn trục tọa độ không bị gò bó, cứng nhắc, đây là một ưu điểm nữa của giải pháp sử dụng công cụ tọa độ.*

_ *Với các bài toán hình học phẳng trong tọa độ Oxy, để chứng minh lại một kết quả của hình học phẳng, trước tiên ta "quên đi hệ trục Oxy" các dữ kiện tọa độ, phương trình theo tọa độ Oxy sẽ được ta thay thế bằng hệ tọa độ mới phục vụ cho việc chứng minh các kết quả của hình học thuần túy.*

PHẦN 3.2:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC THUẦN TÚY BẰNG CÔNG CỤ TỌA ĐỘ.

Với việc hình thành hệ trục tọa độ trong mặt phẳng, ta giải các bài toán thường gặp sau đây bằng cách sử dụng công cụ tọa độ.

►Bài toán 3.2.1: Tìm quỹ tích điểm M

Ta thực hiện như sau:

- Gọi tọa độ điểm M(x; y).
- Dựa vào tính chất của điểm M có trong giả thiết, ta tính được: $\begin{cases} x = h(m) \\ y = g(m) \end{cases}$, m là tham số thực.

- Khử tham số m, ta nhận được phương trình dạng $y = f(x)$.
- Khi đó, căn cứ vào điều kiện ràng buộc của tham số m, ta giới hạn được quỹ tích điểm M (nếu có).
- Trường hợp, một trong hai thành phần tọa độ không phụ thuộc vào tham số m thì quỹ tích điểm M là đường thẳng nằm ngang hoặc thẳng đứng.

► Bài toán 3.2.2: Chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định.

Để chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định ta thực hiện các bước sau:

- Viết phương trình đường thẳng d. (phụ thuộc tham số thực m)
- Biến đổi phương trình đường thẳng d về dạng:

$$\boxed{m.f(x;y) + g(x;y) = 0,\ \forall m \in R.}$$

- Tọa độ các điểm mà đường thẳng d luôn đi qua khi m thay đổi là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình trên ta được tọa độ điểm cố định.

►Bài toán 3.2.3: Chứng minh đường thẳng luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Ta thực hiện như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d. (phụ thuộc tham số thực m).
- Xác định một đường tròn (C) cố định có tâm I, bán kính R.
- Chứng minh d(I;d) = R.

►Bài toán 3.2.4: Chứng minh M di động trên một đường cố định

Ta thực hiện như sau:

- Viết phương trình hai đường thẳng di động qua điểm M.
- Giải hệ phương trình ta tìm tọa độ điểm M(x; y) với: $\begin{cases} x = g(m) \\ y = f(m) \end{cases}$
- Khử giá trị tham số m ta nhận được phương trình đường cố định là: *y = f(x)*.

►Bài toán 3.2.5: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Giả sử $\vec{u} = (a;b),\ \vec{v} = (c;d)$. Khi đó ta sử dụng công thức tích vô hướng.

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = ac + bd = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$$

►**Bài toán 3.2.6: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng.**

Giả sử: $\overrightarrow{AB}=(a,b),\ \overrightarrow{AC}=(c;d)$. Điều kiện để 3 điểm A, B, C thẳng hàng là:

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương } \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} a=kc \\ b=kd \end{cases} (k\in R)\ hay\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}}$$

PHẦN 3.3:

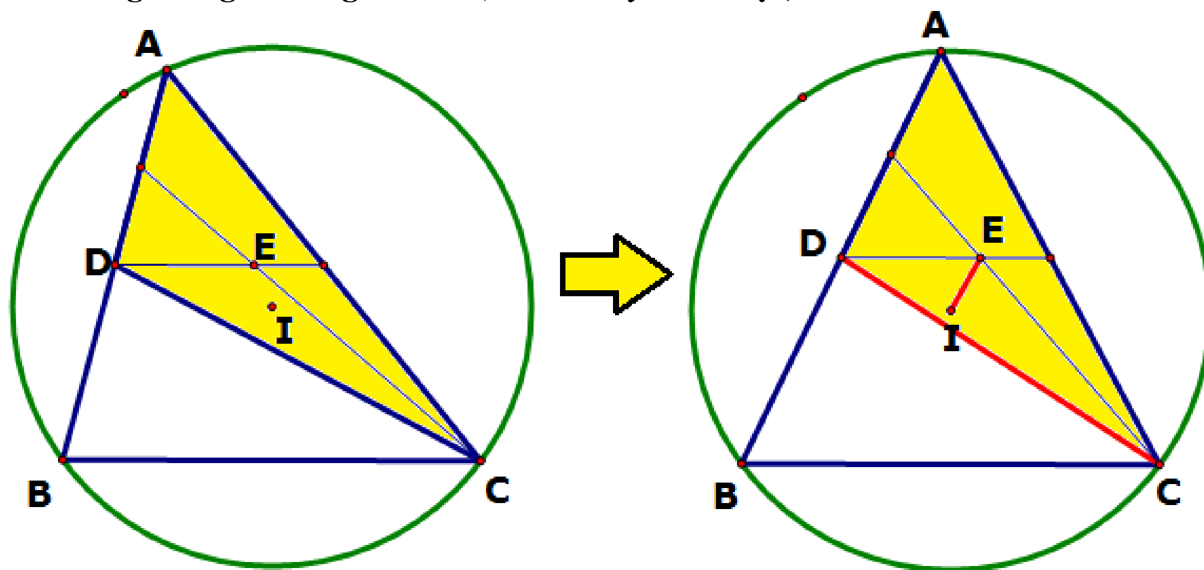
CÁC VÍ DỤ MINH HỌA VÀ SO SÁNH GIỮA PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀ CÁCH GIẢI HÌNH HỌC THUẦN TÚY.

Trong phần này tác giả đưa ra một số ví dụ về các dạng toán đã trình bày ở phần 2, cũng như có giải kèm thêm bằng cách giải thuần túy hình học để chúng ta có sự so sánh và đúc rút giữa các phương pháp.

►**Bài toán 3.3.1:***Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng nếu AB = AC thì IE vuông góc CD.*

(*trích đề thi vô địch vương quốc Anh*)

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 1 (Thuần túy hình học)***



Gọi H và F lần lượt là trung điểm của BC và AC.

Do AB = AC nên tam giác ABC cân tại A suy ra $AH \perp BC$ và DF là đường trung bình của tam giác ABC nên DF // BC suy ra $AH \perp DF$ (1).

Gọi $N = AH \cap CD \Rightarrow N$ là trọng tâm tam giác ABC suy ra CN = 2ND.

Gọi M là trung điểm CD ta có

$MD = MC \Leftrightarrow MD + MN = MC + MN$

$\Leftrightarrow (DN + MN) + MN = 2DN \Leftrightarrow DN = 2MN \Rightarrow \dfrac{MN}{DN} = \dfrac{1}{2}$

Do đó: $\dfrac{ME}{EA} = \dfrac{MN}{DN} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow NE // AD$

Với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm dây cung AB nên DI vuông góc AB suy ra DI vuông góc NE (2)

Từ (1) và (2) suy ra I là trưc tâm tam giác DEN do đó ***EI vuông góc CD (đpcm)***

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 2 (Vận dụng công cụ vecto)***

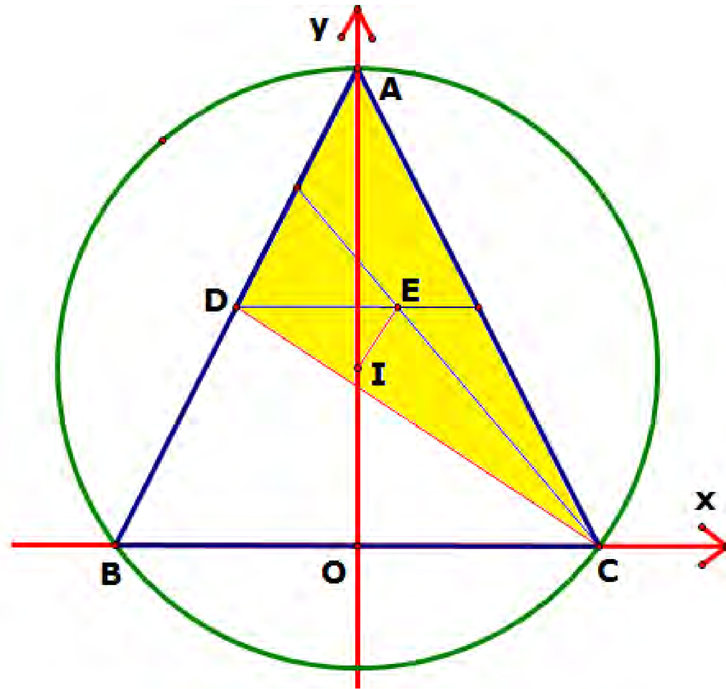
Xét tích vô hướng $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD}$ ta có:

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AE}\overrightarrow{BD}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD} &= 0 + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}).\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}).\overrightarrow{BD}\ (do\ AI \perp CB)\\
&= -\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BD}\ (do\ DI \perp BD)\\
&= \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB}\ (do\ \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD})\\
&= \overrightarrow{DE}.(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}).\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})\\
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})\ (\text{do AB} = 2\,\text{AD})\\
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})\left[\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right] - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\
&= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{6}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 = 0\ (do\ \ AB = AC)
\end{aligned}$$

Do đó ta suy ra ***EI vuông góc CD. (đpcm)***

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 3 (sử dụng công cụ tọa độ)***



Dựng hệ trục Oxy như hình vẽ (với O là trung điểm BC). Đặt BC = 2 và AO = a > 0

Ta có tọa độ các điểm : $O(0;0), B(-1;0),\ C(1;0), A(0;a)$.

Do D là trung điểm AB nên suy ra $\begin{cases} x_D = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0-1}{2} \\ y_D = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+a}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{a}{2}\right)}$

Ta có E là trọng tâm của tam giác ACD suy ra

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_C + x_D}{3} = \dfrac{0+1-\dfrac{1}{2}}{3} \\ y_E = \dfrac{y_A + y_C + y_D}{3} = \dfrac{a+0+\dfrac{a}{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{E\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{a}{2}\right)}$$

Ta có DI qua $D\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-1;-a)$ làm vecto pháp tuyến nên có dạng: $1(x+\dfrac{1}{2}) + a(y-\dfrac{a}{2}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{DI : 2x + 2ay - a^2 + 1 = 0}$.

Do $I = DI \cap Oy \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2ay - a^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{a^2 - 1}{2a} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(0;\dfrac{a^2-1}{2a}\right)}$

Xét $\begin{cases} \overrightarrow{EI} = \left(\dfrac{-1}{6}; \dfrac{-1}{2a}\right) \\ \overrightarrow{CD} = \left(\dfrac{-3}{2}; \dfrac{a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{EI \perp CD}$ (đpcm).

■ **Bình luận:**

Với cách giải 1 (thuần túy hình học), yêu cầu ở người giải phải có "nhãn quan" hình học nhạy bén, nắm chắc nhiều phương hướng chứng minh. Cách giải này tương đối phức tạp.

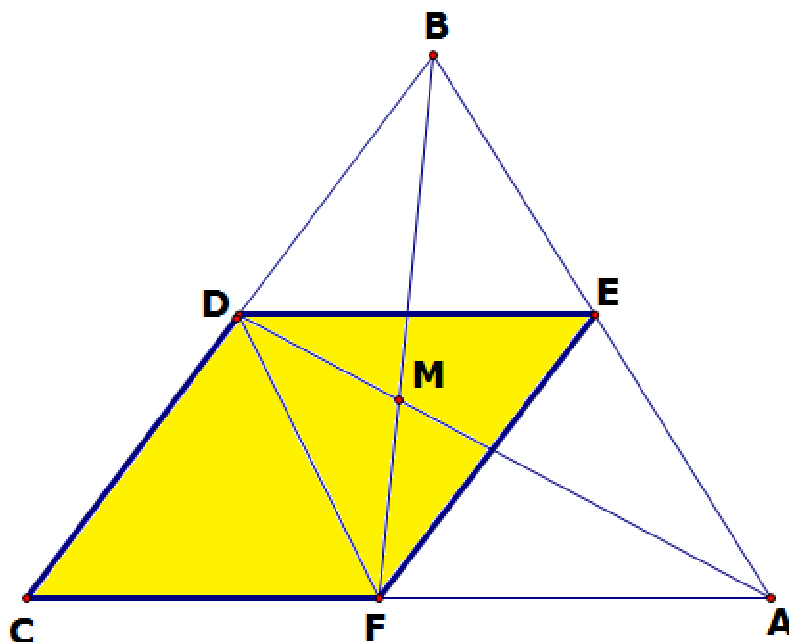
Với cách giải 2 (sử dụng công cụ vecto), yêu cầu ở người giải phải có kỹ năng biến đổi vecto đến mức "uyên thâm".

Với các giải 3 (sử dụng công cụ tọa độ), với việc chọn hệ trục Oxy, việc chứng minh trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Tuy nhiên mấu chốt có thể thấy ngay ở đây là việc xác định tất cả các tọa độ trong bài.

►**Bài toán 3.3.2:** *Cho tam giác ABC có góc* $\angle ACB = 60^0$. *Gọi D, E, F là các điểm tương ứng nằm trên các cạnh BC, AB, AC. Gọi M là giao điểm AD và BF. Giả sử CDEF là hình thoi. Chứng minh rằng:* $DF^2 = DM.DA$

(trích đề thi chọn đổi tuyển Quốc Gia Singapore)

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 1 (Thuần túy hình học)***



Từ CDEF là hình thoi nên DE // CA và CB // FE

Suy ra $\begin{cases} \angle BED = \angle EAF \\ \angle BCA = \angle BDE = \angle EFA \end{cases}$.

Do tam giác DEB đồng dạng tam giác FAE, từ đó ta có: $\frac{DB}{DE}=\frac{FE}{FA}$ (1)

Hình thoi CDEF có góc $\angle DCF = 60^0 \Rightarrow \Delta DCF$ là tam giác đều

$\Rightarrow DE = EF = DF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DB}{DF}=\frac{DF}{FA}$ (3)

Mặt khác: $\angle BDF = \angle FAD = 120^0$ (4) .

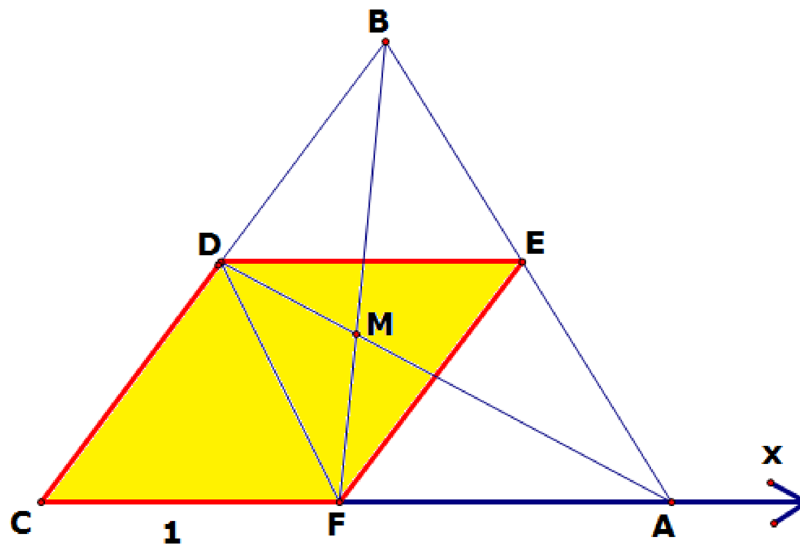
Nên từ (3) va (4) ta suy ra tam giác BDF và DFA đồng dạng.

Xét hai tam giác DMF và tam giác FAD có:

$$\begin{cases} \angle FDM \text{ chung} \\ \angle DFB = \angle FAD \end{cases} \Rightarrow \Delta DMF \sim \Delta DFA \Rightarrow \frac{DF}{DM}=\frac{DA}{DF}$$

Vậy $DF^2 = DM.DA$ (đpcm).

☺ ***Hướng dẫn giải bằng cách 2 (Sử dụng hệ trục tọa độ)***



Không mất tính tổng quát. Ta đặt CF = 1, CA = a (a > 1). Dựng hệ trục Cxy sao cho A thuộc tia Cx. Ta có tọa độ C(0;0), F(1; 0), A(a; 0).

Do CDF là tam giác đều nên theo phép quay tâm C góc quay 60 độ ta có:

$$Q_C^{\varphi=60^0}(F) = D \Rightarrow \begin{cases} x_D = 0+(1-0)\cos\varphi-(0-0)\sin\varphi = \frac{1}{2} \\ y_D = 0+(1-0)\sin\varphi+(0-0)\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Do CDEF là hình thoi nên ta có:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - \dfrac{1}{2} = 1 - 0 \\ y_E - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 - 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Khi đó phương trình đường thẳng CD: $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{CD: x\sqrt{3} - y = 0}$

Đồng thời phương trình đường thẳng AE:

$$\dfrac{x-a}{\frac{3}{2} - a} = \dfrac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{AE: x\sqrt{3} + (2a-3)y - a\sqrt{3} = 0}$$

Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x\sqrt{3} - y = 0 \\ x\sqrt{3} + (2a-3)y - a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2(a-1)} \\ y = \dfrac{a\sqrt{3}}{2(a-1)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(\dfrac{a}{2(a-1)}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2(a-1)}\right)}$$

Tương tự ta có:

$AE: x\sqrt{3} + (2a-1)y - a\sqrt{3} = 0,\ BF: ax\sqrt{3} + (a-2)y - a\sqrt{3} = 0$

Khi đó tọa độ M là nghiệm của hê:

$$\begin{cases} x\sqrt{3} + (2a-1)y - a\sqrt{3} = 0, \\ ax\sqrt{3} + (a-2)y - a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(a+1)}{2(a^2-a+1)} \\ y = \dfrac{a(a-1)\sqrt{3}}{2(a^2-a+1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M\left(\dfrac{a(a+1)}{2(a^2-a+1)}; \dfrac{a(a-1)\sqrt{3}}{2(a^2-a+1)}\right)}$$

Vậy ta có:

$$\begin{cases} DF^2 = 1 \\ DA^2 = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - a + 1 \\ DM^2 = \left[\dfrac{a(a+1)}{2(a^2-a+1)} - \dfrac{1}{2}\right]^2 + \left[\dfrac{a(a-1)\sqrt{3}}{2(a^2-a+1)} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \dfrac{1}{a^2-a+1} \end{cases}$$

Do đó: $DF^2 = DM.DA$ (đpcm).

■ **Bình luận:**

Với cách giải 1, yêu cầu cần phải chứng tỏ được các cặp tam giác đồng dạng là DEB và FAE, BDF và DFA, DMF và DFA. Việc chứng minh tương đối "rắc rối" đòi hỏi ở người giải một số kỹ năng.

Với cách giải 2, viêc chọn hệ trụ Cxy ta dễ dàng chỉ ra tọa độ D, F, A, cộng việc còn lại là xác định tọa độ M và sau đó sử dụng công thức độ dài (cũng khá nặng nhưng về mặt tư duy thì nhẹ nhang hơn rất nhiều). Cách giải này cũng đã vận dụng sử dụng của phép biến hình để xử lý các tọa độ nhờ vào công thức góc.

►**Bài toán 3.3.3:***Cho một điểm M nằm tùy ý trên đoạn AB. Dựng các hình vuông AMCD và MBEF về cùng một phía với AB. Các đường tròn tâm P và Q lần lượt ngoại tiếp hai hình vuông AMCD và MBEF cắt nhau tại M và N.*

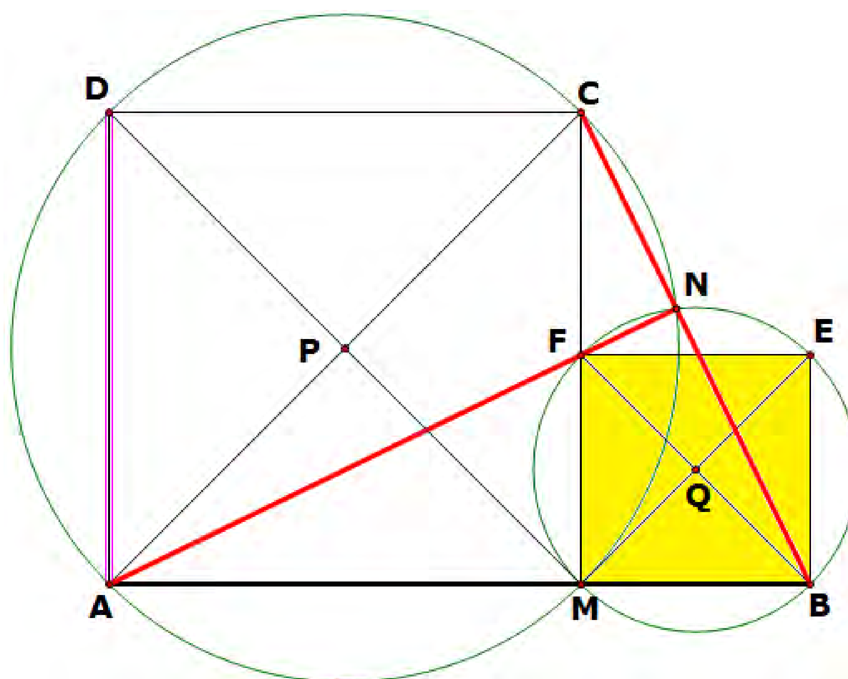
a. CM: AF và BC cắt nhau tại N.

b. CM: đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

c. Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi.

(*trích đề thi Vô địch Toán Quốc Tế****)***

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 1 (Thuần túy hình học)*:**



a. ***Chứng minh AF và BC cắt nhau tại N.***

Gọi $K = AC \cap BF$. Ta có: $\angle KAM = \angle KBM = 45^0 \Rightarrow AK \perp BF$ (1)

Mặt khác CM vuông góc AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra F là trực tâm tam giác ABC. Do đó **AF vuông góc BC.**

Gọi $N' = AF \cap BC \Rightarrow \angle AN'C = 90^0 = \angle AMC \Rightarrow N', C, A, M$ cùng thuộc một đường tròn.

Do đó N' nằm trên đường tròn tâm P.

Một cách tương tự ta có 4 điểm N', B, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó N' nằm trên đường tròn tâm Q.

Như vậy N' là điểm chung của 2 đường tròn tâm P và Q. Mà AF và BC không đi qua M

Do đó N' trùng N. ***Vậy AF và BC cắt nhau tại N (đpcm).***

b. ***Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.***

Theo chứng minh trên, ta có: AF vuông BC tại N nghĩa là $\angle ANB = 90^0$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ANB là đường tròn cố định có đường kinh AB.

Gọi S là giao điểm của đường trung trực AB với phần cung AB không chứa điểm N. Ta có S là điểm cố định.

Ta có:

$$\angle ANM = \angle ACM = 45^0 \Rightarrow \angle MNB = \angle ANB - \angle ANM = 90^0 - 45^0 = 45^0$$

Do đó: $\angle MNB = \angle ANM = 45^0$.

Từ điều này ta khẳng định rằng đường thẳng MN đi qua điểm cố định S.

c. ***Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi.***

Ta có: $\angle KPM = \angle MQK = \angle PMQ = 90^0$ nên KPMQ là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật KPMQ, I chính là trung điểm của PQ và KM.

Mặt khác tam giác KAB có $\angle KAB = \angle KBA = 45^0$ nên tam giác KAB vuông cân tai K, mà AB cố định K cố định.

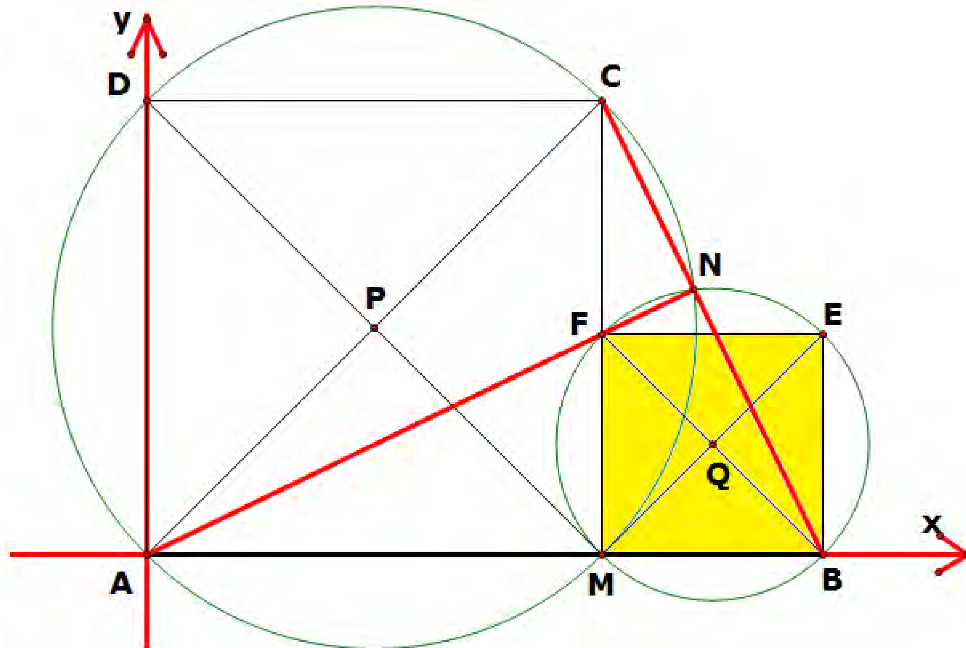
Gọi O và T lần lượt là trung điểm của KA và KB (O, T cố định)

Do OI // AM, IT // MB và 3 điểm A, M, B thẳng hàng nên 3 điểm O, I, T thẳng hàng.

Vì M di động trên đoạn thẳng AB (M khác A, M khác B) nên I di động trên đoạn thẳng OT (I khác O, I khác T).

Vậy ***quỹ tích trung điểm I của PQ là đoạn OT (trừ điểm O và T)***.

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 2 (sử dụng công cụ tọa độ)***:



Dựng hệ trục Axy như hình vẽ.

Không mất tính tổng quát giả sử AB = 1, AM = m

Với (0 < m < 1). Khi đó tọa độ các điểm là:

$$A(0;0), B(1;0),\ M(m;0), C(m;m),\ F(m;1-m),$$

$$E(1;1-m),\ P\left(\frac{m}{2};\frac{m}{2}\right), Q\left(\frac{m+1}{2};\frac{1-m}{2}\right),\ D(0;m)$$

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AF}=(m;1-m)\\ \overrightarrow{BC}=(m-1;m)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = m(m-1)+(1-m)m = 0 \Rightarrow \boxed{AF \perp BC}.$$

Gọi $N' = AF \cap BC \Rightarrow \angle AN'C = 90^0 = \angle AMC \Rightarrow N', C, A, M$ cùng thuộc một đường tròn.

Do đó N' nằm trên đường tròn tâm P.

Một cách tương tự ta có 4 điểm N', B, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó N' nằm trên đường tròn tâm Q.

Như vậy N' là điểm chung của 2 đường tròn tâm P và Q. Mà AF và BC không đi qua M

Do đó N' trùng N. ***Vậy AF và BC cắt nhau tại N (đpcm).***

- **Chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định:**

Do hai đường tròn tâm P và Q cắt nhau tại M, N nên MN vuông PQ

Suy ra $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1-2m}{2}\right)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng MN.

Do đó phương trình đường thẳng MN là:

$$\frac{1}{2}(x-m) + \frac{1-2m}{2}(y-0) = 0 \Leftrightarrow x + (1-2m)y - m = 0$$

Giả sử S(a; b) là điểm cố định mà đường thẳng MN luôn đi qua khi M di động trên đoạn AB.

Ta có: $a + (1-2m)b - m = 0, \forall m \in (0;1) \Leftrightarrow \boxed{(a+b) - (1+2b)m = 0, \forall m \in (0;1)}$

Tọa độ điểm S là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 1+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$$

Vậy đường thẳng MN đi qua điểm cố định $\boxed{S\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)}$

- **Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi.**

Gọi $I(x; y)$ là trung điểm của PQ ta có: $\begin{cases} x = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{2m+1}{4} \\ y = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

Ta có $x = \frac{2m+1}{4} \Rightarrow m = \frac{4x-1}{2}$.

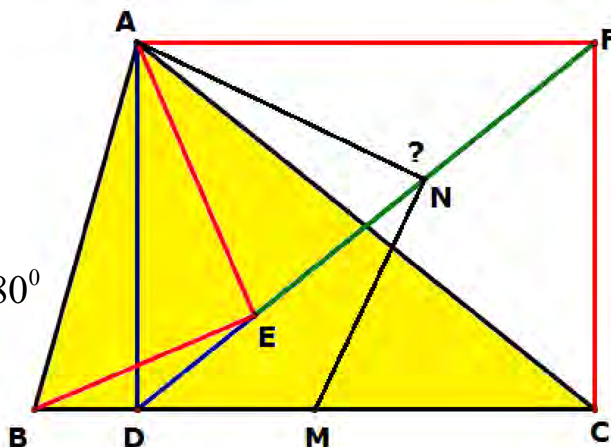
Vì $0 < m < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{4x-1}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{4}$.

Vậy quỹ tích trung điểm của PQ là đoạn thẳng nằm trên đường thẳng có phương trình $y = \frac{1}{4}$ song song với AB và giới hạn bởi $0 < x < \frac{3}{4}$.

►**Bài toán 3.3.4:** *Cho tam giác ABC và D là chân đường cao hạ từ A. Gọi E và F là các điểm nằm trên đường thẳng qua D sao cho $AE \perp BE$, $AF \perp CF$ và E, F không trùng D. Giả sử M, N là các trung điểm tương ứng của BC và EF. Chứng minh rằng $AN \perp NM$*

(trích đề thi Olympic Châu Á Thái Bình Dương lần thứ 10)

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 1 (Thuần túy hình học)*:**



Ta có: $\angle AEB = \angle ADB = 90^0$ suy ra tứ giác AEDB nội tiếp $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$ (1) vì cùng bù với góc AED.

Lại có:

$\angle AFC + \angle ADC = 90^0 + 90^0 = 180^0$ suy ra tứ giác ADCE nội tiếp $\Rightarrow \angle AFE = \angle ACB$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\Delta AEF \sim \Delta ABM \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EN}{2BM} = \frac{EN}{BM} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra $\Delta AEN \sim \Delta AMB$

$\Rightarrow \angle ANE = \angle AMB$ suy ra tứ giác ANMD nội tiếp.

Do đó $\angle ANM + \angle ADM = 180^0$

$\Rightarrow \angle ANM = 180^0 - \angle ADM = 180^0 - 90^0 = 90^0 \Rightarrow AN \perp NM$ **(đpcm).**

☺ ***Hướng dẫn giải bằng cách 2 (chứng minh hình học kết hợp sử dụng công cụ vecto)*:**

Gọi $I = AE \cap CF$, $J = BE \cap AF$.

Ta có: $\begin{cases} \angle AIF + \angle IAF = 90^0 \\ \angle AJB + \angle IAF = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \angle AIF = \angle AJB = \alpha$

Ta có: $\angle ADB = \angle AEB = 90^0$ nên tứ giác ABDE nội tiếp được.

Suy ra: $\angle ABE = \angle ADE$ (1)

Ta có: $\angle ADC = \angle AFC = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác ADCF nội tiếp được suy ra $\angle ACF = \angle ADE$ (2)

(1) và (2) suy ra $\angle ABE = \angle ACF$. Do đó $\Delta ABE \sim \Delta ACF$

Suy ra $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF} \Leftrightarrow AE.CF = AF.BE$ (3)

Xét tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MN}$ ta có:

$4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = (2\overrightarrow{AN}).(2\overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CF} = 0 + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} + 0$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = AE.CF.\cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CF}) + AF.BE.\cos(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE})$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = -AE.CF.\cos\alpha + AF.BE.\cos\alpha$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = (-AE.CF. + AF.BE).\cos\alpha = 0\ (do\ (3)).$

Vậy **AN vuông góc MN (đpcm).**

☺***Hướng dẫn giải bằng cách 3 (sử dụng công cụ tọa độ)*:**

Đặt AD = a, DB = b, DC = c (a, b, c > 0).

Chọn hệ trục Dxy như hình vẽ.

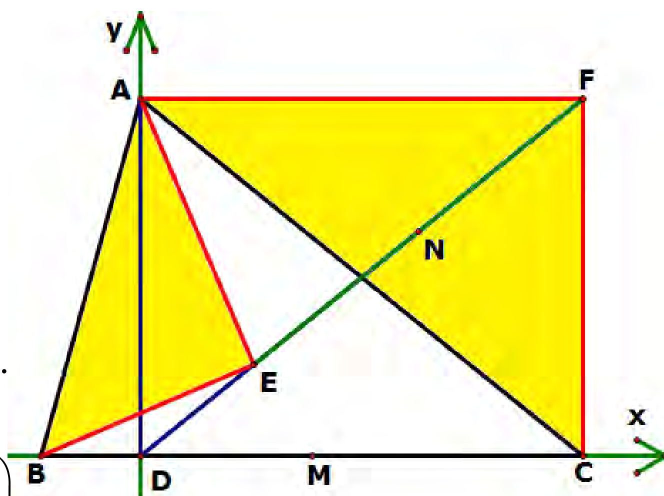
Ta có: D(0; 0), A(0; a), B(–b; 0), C(c; 0).

Giả sử

$E(x; y),\ F(m, n)\,(x, y, m, n \neq 0).$

Ta có:

$M\left(\frac{c-b}{2}; 0\right),\ N\left(\frac{x+m}{2}; \frac{y+n}{2}\right)$



Ta có $\overrightarrow{AE} = (x; y-a), \overrightarrow{BE} = (x+b; y), \overrightarrow{AF} = (m; n-a), \overrightarrow{CF} = (m-c; n)$.

Theo giả thiết, $AE \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow x(x+b) + y(y-a) = 0$ (1)

Lại có: $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CF} = 0 \Leftrightarrow m(m-c) + n(n-a) = 0$ (2)

Mặt khác, D, E, F thẳng hàng nên $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}$ cùng phương suy ra

$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \Leftrightarrow xn = my$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases} m(x+b) + n(y-a) = 0 \\ x(m-c) + y(n-a) = 0 \end{cases}$ (I)

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{x+m}{2}; \frac{y+n-2a}{2}\right),\ \overrightarrow{MN} = \left(\frac{x+m-c+b}{2}; \frac{y+n}{2}\right)$

Do đó: $4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = (x+m)(x+m-c+b)+(y+n)(y+n-2a)$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = x(x+b)+y(y-a)+m(m-c)+n(n-a)+m(x+b)+n(y-a)+x(m-c)+y(n-a)$

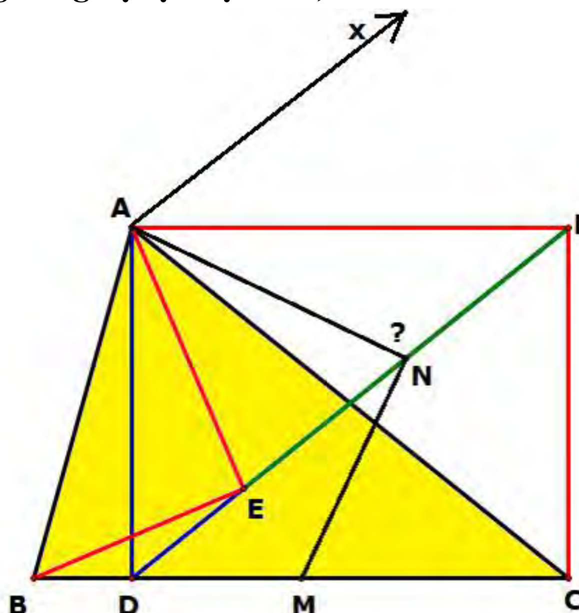
$\Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = 0 \text{ (do (I))} \Rightarrow AN \perp MN$

☺ ***Hướng dẫn giải bằng cách 4 (sử dụng công cụ tọa độ khác)*:**

Chọn hệ trục tọa độ Axy như hình vẽ (Ax // EF). Ta có tọa độ các điểm là:

A(0; 0), D(d; h), E(e; h), F(f; h).

N là trung điểm đoạn EF nên $N\left(\frac{e+f}{2};h\right)$.



Viết phương trình các đường thẳng BE và BC suy ra

$B\left(d+e;\frac{h-df}{h}\right)$

Viết phương trình các đường thẳng CF và BC suy ra

$C\left(d+f;\frac{h-df}{h}\right)$

M là trung điểm đoạn BC nên ta có: $M\left(\frac{2d+e+f}{2};\frac{h-df}{h}\right)$

Từ đó tính được tích các hệ số góc của 2 đường thẳng AN và MN bằng –1.

Suy ra AN vuông góc MN.

■ **Bình luận:**

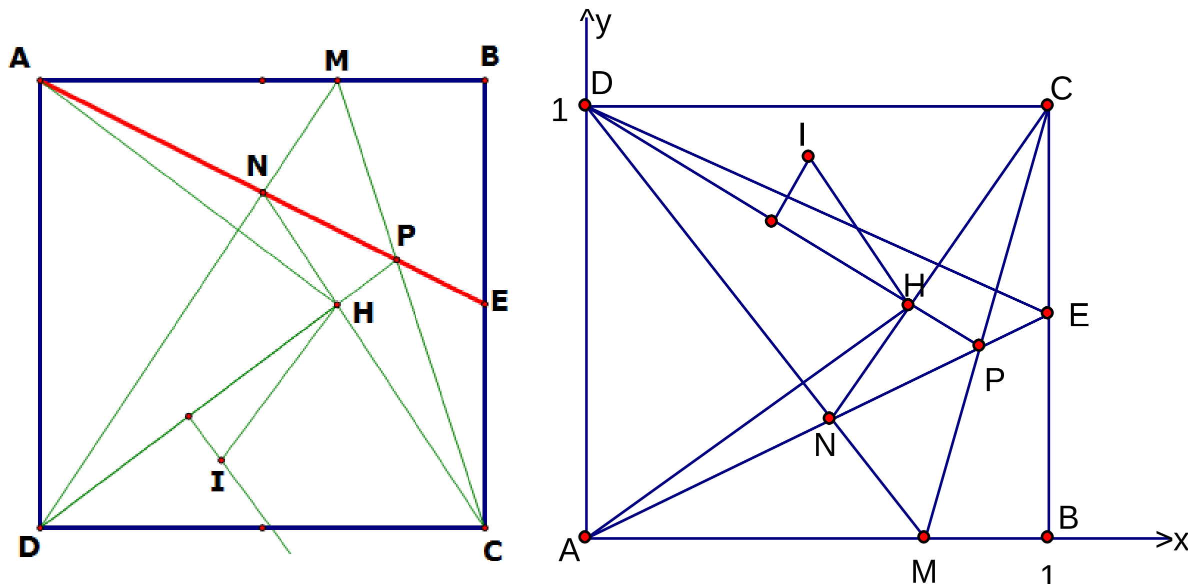
Với cách giải 1, từ sự phát hiện các cặp tam giác đồng dạng AEF và ABC, AEN và ABM, ta chứng minh được tứ giác ANMD nối tiếp. Đây cũng là điểm mấu chốt trong cách giải bài toán. Đòi hỏi ở người giải óc quan sát tốt.

Với cách giải 2, sự kết hợp giữa hình học thuần túy và các phép biến đổi trên vecto là một điểm không mạnh của học sinh. Tuy nhiên đây cũng có thể xem là phương pháp tổng hợp.

Với cách giải 3, với việc chọn hệ trục tọa độ Dxy, cho ta những tọa độ đẹp nhưng phần còn lại là xác định tọa độ của vecto AN và MN và tính toán tương đoan khá "nặng". Thấy được hướng đi nhưng lại rất dễ làm nản lòng người làm.

Với cách giải 4, với các chọn hệ trục tọa độ như trên, ta dường như không quan tâm đến sự có mặt của trục tung. Bài toán vẫn giải quyết với kết quả chính xác. Đây cũng là một ưu điểm của giải pháp sử dụng công cụ tọa độ.

►**Bài toán 3.3.5:** *Cho hình vuông ABCD, E là trung điểm BC. M là điểm di động trên cạnh AB. Gọi N, P lần lượt là giao điểm MD và MC với AE. Gọi H là giao điểm của NC và DP. I là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng DH với đường thẳng vuông góc với AH tại H. Chứng minh khi M di động trên cạnh AB thì I di động trên một đường thẳng cố định.*



Chọn hệ trục tọa độ Axy, chuẩn hóa đặt AB = 1, AM = m (0 < m < 1)

Khi đó tọa độ các điểm là A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(0; 1), $E\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng AE: $\frac{x}{1}=\frac{y}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}$

Phương trình đường thẳng MD: $\frac{x}{m}=\frac{y-1}{-1}\Leftrightarrow -x=my-m\Leftrightarrow y=\frac{m-x}{m}$

Ta có N là giao điểm MD và AE nên ta suy ra tọa độ $N\left(\frac{2m}{m+2};\frac{m}{m+2}\right)$

Phương trình đường thẳng MC: $\frac{x-1}{m-1}=\frac{y-1}{-1}\Leftrightarrow y=\frac{m-x}{m-1}$

Lại có P là giao điểm MC và AE nên tọa độ $P\left(\frac{2m}{m+1};\frac{m}{m+1}\right)$

Ta có phương trình đường hẳng NC:

$$\frac{x-1}{\frac{2m}{m+2}-1}=\frac{y-1}{\frac{m}{m+2}-1}\Leftrightarrow y=\frac{-2}{m-2}x+\frac{m}{m-2}$$

Và phương trình DP: $\dfrac{x}{\dfrac{2m}{m+1}} = \dfrac{y-1}{\dfrac{m}{m+1}-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{-1}{2m}x+1$

H là giao điểm NC và DP nên có tọa độ $H\left(\dfrac{4m}{3m+2};\dfrac{3m}{3m+2}\right)$

Ta thấy điểm H luôn thuộc đường thẳng cố định 3x – 4y = 0, D là 1 điểm cố định và ta có ID = IH (vì I thuộc đường trung trực DH) nên I di động trên Parabol cố định nhận đường thẳng 3x – 4y = 0 làm đường chuẩn và D là tiêu điểm.

PHẦN 3.4

ỨNG DỤNG HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VÀO VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG.

BÀI TOÁN 3.4.1. ***Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi được. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích của điểm A, biết rằng trung điểm K của HG thuộc đường thẳng BC.***

(Trích đề thi Học sinh giỏi Quốc gia 2006 – 2007)

☺ **Hướng dẫn giải :**

Chọn hệ trục Oxy với O trung điểm BC và trục Ox là đường thẳng BC

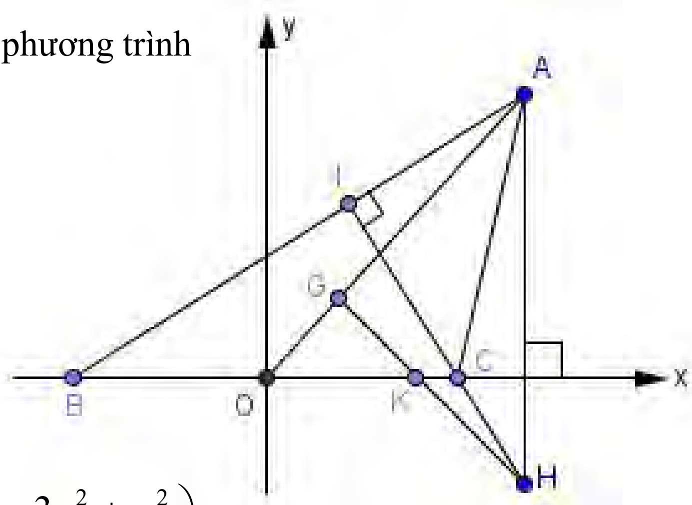
Đặt $BC = 2a > 0$. Khi đó tọa độ $B(-a,0)$; $C(a,0)$.

Giả sử $A(x_0, y_0)$ $y_0 \neq 0$

Khi đó trực tâm H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 \\ (x+a)(a-x_0) - y_0 y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(x_0, \frac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right)$$



Trọng tâm $G\left(\dfrac{x_0}{3};\dfrac{y_0}{3}\right)$,

suy ra trung điểm $K\left(\dfrac{2x_0}{3};\dfrac{3a^2-3x_0^2+y_0^2}{6y_0}\right)$

K thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi

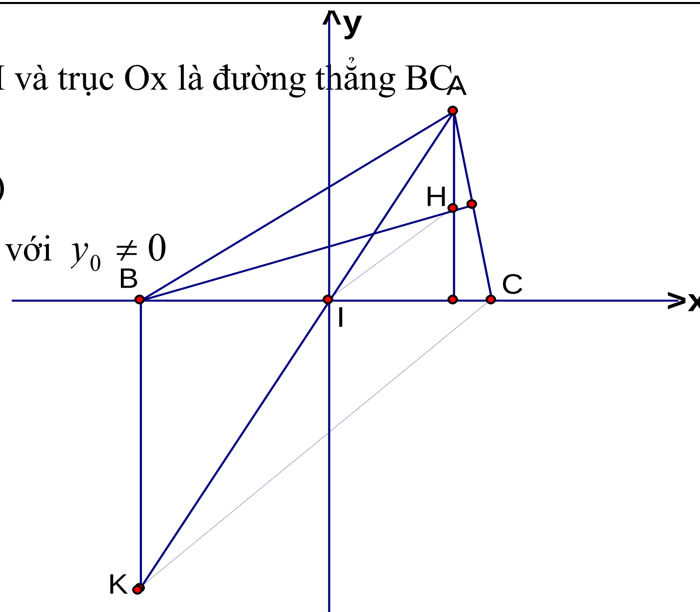
$$3a^2 - 3x_0^2 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{3a^2} = 1 \quad (y_0 \neq 0)$$

Vậy quỹ tích A là hyperbol $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$ bỏ đi hai điểm B, C

BÀI TOÁN 3.4.2. ***Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt đường trung tuyến AI của tam giác ABC tại K.Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng IH song song với KC.***

(Trích đề thi Olympic Lê Hồng Phong 2008 – 2009)

☺ **Hướng dẫn giải :**



Chọn hệ trục Oxy với O trùng I và trục Ox là đường thẳng BC

Đặt $BC=2a>0$.

Khi đó toạ độ $B(-a;\,0);\,C(a;\,0)$

Giả sử tọa độ điểm $A(x_0;\,y_0)$ với $y_0\neq 0$

Khi đó trực tâm H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x=x_0\\ (x+a)(a-x_0)-y_0y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(x_0;\,\frac{a^2-x_0^2}{y_0}\right)$$

$K=d\cap(AI)$ là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x=-a\\ y=\dfrac{y_0}{x_0}x\end{cases}\Rightarrow K\left(-a;\,-a\frac{y_0}{x_0}\right) \text{ với } x_0\neq 0$$

Theo giả thiết, ta có:

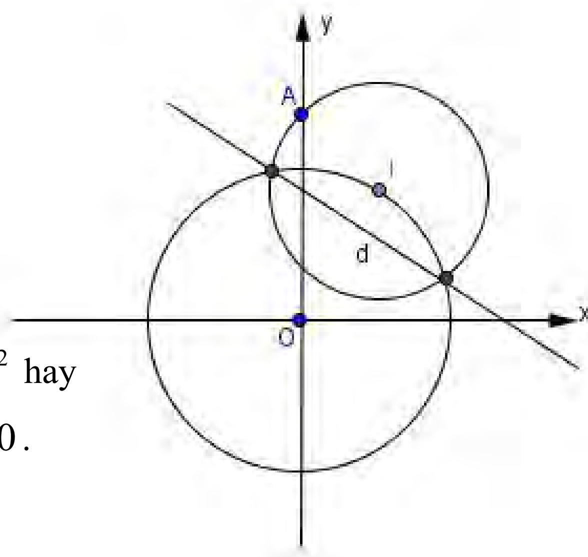
$$\overrightarrow{IH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{KC}\Leftrightarrow a\frac{y_0}{x_0}.x_0-2a.\frac{a^2-x_0^2}{y_0}=0\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{2a^2}=1$$

Vậy quỹ tích A là elip $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{2a^2}=1$ bỏ đi 4 điểm B, C, $A_1(0;\,-a\sqrt{2})$, $A_2(0;\,a\sqrt{2})$ là 4 đỉnh của elip

BÀI TOÁN 3.4.3. ***Trong mặt phẳng cho đường tròn (O,R) và một điểm A cố định. I là điểm di động trên (O). Đường tròn tâm I luôn đi qua A. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định .***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Chọn hệ trục (Oxy) như hình vẽ (OA là trục Oy) . Ta có A(0,b) , (O) : $x^2 + y^2 = R^2$.



Gọi I(m; n) ∈ (O) $\Rightarrow m^2 + n^2 = R^2$ và $IA^2 = m^2 + (b-n)^2$.

Vậy (I):

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + (n-b)^2$ hay

$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + 2nb - b^2 = 0$.

Suy ra phương trình của trục đẳng phương của (O) và(I) là (d) là

$$2mx + 2ny - 2nb + b^2 + R^2 = 0.$$

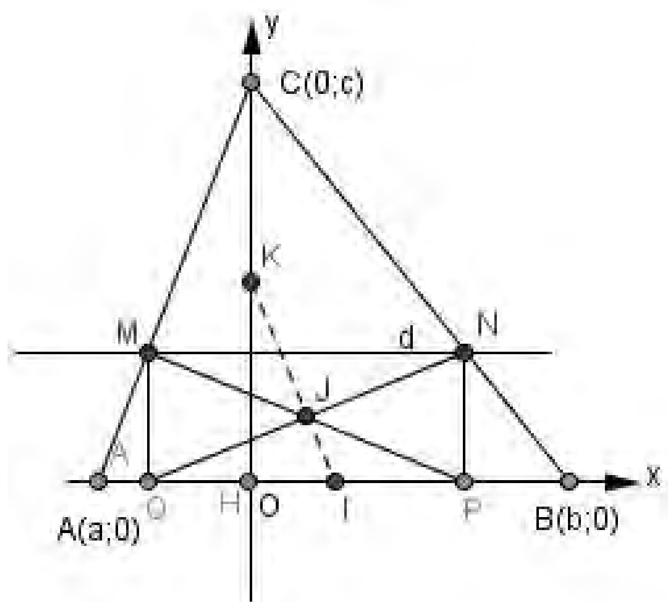
Ta có $d(A,d) = \dfrac{\left|2nb - 2nb + b^2 - R^2\right|}{2\sqrt{m^2+n^2}} = \dfrac{\left|b^2 - R^2\right|}{2R}$.

BÀI TOÁN 3.4.4. ***Cho tam giác ABC có đường cao CH. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, CH. Một đường thẳng d di động luôn luôn song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại M và cắt cạnh BC tại N. Dựng hình chữ nhật MNPQ với hai điểm P, Q nằm trên cạnh AB. Gọi J là tâm hình chữ nhật MNPQ. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv H$, các điểm A, B nằm trên Ox, điểm C nằm trên Oy

Ta có toạ độ các điểm H(0; 0), C(0; c) , A(a; 0) , B(b; 0).



Đường thẳg d có phương trình y = m (0<m<c)

(AC) : cx+ay–ac = 0

và (BC) : cx+by = 0

$M = d \cap AC$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{a(c-m)}{c}; m\right)$

tương tự $N\left(\dfrac{b(c-m)}{c}; m\right)$

Điểm P là hình chiếu vuông góc của N trên Ox $\Rightarrow P\left(\dfrac{b(c-m)}{c};0\right)$

J là trung điểm của đoạn PM $\Rightarrow J\left(\dfrac{(a+b)(c-m)}{2c};\dfrac{m}{2}\right)$

Từ đó ta có $\overrightarrow{IK}=\left(-\dfrac{a+b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$ và $\overrightarrow{IJ}=\left(-\dfrac{m(a+b)}{2c};\dfrac{m}{2}\right)$

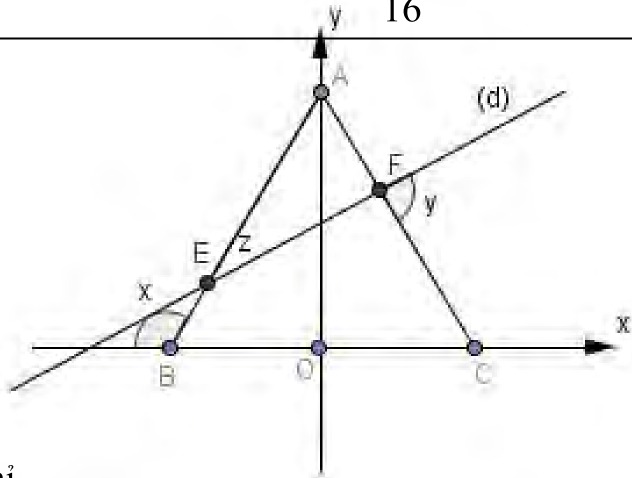
Vậy $\overrightarrow{IK}$ cùng phương $\overrightarrow{IJ}$, nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

BÀI TOÁN 3.4.5. ***Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 2a và (d) là đường thẳng tùy ý cắt các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi x, y, z tương ứng là các góc giữa đường thẳng (d) và các đường thẳng BC, CA, AB.***

Chứng minh $\sin^2 x.\sin^2 y.\sin^2 z+\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z=\dfrac{1}{16}$.

☺ **Hướng dẫn giải :**

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;a\sqrt{3}), B(-a;0), C(a;0)$.



Khi đó

$\overrightarrow{AB}=(-a;-a\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{CA}=(-a;a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC}=(2a;0)$.

Gọi $\vec{u}=(u_1;u_2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d). Ta có :

$$\cos^2 x=\frac{u_1^2}{u_1^2+u_2^2}\Rightarrow \sin^2 x=\frac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2}$$

$$\cos^2 y=\frac{\left(u_1-u_2\sqrt{3}\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}\Rightarrow \sin^2 y=\frac{\left(u_1\sqrt{3}-u_2\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}$$

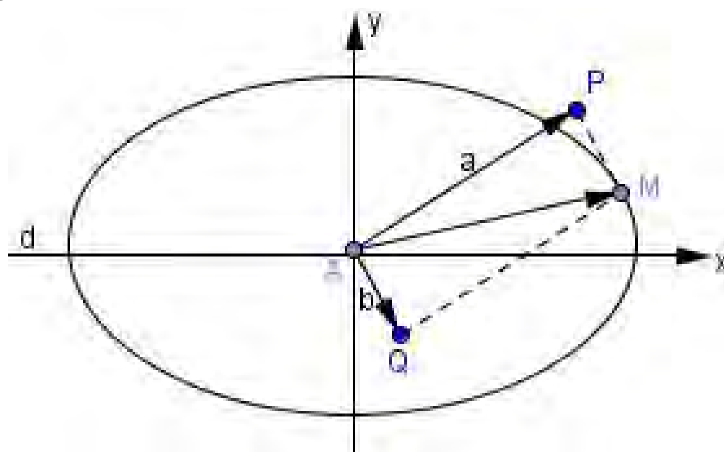
$$\cos^2 z=\frac{\left(u_1+u_2\sqrt{3}\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}\Rightarrow \sin^2 z=\frac{\left(u_1\sqrt{3}-u_2\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}$$

Suy ra $S=\sin^2 x.\sin^2 y.\sin^2 z+\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z$

$$= \frac{u_1^2\left(u_1^2 - 3u_2^2\right)^2 + u_2^2\left(3u_1^2 - u_2^2\right)^2}{16\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3} = \frac{u_1^6 + 3u_1^4u_2^2 + 3u_1^2u_2^4 + u_2^6}{16\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3} = \frac{1}{16} \text{ (đpcm).}$$

BÀI TOÁN 3.4.6. ***Cho đường d trên đó lấy một điểm A. Cho trước hai số dương a, b sao cho a>b. Xét tất cả các điểm P, Q sao cho AP = a, AQ = b và đường thẳng d là phân giác của $\widehat{PAQ}$. Ứng với mỗi cặp điểm P,Q xét điểm sao cho $\vec{AM} = \vec{AP} + \vec{AQ}$.Tìm quỹ tích điểm M.***

☺ **Hướng dẫn giải:**



Chọn hệ tục tọa độ như sau : lấy A làm gốc tọa độ, trục hoành là d.Gọi M(x; y)

Ta có $\vec{AM} = \vec{AP} + \vec{AQ} \Leftrightarrow (x; y) = (x_P; y_P) + (x_Q; y_Q)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_P + x_Q \\ y = y_P + y_Q \end{cases} (1)$$

Do AP = a và AQ = b nên $\begin{cases} x_P^2 + y_P^2 = a^2 \\ x_Q^2 + y_Q^2 = b^2 \end{cases}$ (2)

Nếu phương trình (AP): y = kx thì (AQ): y = –kx

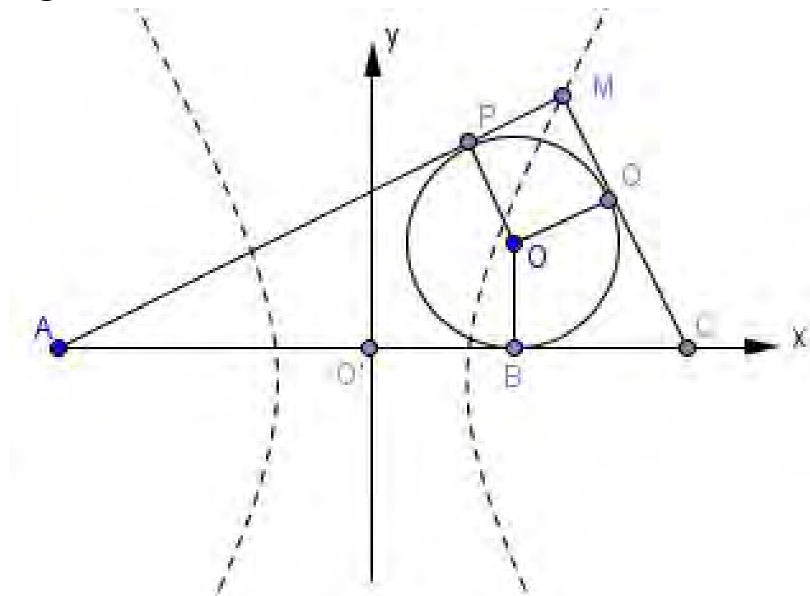
Từ (2) suy ra $\begin{cases} x_P^2 + k^2x_P^2 = a^2 \\ x_Q^2 + k^2x_Q^2 = b^2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x_P^2 + x_Q^2 + 2x_Px_Q = \dfrac{(a+b)^2}{1+k^2} \\ y^2 = y_P^2 + y_Q^2 + 2y_Py_Q = \dfrac{k^2(a-b)^2}{1+k^2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$$

Vậy quỹ tích M là một elip.

BÀI TOÁN 3.4.7. ***Trên đường thẳng d cho trước, cho ba điểm A, B, C trong đó B nằm giữa A và C. Vẽ vòng tròn tiếp xúc với d tại B. Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến với vòng tròn trên vẽ từ A và C. Tìm quỹ tích điểm M.***

☺ **Hướng dẫn giải :**



Gọi các tiếp điểm như hình vẽ, ta có $|MA - MC| = |BA - BC| =$ hằng số (1)

Nếu B là trung điểm của AC thì từ (1) $\Rightarrow MA = MC$: quỹ tích M là trung trực của AC.

Nếu B không là trung điểm của AC thì từ (1): quỹ tích M là hyperbol nhận A, C làm tiêu điểm (như hình vẽ)

BÀI TOÁN 3.4.8. ***Cho đường thẳng d và một điểm A cố định không nằm trên d. P và Q là hai điểm di động trên d nhưng PQ = a (trong đó a là số dương cho trước). Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Tìm quỹ tích điểm M.***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ

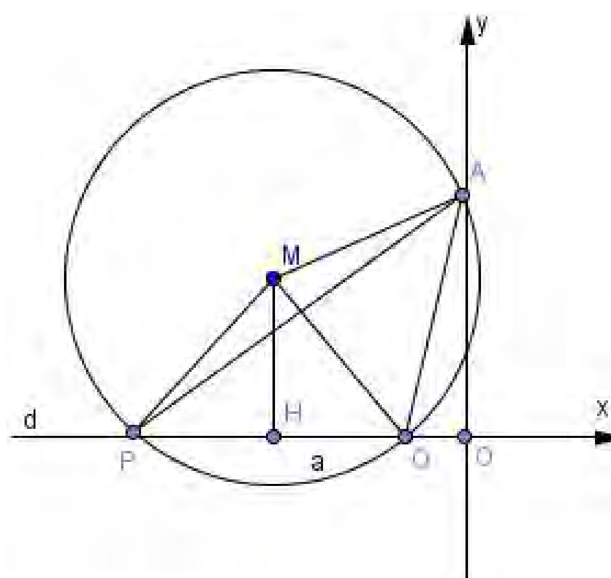
Gọi M (x; y), giả sử khoảng cách từ A đến d là h, khi đó A(0; h)

Ta có $MA^2 - MH^2 = \dfrac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-h)^2 - y^2 = \dfrac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2h}x^2 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{a^2}{4h}$

Vậy quỹ tích điểm M là một Parabol.



BÀI TOÁN 3.4.9. ***Qua tâm O của hai đường tròn đồng tâm vẽ hai đường thẳng vuông góc d_1 và d_2. Đường thẳng d di động quay quanh O về cùng một hướng cắt các vòng tròn nhỏ và lớn lần lượt tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng $d_1^/$ song song d_1 và qua B vẽ đường thẳng $d_2^/$ song song d_2. Tìm quỹ tích điểm $M = d_1^/ \cap d_2^/$.***

☺ **Hướng dẫn giải:**

Lập hệ trục tọa độ nhận d_1, d_2 à trục Ox và Oy.

Giả sử đường thẳng d có phương trình y = kx, $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$.

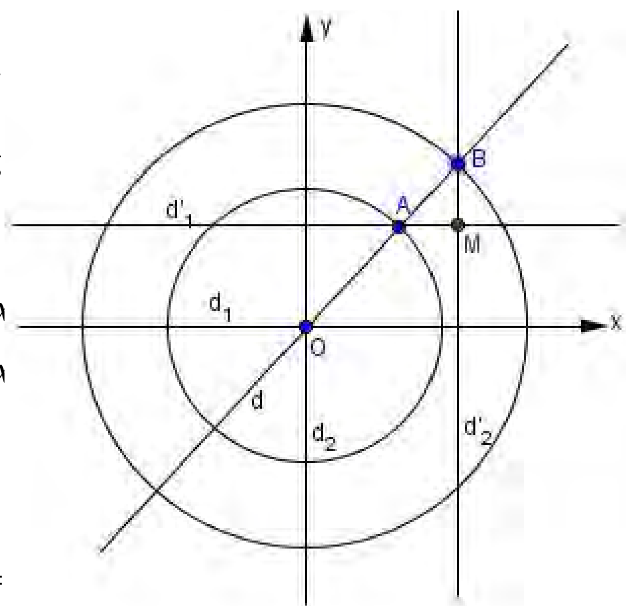
Từ giả thiết, ta có $x = x_B$, $y = y_A$.

Ta có $\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = r^2 \\ x_B^2 + y_B^2 = R^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} y_A = kx \\ y_B = kx \end{cases}$

$\Rightarrow x_B^2 = \dfrac{R^2}{1+R^2}$; $y_A^2 = \dfrac{k^2 r^2}{1+k^2}$.

Từ đó ta có $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x_B^2}{R^2} + \dfrac{y_A^2}{r^2} =$

Vậy quỹ tích điểm M là Elip $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$



BÀI TOÁN 3.4.10. ***Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các Cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{PA}{PB}$. Chứng minh rằng $CP \perp MN$ và CP = MN.***

☺ **Hướng dẫn giải :**

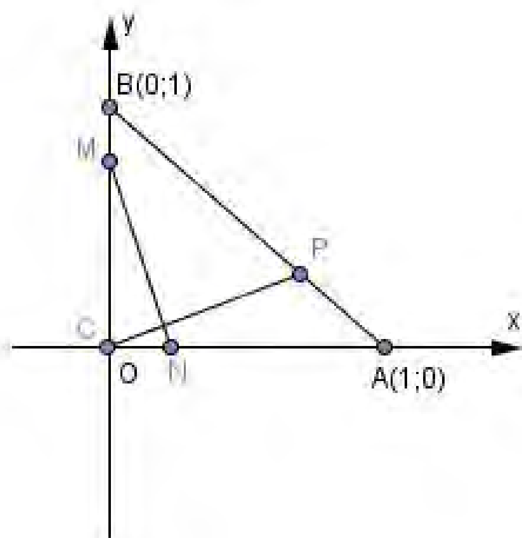
Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv C$, tia Ox ≡ CA và tia Oy≡ CB

Ta có toạ độ các điểm C(0; 0), A(1; 0), B(0; 1).

Từ giả thiết ta đặt

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB} = k$$

Do đó



$$\begin{cases} \vec{CM} = \dfrac{1}{1+k}\vec{CB} \\ \vec{CN} = \dfrac{k}{1+k}\vec{CA} \\ \vec{CP} = \dfrac{1}{1+k}\vec{CA} + \dfrac{k}{1+k}\vec{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(0;\dfrac{1}{1+k}\right) \\ N\left(\dfrac{k}{1+k};0\right) \\ P\left(\dfrac{1}{1+k};\dfrac{k}{1+k}\right) \end{cases}$$

Từ đó $\vec{MN}.\vec{CP} = \dfrac{k}{(1+k)^2} - \dfrac{k}{(1+k)^2} = 0 \Rightarrow CP \perp MN$

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{k^2+1}{(1+k)^2} = \overrightarrow{CP}^2$$

BÀI TOÁN 3.4.11. ***Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi At là tia phân giác của góc A. Qua trung điểm M của cạnh huyền BC ta dựng đường thẳng vuông góc với tia At cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Chứng minh BE = CF.***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv A$, tia Ox ≡ AB và tia Oy≡ AC

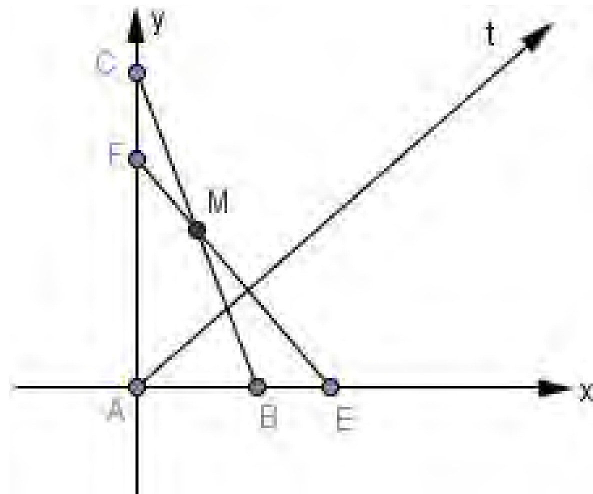
Ta có toạ độ các điểm A(0; 0), B(b; 0) , C(0; c).

Dễ dàng ta tìm được toạ độ

$E\left(\dfrac{b+c}{2};0\right)$ và $F\left(0;\dfrac{b+c}{2}\right)$

Từ đó suy ra

$BE = \left|\dfrac{c-b}{2}\right|$ và $CF = \left|\dfrac{b-c}{2}\right|$

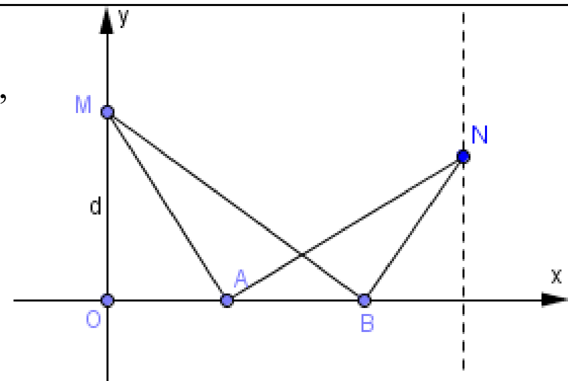


BÀI TOÁN 3.4.12. ***Cho hai điểm A, B cố định và một đường thẳng d vuông góc với AB, nhưng không đi qua A, B. Môt điểm M chạy trên d.Tìm tập hợp giao điểm N của các đường thẳng vuông góc với MA, MB tại Avà B.***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O = d \cap AB$, tia Ox ≡ AB và tia Oy≡ d

Ta có toạ độ các điểm A(a; 0), B(b; 0), M(0; m).Gọi N(x; y)



Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NA} = 0 \\ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{NB} = 0 \end{cases}$

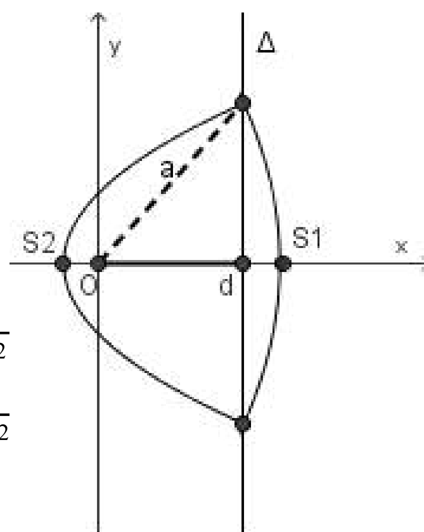
$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-x)+my=0 \\ b(b-x)+my=0 \end{cases}$

Giải hệ ta được x = a+b.

Vậy tập hợp giao điểm N là đường thẳng vuông góc Ox tại H có hoành độ $\overline{OH} = a+b$.

BÀI TOÁN 3.4.13. ***Tìm quỹ tích những điểm M trên mặt phẳng có tổng khoảng đến một điểm cố định I và một đường thẳng cố định Δ bằng một số a dương cho trước.***

☺ **Hướng dẫn giải :**



Chọn hệ trục toạ độ vuông góc Oxy sao cho $O \equiv I$ và $Ox \perp \Delta$ và Δ có phương trình $x = d > 0$

Ta phải tìm quỹ tích những điểm M(x ; y) sao cho $\sqrt{x^2+y^2} + |x-d| = a$ (1)

.Nếu $x \ge d$ thì $\sqrt{x^2+y^2} + |x-d| \ge \sqrt{x^2+y^2}$

.Nếu $x < d$ thì $\sqrt{x^2+y^2} + |x-d| = d + (\sqrt{x^2}$

Như vậy các trường hợp xãy ra là

d > a : quỹ tích M là tập rỗng

d = a : từ lý luận trên (1) $\Leftrightarrow y = 0$, $0 \le x \le a$: quỹ tích M đoạn thẳng nối từ I đến chân đường vuông góc hạ từ I lên Δ.

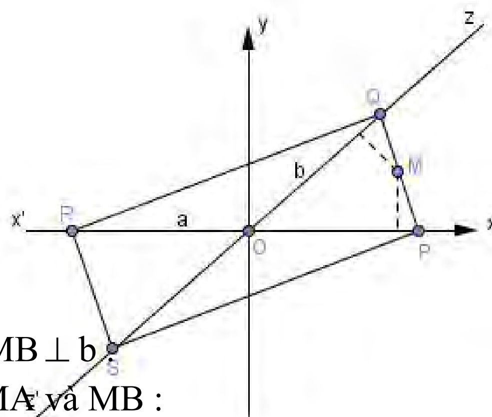
d < a : Khi $x \ge d$, từ (1) $\Rightarrow y^2 = 2(a+d)(\frac{a+d}{2} - x)$

Khi $x < d$, từ (1) $\Rightarrow y^2 = 2(a-d)(\frac{a-d}{2} + x)$

Như vậy quỹ tích M là 2 nhánh của 2 Parabol(khoảng giữa S1,S2) có phương trình như trên.

BÀI TOÁN 3.4.14. ***Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Tìm tập hợp những điểm M sao cho tổng***

khoảng cách từ đó tới a và b luôn luôn bằng số 1 không đổi .



☺ **Hướng dẫn giải :**

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy với O là giao điểm của a và b , Ox là đường thẳng a sao cho đường thẳng b có phương trình y = kx (k > 0)

Giả sử M(x ; y) là điểm nào đó , kẻ MA ⊥ a , MB ⊥ b .

Khi đó , ta có thể tính được các khoảng cách MA và MB :

$$MA = |y| \, , MB = \frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Vậy, với điều kiện bài toán là $|y| + \dfrac{|kx - y|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ (1) .

Ta chia các trường hợp sau :

a) TH1: $\begin{cases} y \le kx \\ y \ge 0 \end{cases}$. Dễ thấy rằng khi đó M nằm trong góc xOz .

$$(1) \Leftrightarrow y + \frac{kx - y}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow kx + \left(\sqrt{k^2+1} - 1\right) y - \sqrt{k^2+1} = 0 \quad (2)$$

Như vậy , tập hợp M là phần đường thẳng (2) nằm trong góc xOz , tức là đoạn PQ (hình vẽ) .

b) TH2: $\begin{cases} y \ge kx \\ y \ge 0 \end{cases}$. Khi đó M nằm trong góc zOx' và :

$$(1) \Leftrightarrow y + \frac{-kx + y}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow -kx + \left(\sqrt{k^2+1} + 1\right) y - \sqrt{k^2+1} = 0 \quad (3)$$

Như vậy tập hợp M là phần đường thẳng (3) nằm trong zOx', tức là đoạn thẳng PR (hình vẽ) .

Dễ thấy rằng tích vô hương của hai vectơ pháp tuyến :

$\vec{n}_{PQ} = \left(k \, ; \sqrt{k^2+1} - 1\right)$, $\vec{n}_{PR} = \left(-k \, ; \sqrt{k^2+1} + 1\right)$ bằng 0, tức là PQ ⊥ PR

Tương tự như trường hợp a) và b) , ta xét các trường hợp :

c) $y \le 0$ và $y \le kx$

d) $y \le 0$ và $y \ge kx$,

Ta đi đến kết luận :***Tập hợp các điểm M là một hình chữ nhật QPRS có tâm là O và hai đường chéonằm trên a và b.***

BÀI TOÁN 3.4.15. ***Cho hai điểm A, B cố định, AB = a không đổi và hai điểm C, D di động sao cho CD = b không đổi, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$, AC + BD = 2(a+b). Tìm quĩ tích giao điểm M của AD và BC***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Vẽ $ME \,//\, AC, MF \,//\, BD \quad (E, F \in AB)$

Ta có: $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}; \quad \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}$

Suy ra: $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{a}{a+b}; \quad \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{a}{a+b}$

$\Rightarrow BE = \dfrac{a^2}{a+b}, \quad AF = \dfrac{a^2}{a+b}$

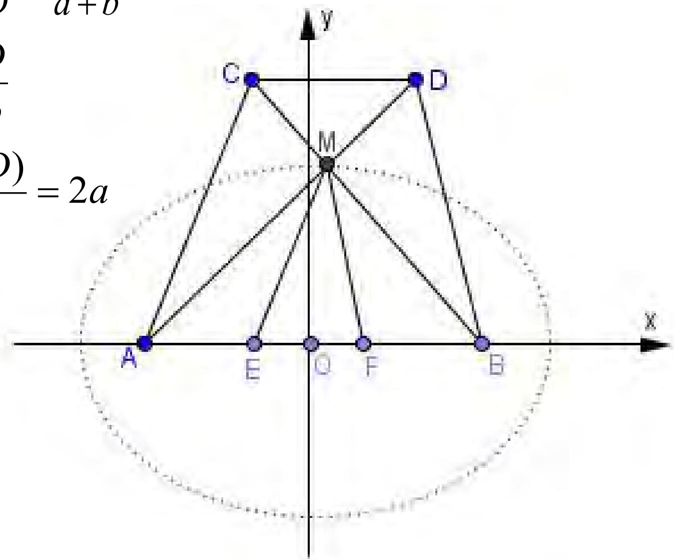
Suy ra: E và F cố định.

Vì $\dfrac{ME}{AC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{a}{a+b}; \quad \dfrac{MF}{BD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{a}{a+b}$

nên $ME = \dfrac{a.AC}{a+b}, \quad MF = \dfrac{a.BD}{a+b}$

Suy ra: $ME + MF = \dfrac{a.(AC+BD)}{a+b} = 2a$

không đổi.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, với O là trung điểm của EF.

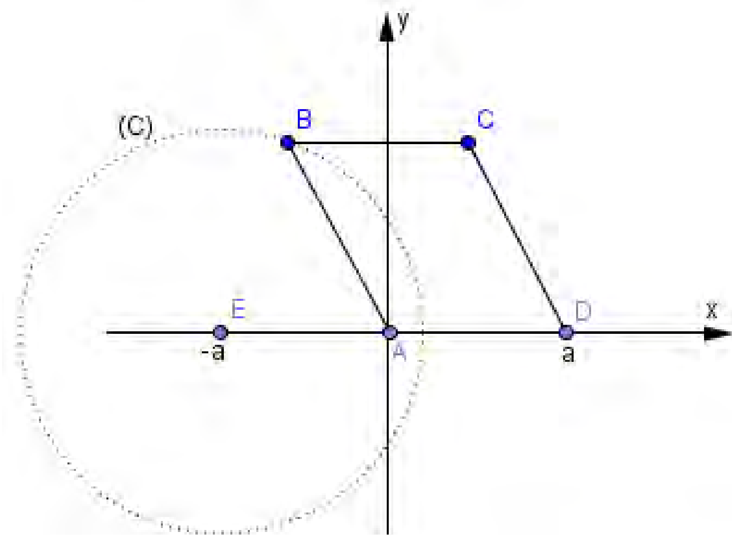
Ta có tập hợp điểm M là một Elip nhận E và F làm hai tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 2a.

BÀI TOÁN 3.4.16. ***Hình bình hành $ABCD$ thay đổi trong đó A và D cố định thoả: $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BD}{BA}$. Tìm tập hợp điểm B và C.***

☺ **Hướng dẫn giải :**

Trong mặt phẳng Oxy, chọn $A \equiv O(0;0)$; $D(a;0)$ với $AD = a$ (không đổi)

Theo giả thiết hình bình hành $ABCD$ thay đổi nên



lấy $B(x;y)$ và $C(x+a;y)$

bất kỳ với điều kiện $y \neq 0$.

Khi đó:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BD}{BA} \Leftrightarrow AC.BA = AD.BD$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2} = a.\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2ax+a^2).(x^2+y^2) = a^2.(x^2+y^2-2ax+a^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+2ax(x^2+y^2)+2a^3x-a^4=0 \qquad (*)$$

((*) là phương trình bậc hai với ẩn (x^2+y^2))

Tính $\Delta' = (ax)^2-(2a^3x-a^4)=(a^2-ax)^2$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=-ax+(a^2-ax) \\ x^2+y^2=-ax-(a^2-ax) \quad (!!!) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+2ax+y^2=a^2 \Leftrightarrow (x+a)^2+y^2=2a^2$$

Vậy tập hợp điểm B là đường tròn (C) có tâm $I(-a;0)$, bán kính $R_B = a\sqrt{2}$, bỏ hai điểm $\left(-a\left(\sqrt{2}+1\right);0\right)$ và $\left(a\left(\sqrt{2}-1\right);0\right)$

Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Vậy tập hợp điểm C là đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AD}$. Đường tròn (C') có tâm $A \equiv O(0;0)$, bán kính $R_C = a\sqrt{2}$, bỏ hai điểm $\left(-a\sqrt{2};0\right)$ và $\left(a\sqrt{2};0\right)$.

BÀI TOÁN 3.4.17. Cho đường tròn (C) tâm O và tiếp tuyến d tiếp xúc với (C) tại một điểm A cố định trên (C). M là một điểm trên mặt phẳng, kẻ tiếp tuyến MT với (C) và hạ MH vuông góc với d.

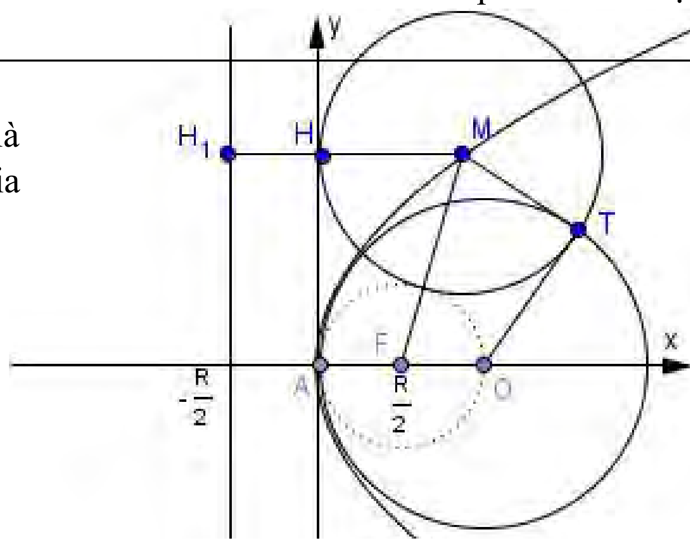
1. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa MT = MH.
2. Chứng minh các đường tròn tâm M bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

☺ **Hướng dẫn giải :**

1. Chọn hệ trục Oxy sao cho A là gốc tọa độ, tia Ox ≡ AO và tia Oy ≡ d.

Khi đó O(R; 0), giả sử M(x; y)

Ta có



$MH = MT \Rightarrow MH^2 = MT^2 = MO^2 - R^2$

$\Leftrightarrow x^2 = (x - R)^2 + y^2 - R^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 2Rx$.

Vậy quỹ tích M là parabol

2. Theo định nghĩa của parabol, ta có MF = MH_1 = MH + $\frac{R}{2}$

   Suy ra MF = MT + $\frac{R}{2}$, điều này chứng tỏ đường tròn tâm M bán kính MT tiếp xúc đường tròn cố định tâm F bán kính $\frac{R}{2}$.

BÀI TOÁN 3.4.18. ***Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.***

☺ **Hướng dẫn giải**

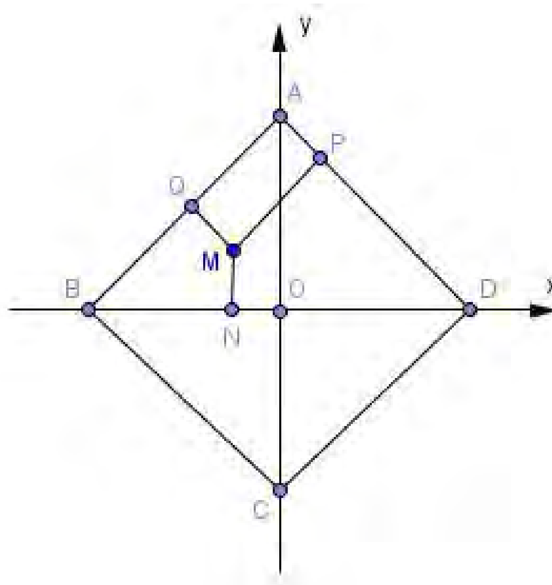
Không mất tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh $\sqrt{2}$.

Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy sao cho A(0;1), B(–1;0), C(0;–1), D(1;0).

Gọi M(x;y) là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN,MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại N, P, Q.

Do đó: MP.MQ = MN^2 (1) (xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ đỉnh A)

AB: x – y + 1 = 0, AD: x + y – 1 = 0



$(1) \Leftrightarrow \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}.\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = |y|^2 \Leftrightarrow |x^2-(y-1)^2| = 2y^2$

M(x;y) ở trong hình vuông nên x – y + 1 > 0, và x + y – 1 < 0.

Do đó: $x^2 - (y-1)^2 = (x - y + 1)(x + y - 1) < 0$

Nên (1) $\Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = -2y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$

Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung ¼ đường tròn C, bán kính R = $\sqrt{2}$.

Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.

BÀI TOÁN 3.4.19. ***Cho đường thẳng cố định a và một điểm A cố định trên a. Gọi (C) là đường tròn lưu động ở trong một nữa mặt phẳng (α) có bờ a. (C) có bán kính không đổi R và luôn tiếp xúc với a, gọi M là tiếp điểm. Gọi I là tâm của đường tròn (C).Chứng minh rằng trong mặt phẳng chứa đường tròn (C), có một parabol (P) cố định sao cho trục đẳng phương của (C) và đường tròn đường kính AI luôn luôn tiếp xúc (P) khi M thay đổi trên a.***

☺ **Hướng dẫn giải**

Trong mặt phẳng chọn hệ trục tọa độ Đề–các vuông góc Oxy, với Ox trùng với a, nữa mặt phẳng α là nữa mặt phẳng y > 0, O trùng A. Đặt M(m;0) có tâm I(m;R).

Phương trình của (C) là:

(C): $(x - m)^2 + (y - R)^2 = R^2$ hay

C): $x^2 + y^2 - 2mx - 2Ry + m^2 = 0$.

Phương trình đường tròn đường kính AI là:

(C’): $(x - m/2)^2 + (y - R/2)^2 = \frac{m^2 + R^2}{4}$ hay

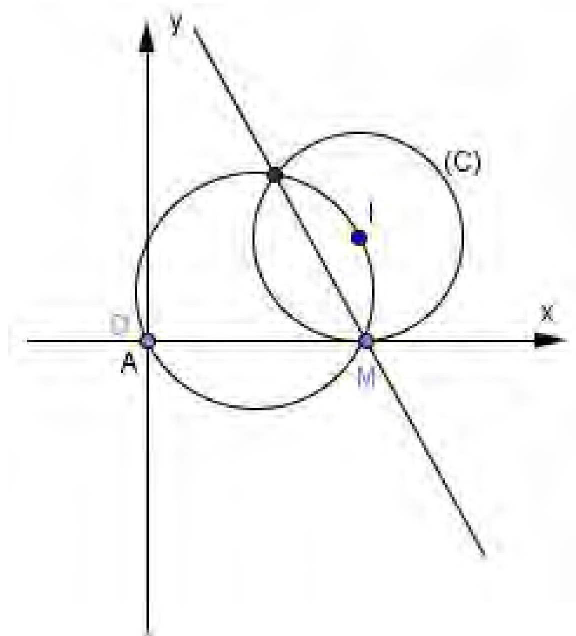
(C’): $x^2 + y^2 - mx - Ry = 0$.

Phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C’) là:

(d): $mx + Ry - m^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ (d): $y = f(x) = -\frac{m}{R}x + \frac{m^2}{R}$.

Xét hàm số $y = g(x) = -\frac{1}{4R}x^2$.



Hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{R}x + \frac{m^2}{R} = -\frac{1}{4R}x^2 \\ -\frac{m}{R} = -\frac{x}{2R} \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2m)^2 = 0 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow x = 2m$

Vậy Parabol $y = f(x) = -\dfrac{1}{4R}x^2$ luôn tiếp xúc với trục đẳng phương (d).

BÀI TOÁN 3.4.20. ***Cho tam giác với 3 cạnh a, b, c mà 3 đỉnh có tọa độ nguyên. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. CMR: abc ≥ 2R.***

☺ **Hướng dẫn giải:**

Gọi tam giác là $A_1A_2A_3$ như hình vẽ $S_{A_1A_2A_3} = S = \dfrac{abc}{4R}$

Do đó yêu cầu bài toán ⇔ chứng minh $S \geq \dfrac{1}{2}$

Giả sử: $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. Gọi A'_1, A'_2, A'_3 là hình chiếu của A_1, A_2, A_3 lên Oy.

Ta có: $S = S_{A_1A_2A'_2A'_1} - S_{A_1A_3A'_3A'_1} - S_{A_2A_3A'_3A'_2}$

$$= A'_1A'_2 \cdot \frac{A_1A'_1 + A_2A'_2}{2} - A'_1A'_3 \cdot \frac{A_1A'_1 + A_3A'_3}{2} - A'_2A'_3 \cdot \frac{A_2A'_2 + A_3A'_3}{2}$$

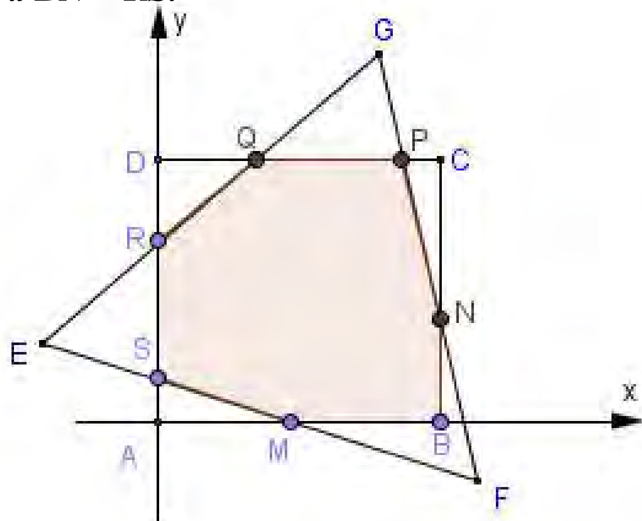
$\Rightarrow 2S = (y_1 - y_2)(x_1 + x_2) - (y_1 - y_3)(x_1 + x_3) - (y_3 - y_2)(x_2 + x_3)$ (*)

Vế trái (*) là số nguyên (do đề bài cho x_i, y_i nguyên)

⇒ 2S là số nguyên ⇒ 2S ≥ 1 ⇒ S ≥ ½.

BÀI TOÁN 3.4.21. ***Trên mặt phẳng xét một hình vuông ABCD và một tam giác đều EFG cắt nhau tạo thành một thất giác lồi MBNPQRS. Chứng minh rằng nếu SM = NP = QR ⇔ MB = PQ và BN = RS.***

☺ **Hướng dẫn giải:**



Chọn hệ trục Axy như hình vẽ. Gọi a là cạnh của hình vuông.

Ta có A(0; 0), B(a; 0), C(a; a), D(0; a), M(m; 0), N(a; n), P(p; a), Q(q; a), R(0; r), S(0; s)

Nếu SM = NP = QR

Ta có $\overrightarrow{SM} = k\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{NP} = k\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{QR} = k\overrightarrow{GE}$ với $k = \dfrac{SM}{EF}$

Ta có $\vec{EF}+\vec{FG}+\vec{EG}=\vec{0} \Rightarrow \vec{SM}+\vec{NP}+\vec{QR}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+p-a-q=0 \\ -s-n+r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-m=p-q \\ n=r-s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB=PQ \\ BN=RS \end{cases}$$

Nếu MB = PQ và BN = RS thì $\vec{MB}+\vec{PQ}=\vec{0}$, $\vec{BN}+\vec{RS}=\vec{0}$ kết hợp

$\vec{SM}+\vec{MB}+\vec{BN}+\vec{NP}+\vec{PQ}+\vec{QR}+\vec{RS}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{SM}+\vec{NP}+\vec{QR}=\vec{0} \Rightarrow x\vec{EF}+y\vec{FG}+z\vec{GE}=\vec{0}$

$\Rightarrow (x-z)\vec{EF}=(z-y)\vec{FG}$

Vì $\Rightarrow \vec{EF}$, $\vec{FG}$ không cùng phương nên $\Rightarrow x=y=z \Rightarrow$ SM = NP = QR.

BÀI TOÁN 3.4.22. ***Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong và ngoài góc A cắt cạnh BC tại D và E. Chứng minh rằng nếu AD = AE thì*** $AB^2+AC^2=4R^2$ ***(trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).***

☺ **Hướng dẫn giải:**

Chọn hệ trục như hình vẽ

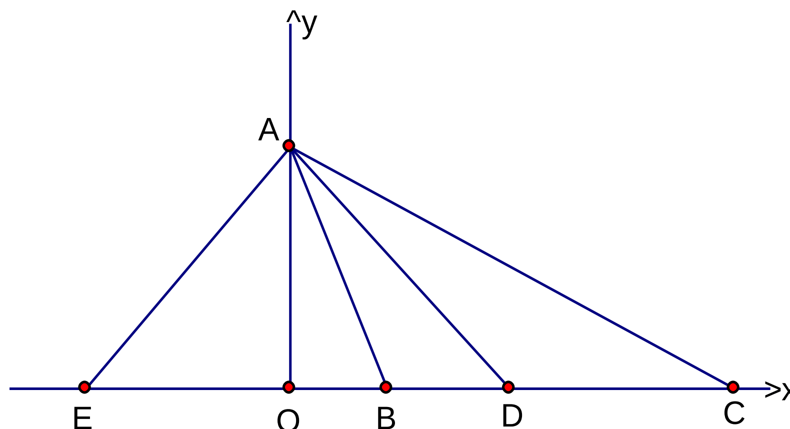
Theo giả thiết tam giác ADE vuông cân tại A.

.Khi đó OA = OE = OD nên $B(b;0), A(0;a), D(a;0), E(-a;0), C(c;0)$

Theo tính chất đường phân giác $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{DB^2}{DC^2}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{(c-a)^2}=\frac{b^2+a^2}{c^2+a^2} \Leftrightarrow (b-a)^2(c^2+a^2)=(c-a)^2(b^2+a^2) \Leftrightarrow c=\frac{a^2}{b}$$

Ta có $AB^2+AC^2=(a^2+b^2)+(a^2+\dfrac{a^4}{b^2})=\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}\right)^2$



Gọi I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

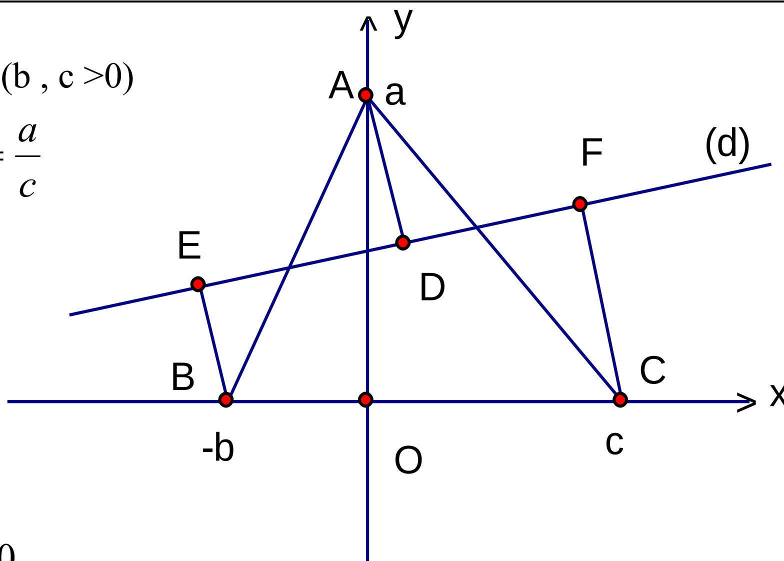
$$\begin{cases} AI = BI \\ BI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b^2 + a^2}{2b} \\ a \end{cases}$$

Suy ra $4R^2 = 4AI^2 = 4\left[\left(\dfrac{b^2 + a^2}{2b}\right)^2 + (a-a)^2\right] = \left(\dfrac{b^2 + a^2}{b}\right)^2$

Từ đó suy ra $AB^2 + AC^2 = 4R^2$

BÀI TOÁN 3.4.23. ***Cho tam giác ABC nhọn. (D) là một đường thẳng thay đổi. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (D). Biết rằng $AD^2 \tan A + BE^2 \tan B + CF^2 \tan C = 2S_{ABC}$. Xác định vị trí của đường thẳng (D) để AD lớn nhất.***

☺ **Hướng dẫn giải:**



Chọn hệ trục như hình vẽ (b , c >0)

Ta có $\tan B = \dfrac{a}{b}, \tan C = \dfrac{a}{c}$

$$\tan A = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B.\tan C - 1} = \frac{a(b+c)}{a^2 - bc}$$

$2S_{ABC} = a(b+c)$

Giả sử phương trình (d) :

$x.\sin\alpha + y.\cos\alpha + d = 0$

$AD = d(A,d) = |a\cos\alpha + d|$

$BE = d(B,d) = |-b\sin\alpha + d|$

$CF = d(C,d) = |c\sin\alpha + d|$

Theo giả thiết $AD^2 \tan A + BE^2 \tan B + CF^2 \tan C = 2S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow (a\cos\alpha + d)^2 \frac{a(b+c)}{a^2 - bc} + \frac{a}{b}(-b\sin\alpha + d)^2 + \frac{a}{c}(c\sin\alpha + d)^2 = a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow bc.\cos^2\alpha + 2ad.\cos\alpha + \frac{a^2 d^2}{bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a}.\cos\alpha + d = 0$$

Điều này chứng tỏ (d) đi qua $H\left(0;\frac{bc}{a}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

Vậy AD max = AH, khi (d) đi qua H và song song với BC.

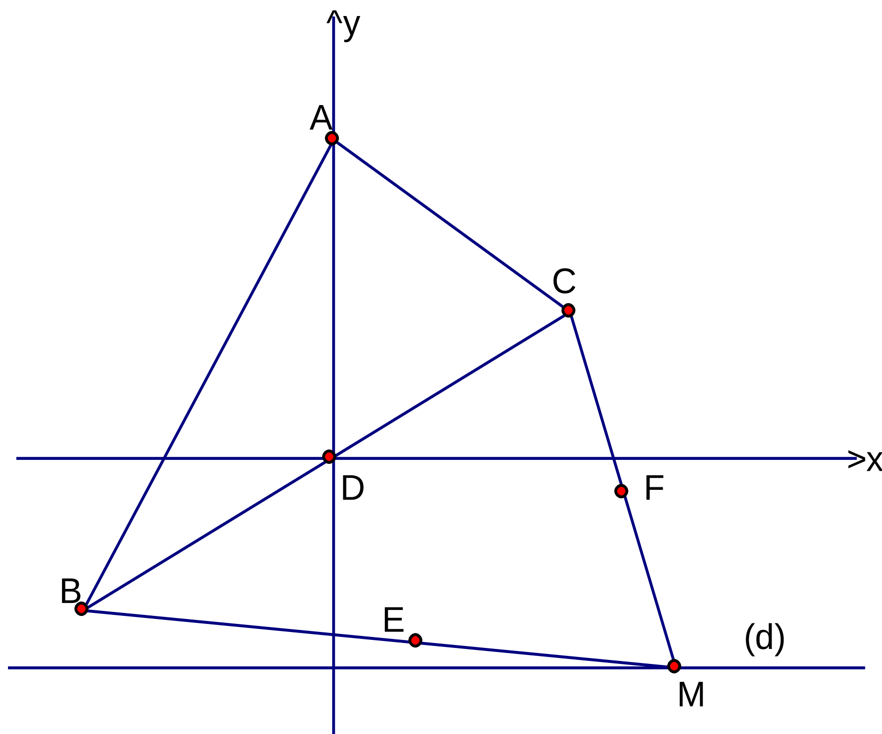
BÀI TOÁN 3.4.24. ***Cho tam giác ABC, trung tuyến AD .Cho đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AD. Xét điểm M trên (d). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MB và MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với (d) cắt đường thẳng AB tại P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với (d) cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi M di động trên (d).***

(*trích đề thi HSG Quốc gia 2007 – 2008*)

☺ **Hướng dẫn giải:**

Chọn hệ trục như hình vẽ $O \equiv D, Oy \equiv DA$.

Khi đó Ox song song (d), A(0;a), B(b; c) , C(–b; –c)



Phương trình đường thẳng

$AB:(a-c)x+by-ab=0$

$AC:(a+c)x-by+ab=0$

$M(x_M;d)$

Khi đó $(d_1): x=\frac{b+x_M}{2}$, $(d_2): x=\frac{b-x_M}{2}$

Từ đó suy ra tọa độ $P=d_1 \cap AB$, $Q=d_2 \cap AC$

Suy ra đường thẳng đi qua M và vuông góc PQ có phương trình

$$b^2\left(x-\frac{bc}{a}\right)-(ax_M-bc)\left(y-d+\frac{b^2}{a}\right)=0$$

Suy ra đường thẳng đi qua điểm cố định $\left(\frac{bc}{a}\,;\,d-\frac{b^2}{a}\right)$.

BÀI TOÁN 3.4.25. ***Cho góc Ixy và điểm P nằm bên trong góc. Đường tròn thay đổi qua I và P cắt hai tia Ix, Iy lần lượt tại A, B. Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác IAB.***

(*trích đề thi chọn đội tuyển trường Phổ Thông Năng Khiếu 2008 – ngày thi thứ 2*)

☺ **Hướng dẫn giải:**

Ta dựng hệ trục tọa đô Oy là đường trung trực của IP. Khi đó tọa độ các điểm là: $I(-1;0),\ P(1;0),\ C(0;a),\ D(0;b)$ (b < 0) là giao diểm của đường trung trực IP và hai tia Ix, Iy.

Gọi K(0; m) là tâm đường tròn thay đổi qua I và P.

Phương trình đường IC: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{a}=1 \Leftrightarrow y=ax+a$

Phương trình đường ID: $y=bx+b$.

Phương trình đường tròn (K) là:

$$x^2+(y-m)^2=m^2+1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2mx-1=0$$

Tọa độ giao điểm A của IC và (K) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=ax+a \\ x^2+y^2-2mx-1=0 \end{cases} (x\neq -1)$$

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{2ma+1-a^2}{1+a^2};\frac{a(2ma+2)}{1+a^2}\right)$

Tương tự ta có tọa độ điểm $B\left(\frac{2mb+1-b^2}{1+b^2};\frac{b(2ma+2)}{1+b^2}\right)$

Từ đó ta có tọa độ G trọng tâm tam giác IAB là:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1}\right) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1}\right)m \\ y_G = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1}\right) + \dfrac{2ab}{3}\left(\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1}\right)m \end{cases} \quad (*)$$

Từ đó, ta có tọa độ G luôn chạy trên đường thẳng có phương trình tham số là (*)

Giới hạn: ta có: $\begin{cases} x_A \geq -1 \\ x_B \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{-1}{a} \\ m \leq \dfrac{-1}{b} \end{cases}$

Do đó quỹ tích điểm G là đoạn thẳng thỏa phương trình (*) với $m \in \left[\dfrac{-1}{a}; \dfrac{-1}{b}\right]$

Quỹ tích trực tâm H xin dành cho bạn đọc.

PHẦN 3.5

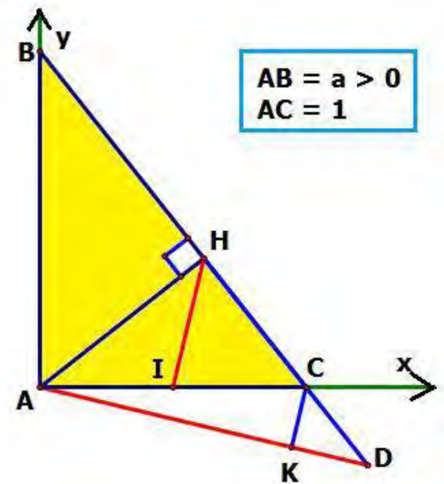
ỨNG DỤNG HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VÀO VIỆC CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG OXY.

Ở phần này, chúng ta sẽ xét các bài toán trong tọa độ Oxy mà khi dựng hình ta lại "bắt gặp" các tính chất hình học như vuông góc, song song, cạnh bằng nhau, góc bằng nhau, v.v... Và dĩ nhiên đôi khi việc chứng minh chúng bằng thuần túy hình học hay sử dụng công cụ vecto không phải lúc nào cũng thực hiện một cách tối ưu và triệt để. Cách tốt nhất trong tinh huống này ta hãy "tạm quên đi hệ tọa độ Oxy", giữ lại các tính chất của hình học phẳng và bắt đầu "đặt hệ trục tọa độ mới" cho hình nhằm mục đích chứng minh các tính chất đó. Mời bạn đọc cùng theo dõi.

BÀI TOÁN 3.5.1.*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử* $H(-5;-5), K(9;-3)$ *và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng* $x - y + 10 = 0$ *. Tìm tọa độ điểm A.*

(*trích đề thi chính thức kì thi THPT Quốc Gia 2015*)

Hướng dẫn giải



* Ta có $\angle AHC = \angle CKA = 90^o$

$\Rightarrow \angle AHC + \angle CKA = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác AHCK nội tiếp.

Gọi I là trung điểm AC

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK

$\Rightarrow$ IK = IH (*)

Mặt khác I $\in$ d: x – y + 10 = 0 $\Rightarrow I(t;t+10)$.

Do đó

$(*) \Leftrightarrow HI^2 = KI^2$

$\Leftrightarrow (t+5)^2 + (t+15)^2 = (t-9)^2 + (t+13)^2$

$\Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$

* Đặt AB = a, AC = 1. Dựng hệ trục Axy như hình vẽ.

Ta có $A(0;0), B(0;a), C(1;0)$

Ta có $BH.BC = AB^2 \Leftrightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{a^2}{a^2+1} \Rightarrow \overrightarrow{BH} = \dfrac{a^2}{a^2+1}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow H\left(\dfrac{a^2}{a^2+1}; \dfrac{a}{a^2+1}\right)$

Ta có H là trung điểm BD $\Rightarrow D\left(\dfrac{2a^2}{a^2+1}; \dfrac{-a^3+a}{a^2+1}\right)$ và $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ là tung điểm AC.

Nên $\begin{cases} \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{a^2-1}{2(a^2+1)}; \dfrac{a}{a^2+1}\right) \\ \overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{2a^2}{a^2+1}; \dfrac{-a^3+a}{a^2+1}\right) \end{cases}$.

Xét $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2(a^2-1)+a(-a^3+a)}{(a^2+1)^2} = 0 \Rightarrow IH \perp AD$

* Đường AD qua K(9; – 3) nhận $\overrightarrow{IH} = (-5;-15) = -5(1;3)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là: $1(x-9)+3(y+3)=0 \Leftrightarrow \boxed{AD: x+3y=0}$

* A là giao điểm AD và đường tròn đường kính AC nên tọa độ A thỏa mãn hê:

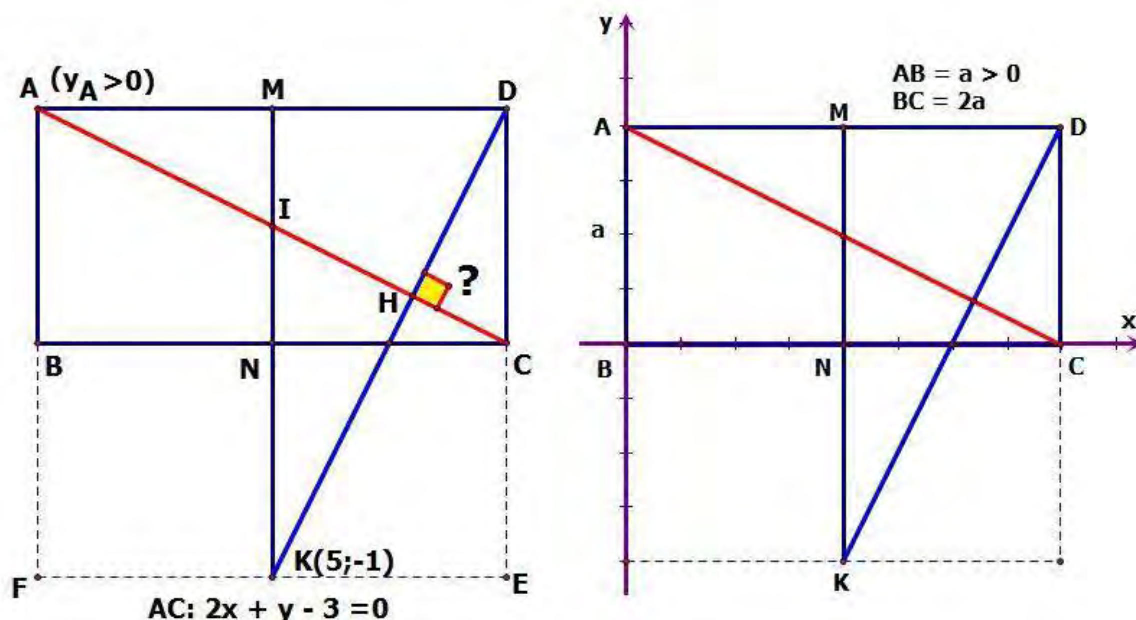
$\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+(y-10)^2=250 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \Rightarrow x=-15 \\ y=-3 \Rightarrow x=9 \end{array}\right.$ suy ra A(–15;5) hay A(9;–3) (loại vì trùng K)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

BÀI TOÁN 3.5.2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AD = 2AB, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC. Trên đường thẳng MN lấy điểm K sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MK. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết* $K(5;-1)$*, phương trình đường thẳng chứa cạnh* $AC: 2x+y-3=0$ *và điểm A có tung độ dương.*

(*trích đề thi thử tỉnh Bắc Ninh năm 2014*)

Hướng dẫn giải



Dựng hệ trục Bxy như hình vẽ, Đặt cạnh AB = a > 0 ⇒ AD = 2AB = 2a

Ta có: $A(0;a)$, $C(2a;0)$, $D(2a;a)$, $K(a;-a)$

Mặt khác $\begin{cases} \overrightarrow{AC}=(2a;-a) \\ \overrightarrow{KD}=(-a;-2a) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KD}=-2a^2+2a^2=0 \Rightarrow$ **AC ⊥ KD tại H.**

* Gọi H = AC ∩ KD. Do KD ⊥ AC: 2x + y – 3 = 0 ⇒ KD: x – 2y + m = 0.

KD qua K(5; –1) ⇒ m = –7. Vậy **KD: x – 2y – 7 = 0**

* Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{5} \\ y=\dfrac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{-11}{5}\right)$

* Ta có A ∈ AC: 2x + y – 3 = 0 ⇒ A(a; 3 – 2a).

Do A có tung độ dương nên 3 – 2a > 0 $\Rightarrow a<\dfrac{3}{2}$ và $\overrightarrow{KA}=(a-5;4-2a)$

Mặt khác $AK = KD = \frac{5}{3}KH = \frac{5}{3}d[K;AC] = \frac{5}{3}.\frac{|5.2-1.1-3|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5}$

Suy ra $AK^2 = 20 \Leftrightarrow (a-5)^2 + (4-2a)^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1(n) \\ a = \frac{21}{5}(l) \end{array}\right. a < \frac{3}{2}$.

Vậy $A(1;1)$.

* Lại có

$$\frac{IH}{HC} = \frac{HD}{HK} = \frac{IK}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AI+IH}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}+\frac{3IC}{5}}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}+\frac{3AC}{10}}{AC} = \frac{4}{5}$$

Suy ra $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = \frac{5}{4}\left(\frac{13}{5}-1\right) \\ y_C - 1 = \frac{5}{4}\left(\frac{-11}{5}-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3;-3)}$

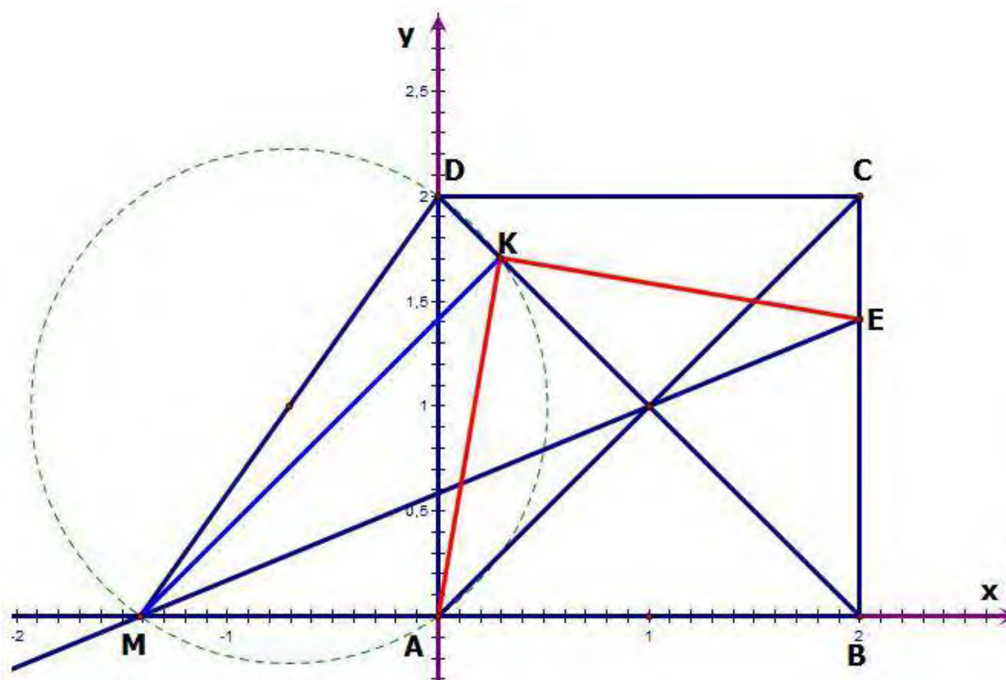
* Gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD $\Rightarrow$ I là trung điểm AC và BD và I(2;–1)

Ta có $\frac{IK}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IK} \Rightarrow \boxed{D(1;-3)} \xrightarrow{I(2;-1)} \boxed{B(3;1)}$

BÀI TOÁN 3.5.3. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chohình vuông ABCD tâm I, trên cạnh BC lấy điểm $E(2;\sqrt{2})$ sao cho EB = AI. Gọi M giao điểm giữa đường thẳng EI và AB. Đường tròn đường kính MD cắt BD tại K. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng phương trình đường thẳng AK là: $(3+2\sqrt{2})x - y = 0$, B thuộc đường thẳng $d: 4x - y - 8 = 0$ và có hoành độ nguyên.*

(*Trích đề thi thử số 2, Thử sức trước kì thi THPT Quốc Gia, Facebook: Group Toán 3K, năm 2015*)

Hướng dẫn giải



* Dựng hệ trục Axy như hình vẽ và đặt AB = a > 0 ta có

$$A(0;0),\text{E}(a;\frac{a\sqrt{2}}{2}),C(a;a),B(a;0),D(0;a)$$

Ta có đoạn ME lần lượt cắt các cạnh của AB, AC, BC của ΔABC tại M, I, E nên theo định Lý Ménélaus,

Ta có:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{IC}{IA}.\frac{MA}{MB}=1\Rightarrow\frac{MA}{MB}=\frac{MA}{MA+AB}=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow MA=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=EB\Rightarrow M(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0)$$

* B∈ Ax, D ∈ Ay ⇒ BD: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Leftrightarrow \boxed{BD: x+y-a=0}$

Do K ∈ đường tròn đường kính MD

⇒ MK ⊥DK ⇒ MK ⊥ BD ⇒ MK: $x-y+m=0$.

MK qua M $\Rightarrow m=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\boxed{MK: x-y+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0}$

K = MK ∩ BD $\Rightarrow K\left(a\frac{2-\sqrt{2}}{4};a\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$

$$\overrightarrow{AK}=\left(a\frac{2-\sqrt{2}}{4};a\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \text{ và } \overrightarrow{EK}=\left(a\frac{-\sqrt{2}-2}{4};a\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

* Xét $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{EK}=0\Leftrightarrow AK\perp EK\Rightarrow$ d[E;AK] = EK = $\sqrt{3}$

Tứ giác KEAB là tứ giác nội tiếp có góc KBA = góc KEA = 45°

Nên ΔAKE vuông cân tại K. ⇒ AE = EK$\sqrt{2}$ = $\sqrt{6}$

* Mặt khác ΔAEB có $AE^2 = AB^2 + EB^2 \Rightarrow EB^2 = 2(*)$. Ta có B ∈ d ⇒ B(b; 4b – 8) (b ∈ Z).

Giải Phương trình (*) ⇒ b = 2 ⇒**B(2;0).**

Ta có $\overrightarrow{BC} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB} \Rightarrow \boxed{C(2;1)}$. Viết phương trình AB ⊥ BC và AB qua B

⇒ AB: y = 0

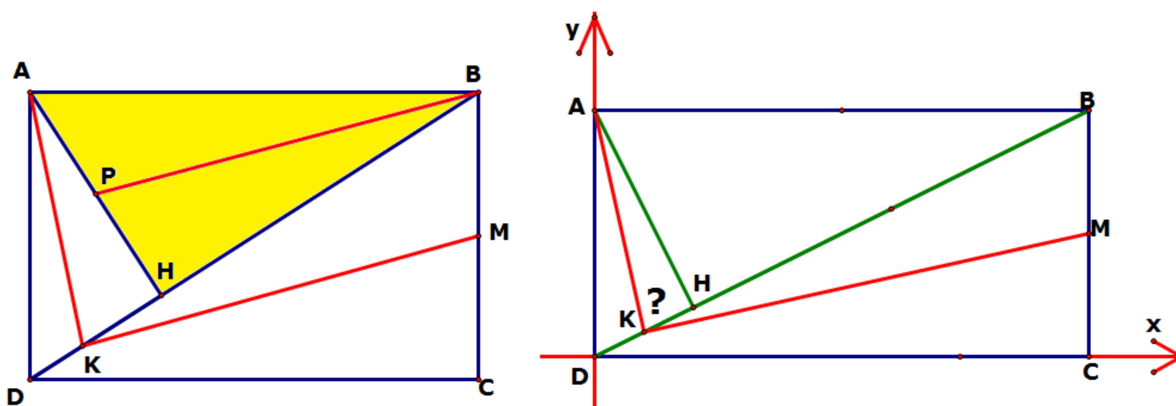
AB ∩ AK = A ⇒**A(0; 0)** và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \boxed{D(0;2)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;0),\ B(2;0),\ C(2;1),\ D(0;2)}$

BÀI TOÁN 3.5.4.*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm H(1;2) là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm* $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ *là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của* ΔADH *là d:* $4x + y - 4 = 0$. *Viết phương trình cạnh BC.*

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Triệu Sơn 5, Thanh Hóa, năm 2015*)

Hướng dẫn giải



* Dựng hệ trục Dxy như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, đặt cạnh CD = 2, AD = 2a > 0.

Khi đó tọa độ D(0; 0), A(0; 2a), C(2; 0), B(2; 2a), M(2; a).

Ta có $DH.DB = AD^2 \Rightarrow DH = \frac{AD^2}{DB} = \frac{4a^2}{\sqrt{4a^2+4}} \Rightarrow \frac{DH}{DB} = \frac{a^2}{a^2+1}$

Suy ra $\overrightarrow{DH} = \frac{a^2}{a^2+1}\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{a^2}{a^2+1}.2 \\ y_H = \frac{a^2}{a^2+1}.2\text{a} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2a^2}{a^2+1};\frac{2a^3}{a^2+1}\right)$

Gọi K là trung điểm DH nên ta có tọa độ $K\left(\frac{a^2}{a^2+1};\frac{a^3}{a^2+1}\right)$

Xét $\begin{cases} \overrightarrow{AK} = \left(\frac{a^2}{a^2+1};\frac{-a^3-2a}{a^2+1}\right) \\ \overrightarrow{MK} = \left(\frac{-a^2-2}{a^2+1};\frac{-a}{a^2+1}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MK} = \frac{1}{a^2+1}\left(-a^4-2a^2+a^4+2a^2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{AK \perp MK}$

* Phương trình KM: đi qua $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ và vuông góc với AN có phương trình:

MK: $x - 4y + \frac{15}{2} = 0$ suy ra Toạ độ $K\left(\frac{1}{2};2\right)$

* Do K là trung điểm của HD nên D(0;2)

Suy ra phương trình (BD): y – 2 = 0

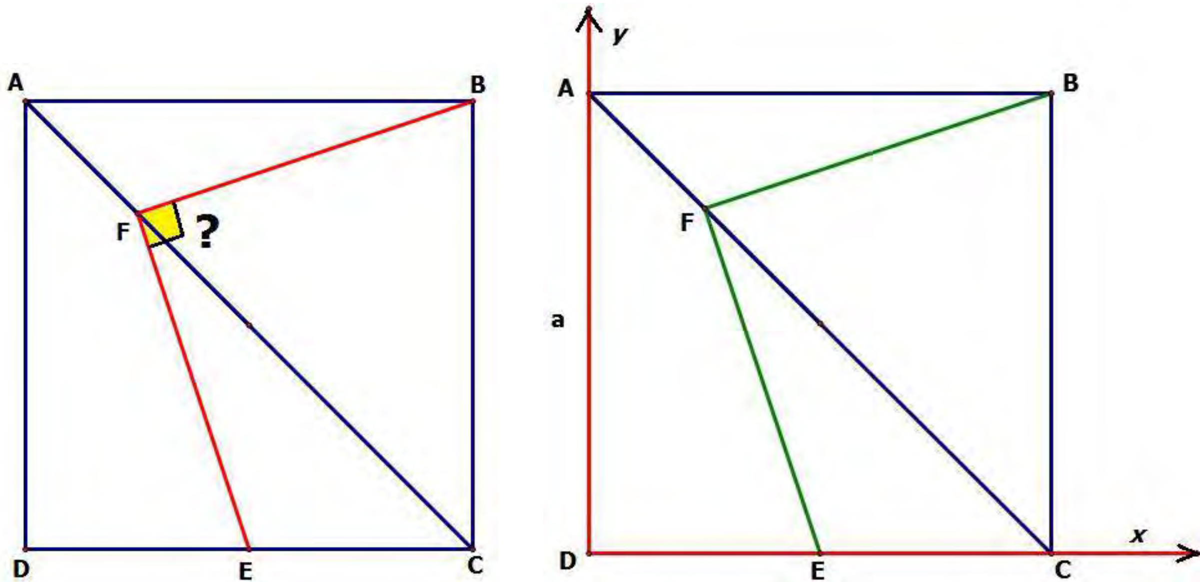
AH: x – 1 = 0 và A(1; 0) suy ra AD: 2x + y – 2 = 0

* BC qua M và song song vớiAD nên BC: 2x + y – 12 = 0.

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{BC: 2x + y - 12 = 0}$

BÀI TOÁN 3.5.5. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm E(1; 2) là trung điểm của cạnh CD. Gọi F là một điểm trên đoạn AC sao cho CF = 3AF. Biết phương trình đường thẳng chứa cạnh BF là x – 3y – 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng AB.*

Hướng dẫn giải



- Chúng ta sẽ tạm quên hết các dữ kiện về phương trình đang có được trong mặt phẳng Oxy, chỉ giữ lại các yếu tố về hình phẳng.
- Dựng hệ trục tọa độ mới Dxy như hình vẽ, đặt cạnh hình vuông bằng a (a > 0). Tọa độ hóa các điểm đã cho và xét $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}$.

Khi đó ta có $E = \left(\frac{a}{2};0\right), B(a;a), F\left(\frac{a}{4};\frac{3a}{4}\right)$.

Nên ta có: $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{-a}{4};\frac{3a}{4}\right), \overrightarrow{FB} = \left(\frac{3a}{4};\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB} = 0 \Rightarrow EF \perp BE$

* Do EF ⊥ BF: x – 3y – 5 = 0 ⇒ EF: 3x + y + m = 0. EF qua E(1;2) ⇒ m = – 5. Vậy EF: 3x + y – 5 = 0. Ta có tọa độ F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(2;-1)}$$

* Ta có độ dài EF = $\frac{a\sqrt{10}}{4} = \sqrt{10} \Rightarrow$ a = 4. Gọi M(x ; y) là trung điểm AB ta có:

$$\begin{cases} MF = \frac{AC}{4} = \sqrt{2} \\ ME = BC = 4 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \end{cases}$ *(Phần giải tiếp xin dành cho bạn đọc)*

Suy ra $M_1(1;2)$ hay $M_2\left(\frac{17}{5};\frac{-6}{5}\right)$

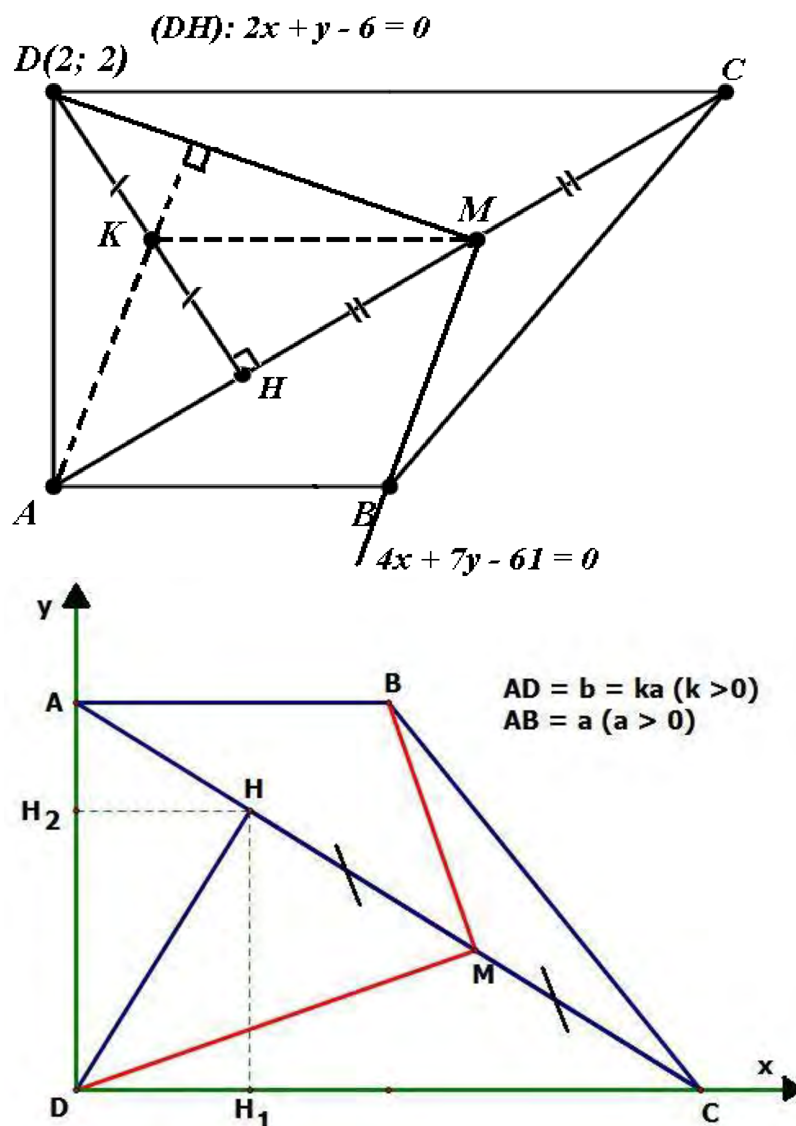
* TH1: AB qua $M_1(1;2)$ nhận $\overrightarrow{M_1E} = (0;4)$ làm VTPT có phương trình: **y + 2 = 0**

* TH2: AB qua $M_2\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{-6}{5}\right)$ nhận $\overrightarrow{M_1E}=\left(\dfrac{-12}{5};\dfrac{16}{5}\right)$ làm VTPT có phương trình: 3x – 4y + 15 = 0.

Vậy phương trình đường thẳng là ***AB : y + 2 = 0 hay AB: 3x – 4y + 15 = 0***

BÀI TOÁN 3.5.6. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D(2;2), cạnh CD = 2AB. Gọi H là hình chiếu của D lên cạnh AC và M là trung điểm HC. Biết rằng phương trình đường thẳng DH: 2x + y – 6 = 0 và đường thẳng BM: 4x + 7y – 61 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của hình thang ABCD.*

Hướng dẫn giải.



* Dựng hệ trục **Dxy** như hình vẽ (DC ⊥ AD).

Gọi H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu của H lên tia Dx, Dy.

* Đặt độ dài cạnh AB = a (a > 0) ⇒CD = 2AB = 2a.

Và độ dài cạnh AD = b = ka (k > 0).

* Ta có $\Delta ADC \perp D$ có đường cao DH:

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}\Rightarrow DH^2=\frac{DA^2.DC^2}{DA^2+DC^2}=\frac{4k^2a^2}{k^2+4}$$

* Trong $\Delta CHD \perp H$ có HH_1 là đường cao có $DH_1.DC = DH^2$ (hệ thức lượng trong Δ vuông)

Suy ra $\boxed{DH_1{}^2=\frac{DH^2}{DC}=\frac{2k^2a}{k^2+4}}$

* Tương tự với $\Delta AHD \perp H$ có HH_2 là đường cao $\Rightarrow \boxed{DH_2{}^2=\frac{DH^2}{DA}=\frac{4ka}{k^2+4}}$

* Ta có tọa độ của các điểm là D(0; 0), C(2a; 0), B(a; ka),

$$H\left(\frac{2k^2}{k^2+4}a;\frac{4k}{k^2+4}a\right).$$

Do M là trung điểm HC $\Rightarrow M\left(\frac{2k^2+4}{k^2+4}a;\frac{2k}{k^2+4}a\right)$

* Do đó, $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{2k^2+4}{k^2+4}a;\frac{2k}{k^2+4}a\right)$ và $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{k^2}{k^2+4}a;\frac{-k^3-2k}{k^2+4}a\right)$

Xét : $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{BM}=\frac{(2k^2+4)k^2+2k(-k^3-2k)}{k^2+4}a=0\Rightarrow$ **DM ⊥BM (đpcm)** .

* DM ⊥ BM ⇒ (DM): 7x – 4y + m = 0, (DM) qua D(2; 2) ⇒ m = – 6

⇒ (DM): 7x – 4y – 6 = 0

Ta có M = DM ∩ BM ⇒ tọa độ M thỏa hệ:

$$\begin{cases}4x+7y-61=0\\7x-4y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{22}{5}\\y=\frac{31}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{22}{5};\frac{31}{5}\right)$$

Mặt khác AC ⊥ DH ⇒ (AC): x – 2y + n = 0, (AC) qua $\mathbf{M(\frac{22}{5};\frac{31}{5})}$

⇒ n = 8 ⇒ **(AC): x – 2y + 8 = 0**

Ta có H = AC ∩ DH ⇒ tọa độ $H(\frac{4}{5};\frac{22}{5})$. Do M là trung điểm HC ⇒**C(8; 8)**

* AD qua D (2; 2) nhận $\overrightarrow{DC}=(6;6)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng :

6(x – 2) + 6(y – 2) = 0 ⇔ (AD): x + y – 4 = 0.

Tương tự ta có A = AD $\cap$ AC $\Rightarrow$**A(0; 4)**

* Lại có CD = 2AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ (*phần giải tiếp xin dành cho bạn đọc*)

$\Rightarrow$ B (3; 7)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là A(0; 4), B(3; 7) và C(8; 8)

Chương 4. PHÂN TÍCH & HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG OXY ĐÃ THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG (từ năm 2002 đến năm 2015)

*Trong chương 4 này, dựa trên kiến thức đã tổng hợp ở chương 1, phương pháp, kỹ năng, kinh nghiệm đã giới thiệu ở chương 2 và 3, tác giả phân tích tìm lời giải cũng như hướng dẫn giải chi tiết đề thi Đại Học – Cao Đẳng từ năm 2002 đến 2015 nhằm mục đích giúp các bạn có thể "cọ xát" và "làm quen" với một đề thi chính qui có tính phân loại cao. Để tiện cho việc theo dõi, xin được trình bày các bài toán dưới đây theo tiến trình thời gian và cũng cần lưu ý trong các đề thi từ năm 2002 đến năm 2008 có kèm thêm **đề dự bị** của Bộ GD&ĐT.*

Đề thi dự trữ (hay còn gọi là đề dự bị) chỉ có từ năm 2002 đến 2008. Kể từ năm 2009 trở đi Bộ GD&ĐT không công bố đề dự bị nữa. Cột mốc năm 2009 đánh dấu cho một sự thay đổi lớn trong cải cách Giáo dục với việc một bộ Sách giáo khoa mới gồm 2 chương trình Cơ bản và Nâng cao ra đời vì vậy đề thi trong các năm từ 2009 đến 2013 cũng có 2 phần tương ứng để thí sinh lựa chọn. Đến năm 2014, theo xu hướng kết hợp kì thi 2 trong 1 (vừa xét tốt nghiệp THPT vừa xét vào các trường Đại học – Cao Đẳng), đề thi không còn "phần cơ bản" và "phần nâng cao" nữa. Đặc biệt trong lần hợp nhất hai kì thi tốt nghiệp THPT và kì thi tuyển sinh Đại Học – Cao Đẳng thành kì thi THPT Quốc Gia 2015, đề thi cũng có nhiều thay đổi. Không còn nhiều khối thi mà thay vào đó chỉ có còn mọt bài thi môn Toán duy nhất.

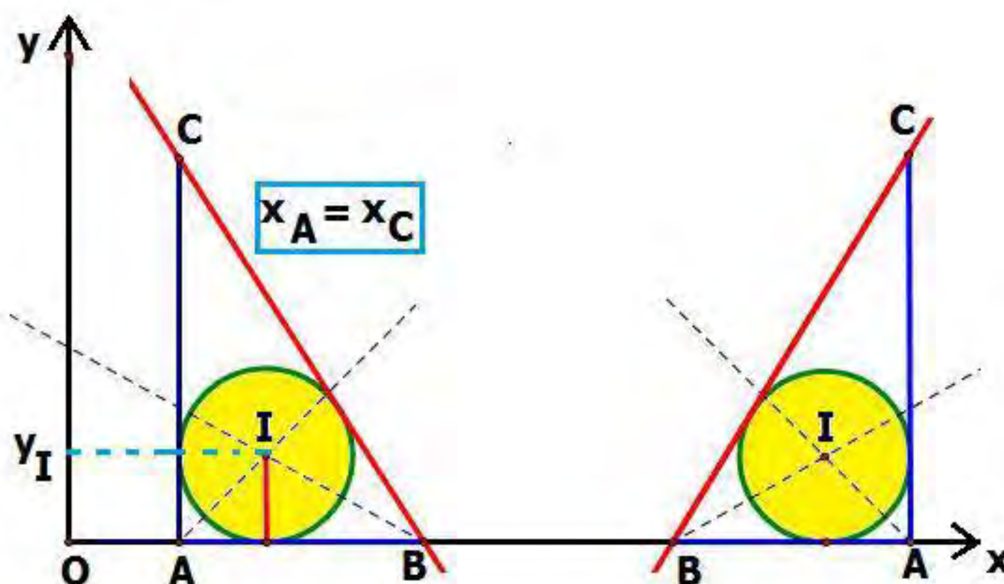
Đặc biệt, nếu ôn tập theo đúng chương trình giảm tải và cấu trúc mới của đề thi THPT Quốc Gia thì các bạn có thể không cần xem kỹ các phần Hypebol và Parabol (bởi phần này thuộc phần nâng cao).

CÂU 1 (CHÍNH THỨC – ĐH A2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

■ **Đặt vấn đề :** Chúng ta có thể thấy năm 2002 là năm đầu tiên mà một kì thi "ba chung" được tiến hành dưới sự chủ trì của Bộ GD&ĐT, nếu so sánh với các đề thi những năm gần đây trong giai đoạn từ 2010 đến 2014 thì đề thi ở mức tương đương nhau, các vấn đề mà đề thi đề cập đến rất đa dạng, nhưng xoay quanh các câu hỏi như "tìm tọa độ điểm, viết phương trình đường thẳng, đường tròn, các đường conic hay bài toán liên quan đến cực trị trong hình học phẳng , v,v…". Trong câu 1 này, đề bài yêu cầu tìm trọng tâm G của tam giác ABC. Nhưng có lẽ khó khăn nhất mà các bạn phải trải qua chính là việc khai thác bán kính đường tròn nội tiếp tam giác như thế nào ? Mời các bạn xem lời giải!

■ **CÁCH 1***:* Vẽ hình kèm hệ trục tọa độ Oxy

☺**Nhận xét *:*** Tọa độ của điểm A và B đều thuộc trục hoành, do $\Delta ABC \perp A$ nên C là hình chiếu của A lên trên trục hoành. Có rất nhiều thuận lợi cho việc giải bài toán này khi ta kèm vào hệ trục tọa độ.



☻**Ý tưởng***:*

_ Để tìm tọa độ G → dùng công thức trọng tâm → phải tìm được tọa độ của 3 điểm A, B, C.

_ Tọa độ của điểm B là tìm được dễ dàng nhất do nhận xét $B = BC \cap Ox$.

_ Đến đây ta thấy rằng do $A \in Ox$ → tham số hóa điểm A và vì A là hình chiếu của C lên Ox (do ΔABC vuông tại A) $\Rightarrow x_A = x_C$. Lại có $C \in BC$ → biểu diễn tọa độ C theo tọa độ A.

_ Để khai thác bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC → ta dùng công thức diện tích với lưu ý:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{AB+BC+CA}{2}r \text{ với } r = 2.$$

► Hướng dẫn giải cách 1:

* Ta có $BC \cap Ox = B \Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;0)}$$

* Do $A \in Ox \Rightarrow A(a; 0)$.

Do A là hình chiếu của C lên trục hoành $\Rightarrow x_C = x_A = a$.

Lại có $C \in BC$: $x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y_C = a\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow C(a; a\sqrt{3} - \sqrt{3})$

* Ta có G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2a+1}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$$

* Ta có $\begin{cases} AB = |a-1| \\ AC = \sqrt{3}|a-1| \\ BC = 2|a-1| \end{cases}$. Mặt khác, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{AB+BC+CA}{2}r$

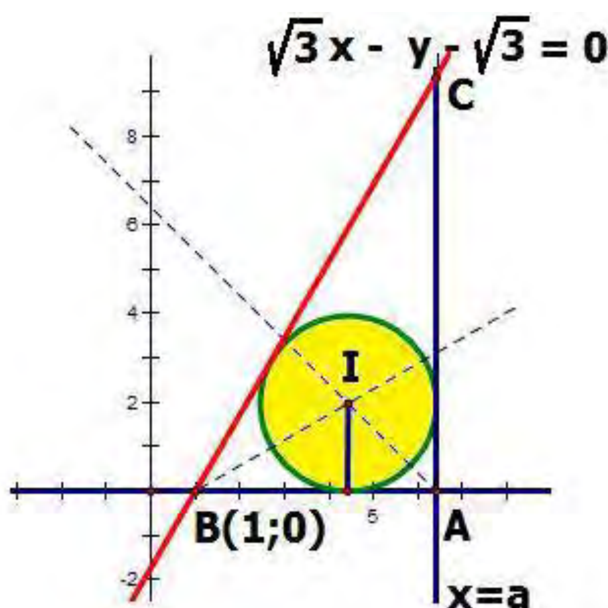
Suy ra:

$$r = \frac{AB.AC}{AB+BC+CA} = \frac{\sqrt{3}(a-1)^2}{(3+\sqrt{3})|a-1|} = 2 \Leftrightarrow |a-1| = 2(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2\sqrt{3}+3 \\ a = -2\sqrt{3}-1 \end{array}\right.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} G_1\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \\ G_2\left(\dfrac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}\right.$

Vậy điểm G thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} G_1\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \\ G_2\left(\dfrac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}\right.}$

■ **CÁCH 2: BC:** $x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = x\sqrt{3} - \sqrt{3}$



☺**Nhận xét :** mỗi một đường thẳng có dạng y = kx + m đều tạo góc với trục hoành. Một trong số những trường hợp đặc biệt đó chính là khi $k \in \left\{\frac{\pm\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{3}, \pm 1\right\}$ thì tương ứng với các góc 30°, 45°, 60°.

☻**Ý tưởng**:

_ Tương tự cách 1, ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm B = BC ∩ Ox và thiết lập trọng tâm G theo tọa độ a.

_ Ở đây ta có thể khai thác r = 2 = d[I;AB] = d[I; Ox] = $|y_I|$ (khoảng cách từ 1 điểm đến trục hoành bằng trị tuyệt đối tung độ của điểm đó và ngược lại)

_ Từ hệ số k ta suy ra góc hợp giữa BC và BA là 60° ⇒ góc hợp giữa phân giác BI và BA bằng 30° → viết phương trình BI → tìm được tọa độ I.

_ Ta có AC: x = a nên nếu xét d[I; AC] = 2 ⇒ tìm được a → tìm được G.

► **Hướng dẫn giải cách 2:** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

* Ta có BC ∩ Ox = B ⇒ tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;0)}$$

* Do A ∈ Ox ⇒ A(a; 0). Do A là hình chiếu của C lên trục hoành

⇒ $x_C = x_A = a$ ⇒ **AC: x – a = 0**

Lại có C ∈ BC: $x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y_C = a\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow C(a; a\sqrt{3} - \sqrt{3})$

* Ta có G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2a+1}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{2a+1}{3}; \dfrac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$$

* BC có hệ số góc là $k_{BC} = \sqrt{3} = |\tan(BC; Ox)| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} CBA = 60^o \\ CBA = 120^o \end{array}\right.$

Do $\Delta ABC \perp A \Rightarrow CBA$ là góc nhọn $\Rightarrow CBA = 60^o$

$\Rightarrow$ Đường phân giác trong BI có dạng: $y = \tan 30^o(x - x_B) + y_B$

Suy ra BI: $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$.

* Do I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC và A, B thuộc Ox

$\Rightarrow d[I; AB] = r = 2 \Leftrightarrow d[I; Ox] = 2$

Suy ra $|y_I| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_I = 2 \xrightarrow{BI} x_I = 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow I_1(1+2\sqrt{3}; 2) \\ y_I = -2 \xrightarrow{BI} x_I = 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow I_2(1-2\sqrt{3}; -2) \end{array}\right.$

* TH1: Nếu A và O khác phía đối với B $\Rightarrow x_I = 1 + 2\sqrt{3}$

Suy ra $d[I_1; AC] = 2 \Leftrightarrow a = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow G_1\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

* TH2: Nếu A và O cùng phía đối với B $\Rightarrow x_I = 1 - 2\sqrt{3}$

Suy ra $d[I_2; AC] = 2 \Leftrightarrow a = -1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow G_2\left(\dfrac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

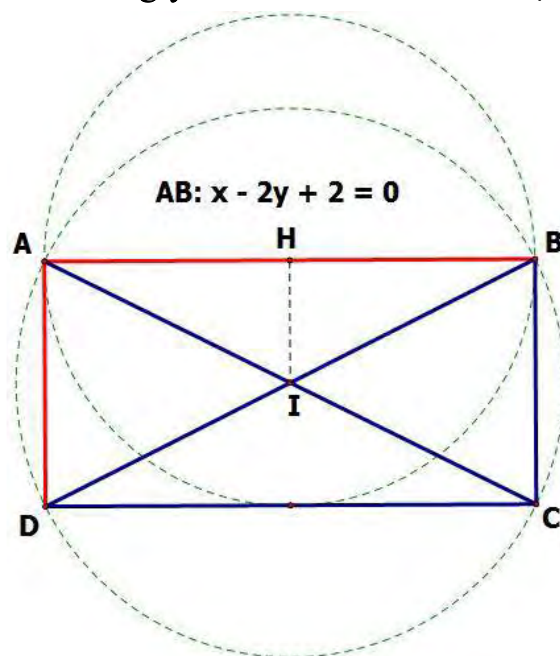
Vậy điểm G thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} G_1\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \\ G_2\left(\dfrac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}\right.}$

■ **Lời bình**: Rõ ràng việc khai thác hệ trục tọa độ Oxy kèm vào hình vẽ giúp ích cho ta rất nhiều trong quá trình giải bài toán này. Việc khai thác theo cách thứ 2, tuy dài hơn, nhiều trường hợp hơn nhưng lại cho ta thấy một hướng khai thác khác của tâm đường tròn nội tiếp tam giác ở khía cạnh lập đường phân giác, tâm nội tiếp cách đều ba cạnh và đặc biệt khai thác hệ số góc của một đường thẳng là như thế nào ? Có thể với bài toán

này, bạn chưa thể vận dụng nó một cách tối ưu có thể nhưng ở những bài sau biết đâu lại làm nên chuyện.

CÂU 2 (CHÍNH THỨC – ĐH B2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và AB = 2AD. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết đỉnh A có hoành độ âm.

■ **Đặt vấn đề :** So với đề thi Đại học – Cao Đẳng 2002 của khối A và D, thì phần hình học phẳng Oxy của khối B có vẻ **"nhẹ thở"** hơn rất nhiều. Bạn sẽ không gặp quá nhiều khó khăn trong việc tìm lời giải cho bài toán này vì dạng hình chữ nhật có rất nhiều yếu tố để ta có thể tận dụng và khai thác. Vậy đó là những yếu tố nào ? Mời các bạn xem lời giải.



■ **CÁCH 1*: Tính khoảng cách từ I đến đường AB*.**

☻**Ý tưởng**:

_ Trong 4 điểm A, B, C, D cần tìm thì điểm A và B là có thể tìm dễ dàng hơn vì A, B $\in$ AB, và xét thấy ta cũng không cần phải đặt ẩn cho C và D bởi lẽ khi tìm được A và B thông qua tâm I $\rightarrow$ tọa độ C và D.

_ Vấn đề đặt ra lúc này là tìm tọa độ điểm A và B bằng cách nào ? Ta có thể xét A,B trong sự tương giao giữa các đường với nhau. Ở đây ngoài việc A, B $\in$ AB, ta còn thấy A và B đang thuộc **đường tròn ẩn mình** (C) tâm I bán kính IA $\rightarrow$ làm sao tính IA ?

_ Để tính IA tất là đã liên quan đến độ dài → nghĩ ngay đến khoảng cách → trong bài này hiện tại miễn cưỡng ta chỉ có thể tính được d[I; AB] → vậy chúng có liên hệ gì với nhau ? →AD = 2d[I; AB] và $IA = \frac{BD}{2}$ và AB = 2AB và BD là cạnh huyền trong ΔABD → liên kết chúng lại ta tính được độ dài IA.

_ Giải hệ giao giữa đường thẳng AB và đường tròn (C) → tìm được A và B.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có: $d[I;AB] = \frac{|\frac{1}{2} - 2.0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = 2d[I;AB] = \sqrt{5}$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow BD = 5$

* Ta có I là tâm hình chữ nhật ABCD $\Rightarrow IA = \frac{BD}{2} = \frac{5}{2}$

* {A; B} = AB ∩ (C), trong đó (C) là đường tròn tâm I bán kính IA = 5 ⇒ Tọa độ A và B thỏa hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$ (việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc)

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-2;0), B(2;2) \\ A(2;2), B(-2;0) \end{array}\right.$ Do A có hoành độ âm nên ta nhận $\boxed{A(-2;0), B(2;2)}$

* Vì I là trung điểm của BD và AC ⇒ $\boxed{C(3;0), D(-1;-2)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$\boxed{A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)}$

■ **CÁCH 2:** Viết phương trình hai đường chéo AC và BD.

☻ **Ý tưởng**:

_ Tương tự ý tưởng từ cách 1, nhưng lần này ta sẽ sự tương giao giữa hai đường thẳng AB và AC → viết phương trình đường AC ?

_ Muốn viết phương trình đường thẳng Δ ? (Mời các bạn xem lại chương 2 – chủ đề 2 nhé!) → Gọi phương trình AC qua điểm I và có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$. Như vậy ta chỉ phải thiết lập 1 phương trình có chứa đựng quan hệ a và b → ta có thể vận dụng **kỹ thuật dùng khoảng cách hoặc góc ở đây**.

_ Một nhận xét quan trọng AB = 2AD (cũng chính là gợi ý của đề) → ta tính được góc giữa AC và AB.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi phương trình AC qua I nhận $\overrightarrow{n_{AC}} = (a;b), (a^2+b^2>0)$ làm vtpt có dạng: $AC:\ a(x-\frac{1}{2})+b(y-0)=0$

* Ta có AB = 2AD = 2BC ⇒ $\tan BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos BAC = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan BAC)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

* Ta có $\cos BAC = |\cos(AB;AC)| = |\cos(\overrightarrow{n_{AB}};\overrightarrow{n_{AC}})| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $\overrightarrow{n_{AB}};\overrightarrow{n_{AC}}$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của AB và AC. Do đó ta có

$$\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (a-2b)^2 = 4(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2+4ab=0\ (*)$$

* Nhận xét b = 0, (*) ⇒ a = 0 (loại). Với b ≠ 0, ta chọn b = –3 nên (*)

$$\Leftrightarrow a^2-4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right.$$

* Với a = 0 ⇒ AC: y = 0.

Tương tự ta có A = AC ∩ AB ⇒ A(–2; 0) (nhận).

Do I là trung điểm AC ⇒ C(3; 0)

* Với a = 4 ⇒ AC: 4x – 3y – 2 = 0. Ta có A = AC ∩ AB ⇒ A(2; 2) (**loại vì A có hoành độ âm**). Do BD và AC cùng qua I và tạo với AB một góc bằng nhau nên nếu AC: y = 0 ⇒ **BD: 4x – 3y – 2 = 0.**

Do đó BD ∩ AB = B ⇒ B(2; 2) và vì I là trung điểm BD ⇒ D(–1; –2)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)}$$

■ **Lời bình**: Qua bài này ta rút ra một số kinh nghiệm,

Một là, việc xét tọa độ của các điểm cần tìm theo "sự tương giao" giữa các đường là một cách làm khá hay. Điều này dẫn đến việc kiến thức tổng hợp của việc lập phương trình đường thẳng (cách 2) và phương trình đường tròn ẩn mình (cách 1).

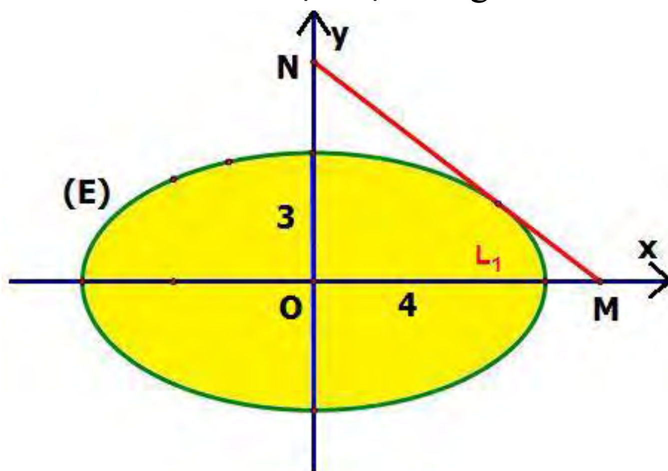
Hai là, một bài toán là hội tụ của rất nhiều kiến thức từ góc, khoảng cách cho đến các tính chất hình học ẩn sau trong hình mà đề bài cho. Với những bài toán cho dạng hình tứ giác mà điển hình là "*hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông*" thì các bạn cũng cần lưu ý đến việc đi tìm giao điểm hai đường chéo (nếu chưa có).

Ba là, với dạng hình chữ nhật này khi bài toán cho quan hệ giữa chiều dài và chiều rộng thì ta có thể khai thác nó theo 3 hướng đó là: tính diện tích, tính khoảng cách,tính góc.

CÂU 3 (CHÍNH THỨC – ĐH D2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$**. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xac định tọa độ M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.**

■ **Đặt vấn đề :** Chủ đề max – min, cực trị trong hình học phẳng cũng là một chủ đề khá hay và mặc dù xét trên tổng thể những câu ra thi đại học những năm gần đây thì không thường xuyên được ra. Nhưng mỗi lần câu hỏi về "lớn nhất, nhỏ nhất" xuất hiện bao giờ cũng tạo nên sự bất ngờ cho người làm bài. Có thể vì không chưa chuẩn bị tốt chưa đó hoặc câu hỏi khá là "xoáy". Với chủ đề tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trong bài toán cực trị hình học phẳng thì ta nên tiếp cận như thế nào ? Có thể có những cách nào để giải quyết bài toán trên. Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺ **Nhận xét** *:* về bản chất, câu hỏi này đang muốn kiểm tra người học về nội dung "tiếp tuyến của Elip" (đây là nội dung nằm trong "chương trình giảm tải" nên có thể các bạn sẽ không giải được nó bằng kiến thức đã học ở Phổ Thông hiện nay. Tuy vậy, xét theo một góc độ nào đó, chúng ta có thể quan tâm đến câu hỏi **"giá trị nhỏ nhất của đoạn MN"**.



☻ **Ý tưởng**:

_ Do đề yêu cầu tìm M, N thỏa mãn MN ngắn nhất → ta tìm biểu thức biểu diễn đoạn MN (nếu là 1 ẩn thì có thể dùng khảo sát hàm, nếu là 2 ẩn trở lên thì vận dụng BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky, v,v...)

_ Trước tiên ta xây dựng dạng của phương trình đường MN theo hai hướng:

+ Hướng thứ 1, do $M \in Ox$, $N \in Oy \Rightarrow$ MN là phương trình đoạn chắn 2 trục tọa độ.

+ Hướng thứ 2, gọi $T(x_o\,;\,y_o)$ thì tiếp tuyến MN của (E) tại T là $\frac{xx_o}{16}+\frac{yy_o}{9}=1$

_ Nếu theo hướng thứ 1, ta có thể dùng điều kiện tiếp xúc giữa MN và (E) để giải → MN → Ở đây ta có thể **vận dụng bất đẳng thức Cauchy hoặc bất đẳng thức Bunyakovsky** để giải tiếp.

_ Nếu theo hướng thứ 2, thì ta biểu diễn được tọa độ M, N theo tiếp điểm T → Tính được độ dài MN theo x_o, y_o. (tương tự như hướng thứ 1, ta có thể vận dụng BĐT Cauchy hoặc Bunyakovsky để giải). Mời các em xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* $M \in Ox \Rightarrow M(m\,;\,0)$, $N \in Oy \Rightarrow N(0\,;\,n)$ (với $m, n > 0$) $\Rightarrow$ MN là phương trình đoạn chắn hai trục tọa độ Oxy có dạng: MN: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$

* Điều kiện để MN tiếp xúc với elip (E) khi và chỉ khi $16\frac{1}{m^2}+9\frac{1}{n^2}=1$

* Áp dụng bất đẳng Cauchy cho hai số không âm,

Ta có $MN^2=m^2+n^2=(m^2+n^2)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)$

$$=25+16\frac{n^2}{m^2}+9\frac{m^2}{n^2}\ge 25+2\sqrt{16.9}=49$$

Suy ra $MN \ge 7$. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{16n^2}{m^2}=\frac{9m^2}{n^2}\\ m^2+n^2=49\\ m>0, n>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=2\sqrt{7}\\ n=\sqrt{21}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M(2\sqrt{7};0)\\ N(0;\sqrt{21})\end{cases}$$

(Lưu ý: Nếu vận dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có thể trình bày như sau: $MN^2 = m^2 + n^2 = (m^2 + n^2)\left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2}\right) \geq \left(m\frac{4}{m} + n\frac{3}{n}\right)^2 = 49$

Suy ra MN ≥ 7. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m : \frac{4}{m} = n : \frac{3}{n} \\ m^2 + n^2 = 49 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7} \\ n = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2\sqrt{7}; 0) \\ N(0; \sqrt{21}) \end{cases}$$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{M(2\sqrt{7}; 0),\ N(0; \sqrt{21}),\ MN_{min} = 7}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi $T(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm T của (E) có dạng: $MN: \frac{xx_o}{16} + \frac{yy_o}{9} = 1$

* Do M, N lần lượt thuộc tia Ox, Oy $\Rightarrow M\left(\frac{16}{x_o}; 0\right), N\left(0; \frac{9}{y_o}\right)$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{16^2}{x_o^2} + \frac{9^2}{y_o^2}$$

* Mặt khác do $T \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x_o^2}{16} + \frac{y_o^2}{9} = 1 \text{ nên } MN^2 = \left(\frac{16^2}{x_o^2} + \frac{9^2}{y_o^2}\right).\left(\frac{x_o^2}{16} + \frac{y_o^2}{9}\right)$$

Suy ra $MN^2 = 25 + 16\frac{y_o^2}{x_o^2} + 9\frac{x_o^2}{y_o^2}$. (Tương tự như cách 1, khi vận dụng BĐT Cauchy hoặc BĐT Bunyakovsky) $\Rightarrow MN \geq 7$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \frac{8}{\sqrt{7}} \\ y_o = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{cases}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{M(2\sqrt{7}; 0),\ N(0; \sqrt{21}),\ MN_{min} = 7}$

■ **Lời bình**: Với những bài toán liên quan đến max – min cực trị trong hình học phẳng có thể có 2 hướng đi dễ thấy nhất

Một là, biểu diễn các giá trị theo một ẩn hoặc nhiều ẩn cho trước. (nếu biểu thức chỉ có 1 ẩn thì ta có thể linh động sử dụng công cụ tìm GTLN – GTNN của hàm số, nếu là đa ẩn (từ 2 ẩn trở lên) thì cách tốt nhất vẫn là vận dụng các BĐT Đại Số như BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky và các BĐT khác.

Hai là, trường hợp không lập được biểu thức biểu diễn giá trị theo một ẩn nào đó thì ta có thể vận dụng tính chất của các **BĐT trong hình học,** muốn vậy thì hình vẽ đóng vai trò rất quan trọng cho việc xây dựng BĐT hình học đó. (phần này mời bạn đọc xem lại chủ đề 5, chương 2 để hiểu rõ hơn). Tuy nhiên trong bài này thì chúng ta đi theo hướng lập biểu thức để tìm giá trị lớn nhất là hợp lý

CÂU 4 (DỰ BỊ 1 – ĐH A2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0,\ \ (C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (C_1), (C_2) và có tâm nằm trên đường thẳng có phương trình $x + 6y - 6 = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

■ **Đặt vấn đề :** Viết phương trình "tiếp tuyến chung của hai đường tròn" là một trong những chủ đề thường gặp trong các đề thi đại học bởi lẽ nó "chạm đến" những vấn đề liên quan như "vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn", "lập phương trình của một đường thẳng", v,v... Với chủ đề này thì có thể có những cách thức tiếp cận nào ? Và có thể có một phương pháp tổng quát để giải dạng toán này không ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

a. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (C_1), (C_2) và có tâm nằm trên đường thẳng có phương trình $x + 6y - 6 = 0$.

☺ **Nhận xét** ***:*** trước khi giải bài toán này, bạn cần lưu ý việc "xét vị trí tương đối giữa hai đường tròn" với mục đích dựng hình và phân tích tìm lời giải.

☻ **Ý tưởng***:*

_ Khi xét vị trí tương đối giữa hai đường tròn ta phát hiện "(C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt".

_ Để lập phương trình đường tròn đi qua 2 giao điểm đó ta có thể thực hiện theo các hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**: tìm giao điểm {A,B} = (C_1) ∩ (C_2) → Gọi I(a;b) là tâm đường tròn cần tìm → giải hệ hai phương trình gồm : IA = IB = R (1) và I ∈ x + 6y – 6 = 0 (2) → tìm được tâm I → tính bán kính R.

+ **Hướng thứ 2**: tìm giao điểm {A,B} = (C_1) ∩ (C_2) → Gọi I(a;b) là tâm đường tròn cần tìm → Gọi dạng phương trình khai triển của đường tròn (C): $\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\ I(a;b),\ R=\sqrt{a^2+b^2-c}}$ → giải hệ ba phương trình gồm: A ∈ (C) (1), B ∈ (C) (2), I ∈ x + 6y – 6 = 0 ⇒ Tìm được a, b, c ⇒ I và R.

+ **Hướng thứ 3**: do (C_1) và (C_2) cắt nhau nên ta vận dụng "phương trình chùm đường tròn qua các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $\boxed{m(x^2+y^2-10x)+n(x^2+y^2+4x-2y-20)=0,\ m^2+n^2>0}$ → biểu diễn tâm I của đường tròn theo m và n → I ∈ x + 6y – 6 = 0 → tìm được quan hệ f(m,n) = 0 (dựa vào điều kiện $m^2+n^2>0$) → chọn m (hoặc n) tùy ý để suy ra phương trình đường tròn.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* (C_1) có tâm $I_1(5;0), R_1=5$ và (C_2) có $I_2(-2;1), R_2=5$.

Xét $\begin{cases}|R_1-R_2|=0\\ R_1+R_2=10\\ I_1I_2=5\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow |R_1-R_2|\le I_1I_2\le R_1+R_2$ ⇒ (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt A, B.

* {A,B} = (C_1) ∩ (C_2) ⇒ tọa độ A, B thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2-10x=0\\ x^2+y^2+4x-2y-20=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A(1;-3),B(2;4)\\ A(2;4),B(1;-3)\end{array}\right.$$

Do vai trò của A và B là như nhau nên ta chọn $\boxed{A(1;-3) \text{ và } B(2;4)}$

* Gọi I là tâm đường tròn (C) cần tìm ta có: I ∈ Δ: x + 6y – 6 = 0 ⇒ I(6 – 6m; m)

Do đó, ta có $AI=BI=R \Leftrightarrow AI^2=BI^2$ với $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=(5-6m;m+3)\\ \overrightarrow{BI}=(4-6m;m-4)\end{cases}$

Suy ra $(5-6m)^2+(m+3)^2=(4-6m)^2+(m-4)^2 \Leftrightarrow m=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases}I(12;-1)\\ R=5\sqrt{5}\end{cases}$$

* Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là: (C): $(x-12)^2+(y+1)^2=125$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là: $\boxed{(C):\ (x-12)^2+(y+1)^2=125}$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Tương tự như cách 1 ta có (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt A, B.
* {A,B} = (C_1) ∩ (C_2) ⇒ tọa độ A, B thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x=0 \\ x^2+y^2+4x-2y-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-3),B(2;4) \\ A(2;4),B(1;-3) \end{array}\right.$$

Do vai trò của A và B là như nhau nên ta chọn $\boxed{A(1;-3) \text{ và } B(2;4)}$

* Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng :

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\ I(a;b),\ R=\sqrt{a^2+b^2-c}$$

* Ta có

$$\begin{cases} A\in(C) \\ B\in(C) \\ I\in\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+9-2a+6b+c=0 \\ 4+16-4a-8b+c=0 \\ a+6b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+6b+c=-10 \\ -4a-8b+c=-20 \\ a+6b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=-1 \\ c=20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(12;-1) \\ R=5\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là: $\boxed{(C):\ (x-12)^2+(y+1)^2=125}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Phương trình chùm đường tròn qua các giao điểm của (C_1) và (C_2) là:

$$\boxed{(C): m(x^2+y^2-10x)+n(x^2+y^2+4x-2y-20)=0,\ (m^2+n^2>0)}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)x^2+(m+n)y^2+(4n-10m)x-2ny-20n=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{4n-10m}{m+n}x-\frac{2n}{m+n}y-\frac{20n}{m+n}=0$$

$$\Rightarrow \text{(C) có tâm } I\left(\frac{5m-2n}{m+n};\frac{n}{m+n}\right)$$

* Mặt khác, tâm I ∈ Δ: x + 6y – 6 = 0 ⇒ m = – 2n.

Nhận xét n ≠ 0 (do $m^2+n^2>0$) nên ta chọn n = 1

Suy ra m = –2. Vậy phương trình $\boxed{(C): x^2+y^2-24x+2y+20=0}$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là:

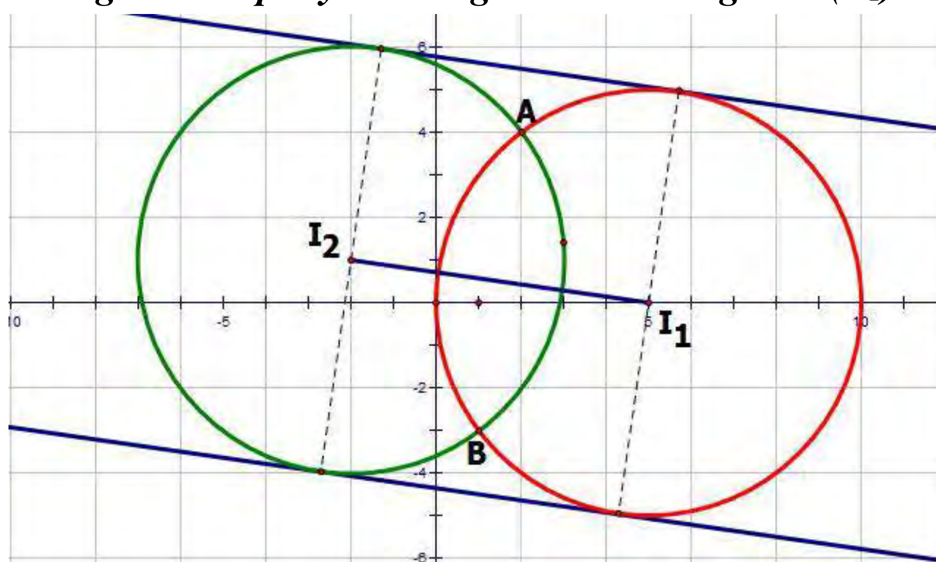
$\boxed{(C): x^2+y^2-24x+2y+20=0}$

■ **Lời bình cho câu a**: Qua câu a này, ta rút ra một số nhận xét sau:

Một là, rất nhiều bạn sẽ chọn cách giải thứ 2 để giải quyết bài toán này, về hình thức thì cách 1 và cách 2 có khác nhau đôi chút nhưng nội dung vẫn vậy, vẫn dựa trên cơ sở tìm giao điểm giữa hai đường tròn. Có điều ở cách 2 thì việc tính toán có phần nhẹ nhàng hơn.

Hai là, phương trình chùm đường tròn không nằm trong chương trình học của sách giáo khoa hiện hành, nên nếu bạn sử dụng nó, bạn bắt buộc phải chứng minh công thức trên. Thường thì ta nên chọn cách 3 này để **kiểm tra nhanh đáp số** và đặc biệt ưu điểm của cách 3 có thể thấy ngay là không phải giải tìm giao điểm giữa hai đường tròn (C_1) và (C_2).

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).



☺ **Nhận xét:** Như nhận xét ở chủ đề 2 ("viết phương trình đường thẳng") thì bản chất của tiếp tuyến thật ra cũng chỉ là một đường thẳng → cũng cần phải hội đủ các yếu tố như đi qua một điểm và nhận một véctơ nào đó làm véctơ pháp tuyến (hoặc véctơ chỉ phương).

☻ **Ý tưởng**:

_ Do hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A và B → có 2 tiếp tuyến cần tìm.

_ Tiếp tuyến chưa đi qua điểm nào ? và cũng chưa có véctơ pháp tuyến hoặc véctơ chỉ phương. Vì vậy ta có thể triển khai theo hai hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**, gọi dạng phương trình tiếp tuyến y = ax + b

→ Δ: ax – y + b = 0 → dùng "điều kiện tiếp xúc giữa Δ và (C_1), (C_2)

→ giải tìm quan hệ a, b → phương trình Δ.

+ **Hướng thứ 2**, phát hiện hai đường tròn có cùng bán kính ($R_1 = R_2$)

→ tiếp tuyến Δ là hai đường thẳng song song với $\overrightarrow{I_1I_2} = (-7;1)$

→ Δ: x + 7y + m = 0 → tương tự dùng "**điều kiện tiếp xúc**" → giải tìm m → phương trình Δ.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do (C_1) cắt (C_2) tại A, B nên có 2 tiếp tuyến chung. Giả sử phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) có dạng: **y = ax + b**

⇔ **Δ: ax – y + b = 0**

* Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} d[I_1;\Delta]=R_1 & (1) \\ d[I_2;\Delta]=R_2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow d[I_1;\Delta]=d[I_2;\Delta]=5 \Leftrightarrow \frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|-2a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 5a+b=-2a-1+b \Rightarrow a=\dfrac{-1}{7} \\ 5a+b=2a+1-b \Rightarrow b=\dfrac{-3a+1}{2} \end{array}\right.$

* Thay $a=\dfrac{-1}{7}$ vào (1) ta có $b=\dfrac{5\pm 25\sqrt{2}}{7}$

* Thay $b=\dfrac{-3a+1}{2}$ vào (1) ta được:

$$|5a+b|=5\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow \left|5a+\frac{-3a+1}{2}\right|=5\sqrt{a^2+1}$$

Suy ra $\Leftrightarrow (7a+1)^2=100(a^2+1) \Leftrightarrow 51a^2-14a+99=0\,(VN)$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} x+7y-5+25\sqrt{2}=0 \\ x+7y-5-25\sqrt{2}=0 \end{array}\right.}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Do $R_1 = R_2$ và hai đường tròn cắt nhau nên ta suy ra hai tiếp tuyến chung là 2 đường thẳng song song $\overrightarrow{I_1I_2}=(-7;1) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ có dạng **x + 7y + m = 0**

* Điều kiện tiếp xúc là $d[I_1;\Delta]=5 \Leftrightarrow |5+m|=25\sqrt{2} \Leftrightarrow m=-5\pm 25\sqrt{2}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} x+7y-5+25\sqrt{2}=0 \\ x+7y-5-25\sqrt{2}=0 \end{array}\right.}$

■ **Lời bình cho câu b**: Từ bài toán tiếp tuyến chung này ta đặt ra hai tình huống xảy ra:

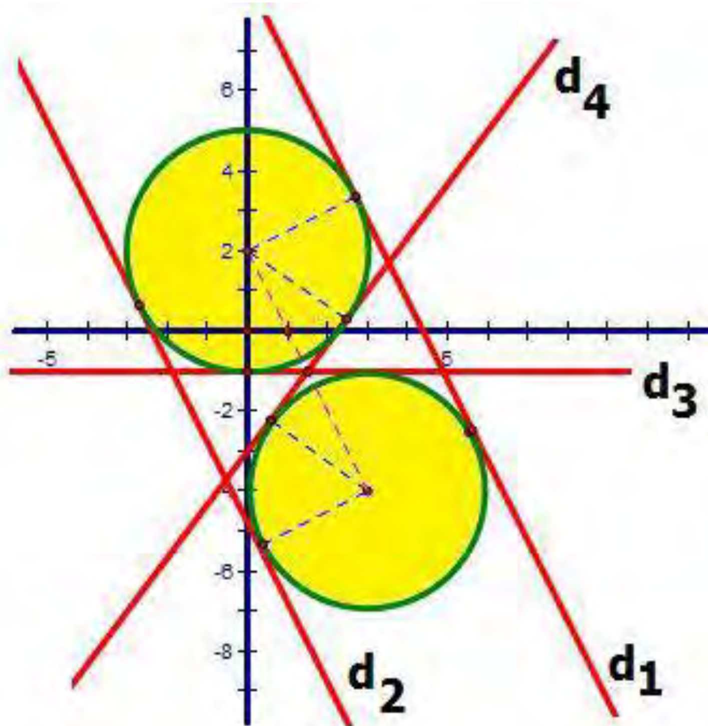
Một là, trường hợp **2 đường tròn có $R_1 = R_2$ nhưng không cắt nhau** thì khi đó việc giải sẽ như thế nào ? → Khi đó sẽ có đến **4 tiếp tuyến chung** thỏa yêu cầu bài toán (**bạn đọc có thể xem câu 5 của đề dự bị 2 – ĐH B2002 để hiểu rõ hơn**)

Hai là, trường hợp 2 đường tròn có $R_1 \neq R_2$ và cắt nhau thì khi đó ta sẽ giải như thế nào ? → khi đó ta vẫn sẽ có 2 tiếp tuyến chung, tuy nhiên 2 tiếp tuyến này sẽ **cắt nhau** và **đồng quy** với đường thẳng I_1I_2 tại điểm M → ta có thể vận dụng định lý Thales để tìm tọa độ điểm M → viết phương trình Δ qua M và khuyết véctơ pháp tuyến. (*bạn đọc có thể xem phần bài tập chọn lọc – rèn luyện của chủ đề 2 – chương 2 để hiểu rõ hơn*)

CÂU 5 (DỰ BỊ 2 – ĐH B2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

☺ **Nhận xét:** Tương tự như câu 4b (đề dự bị 1 – ĐH A2002), ở câu này, ta vẫn đảm bảo các quy trình như "xét vị trí tương đối" và dựa vào đó để quyết định phương hướng viết phương trình tiếp tuyến. Có điều bài này có đến 4 tiếp tuyến nhé. Mời bạn đọc cùng theo dõi.



► **Hướng dẫn giải :**

* (C_1) có tâm $I_1(0;2), R_1 = 3$ và (C_2) có $I_2(3;-4), R_2 = 3$.

Xét $\begin{cases} |R_1 - R_2| = 0 \\ R_1 + R_2 = 6 \Rightarrow R_1 + R_2 \le I_1I_2 \\ I_1I_2 = 3\sqrt{5} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (C_1) và (C_2) nằm ngoài nhau.

Suy ra (C_1) và (C_2) có 4 tiếp tuyến chung.

* Vì (C_1) có tiếp tuyến cùng phương với Oy: x = 0 ± R_1 = ± 3 và (C_2) có các tiếp tuyến cùng phương Oy là x = 3 ± R_2 tức là x = 0 hoặc x = 6 nên do đó phương trình các tiếp tuyến chung Δ có dạng:

$$y = ax + b \Leftrightarrow \mathbf{ax - y + b = 0}$$

* Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} d[I_1;\Delta] = R_1 \ (1) \\ d[I_2;\Delta] = R_2 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow d[I_1;\Delta] = d[I_2;\Delta] = 3 \Leftrightarrow \frac{|-2+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|3a+4+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} -2+b = 3a+b+4 \Rightarrow a = -2 \\ 2-b = 3a+4+b \Rightarrow b = \dfrac{-3a-2}{2} \end{array}\right.$

* Thay $a = -2$ vào (1) ta có $b = 2 \pm 3\sqrt{5}$

* Thay $b = \dfrac{-3a-2}{2}$ vào (1) ta được: $3a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow b = -1 \\ a = \dfrac{4}{3} \Rightarrow b = -3 \end{array}\right.$

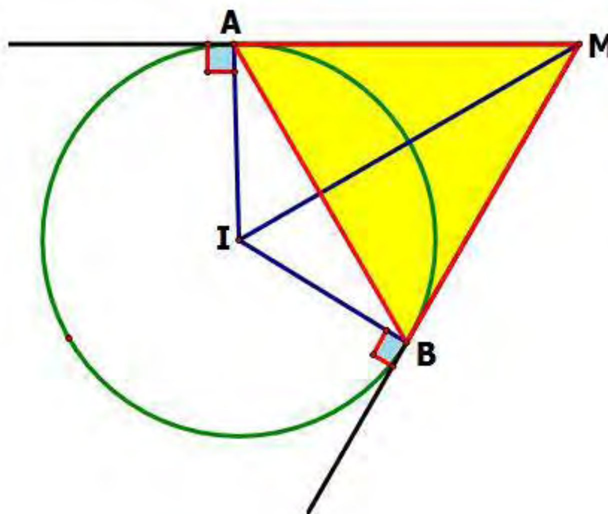
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} d_1 : 2x + y - 2 - 3\sqrt{5} = 0 \\ d_2 : 2x + y - 2 + 3\sqrt{5} = 0 \\ d_3 : y + 1 = 0 \\ d_4 : 4x - 3y - 9 = 0 \end{array}\right.}$

■ **Lời bình**: Như vậy qua hai câu 4 và 5 thì cách làm tổng quát chính là cách giải bài 5 này. Bạn đọc lưu ý kỹ nhé.

CÂU 6 (DỰ BỊ 3 – ĐH D2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x - y + 1 = 0$ **và đường tròn** $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. **Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A và B sao cho góc AMB bằng 60°.**

■ **Đặt vấn đề :** Đối với câu hỏi "tìm điểm M sao cho kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn" là một dạng toán khá quen thuộc vì đã được giới thiệu

rất nhiều lần trong bài tập cũng như các đề thi những năm sau đó thường xuyên dạng toán này. Có chăng là thay đổi đi đối tượng tìm kiếm? Dữ liệu cũng như **làm mờ** đi các yếu tố quan trọng quyết định hướng đi của bài toán. Vậy với dạng toán này, thì chúng ta nên lưu ý đến những điều nào ? Mời các bạn cùng theo dõi.



☻ **Ý tưởng**:

_ Do M ∈ d → tham số hóa M theo đường thẳng d → cần tìm một phương trình ? → liên hệ với các dữ kiện đang có của đề bài → tính đoạn IM → dựa vào góc AMB = 60^o và bán kính R = IA.

► **Hướng dẫn giải:**

* (C) có tâm $I(-1;2), R=\sqrt{5}$.

Do góc $AMB = 60^o$ và MI là phân giác $\Rightarrow AMI = 30^o$

* $\Delta AMI \perp A$ có $\sin AMI = \dfrac{IA}{IM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IM = 2IA = 2R = 2\sqrt{5}$

* M ∈ d: x – y + 1 ⇒ M(m; m + 1) và $\overrightarrow{IM} = (m+1; m-1)$

* Do

$IM = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow IM^2 = 20 \Leftrightarrow (m+1)^2 + (m-1)^2 = 20 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$

Suy ra $M_1(3;4)$, $M_2(-3;-2)$

Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M_1(3;4),\ M_2(-3;-2)}$

CÂU 7 (DỰ BỊ 4 – ĐH D2002). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng d_m: $mx - y - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị m, đường thẳng d_m luôn cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm N(1; –3).

☺ **Nhận xét *:*** đối với câu hỏi a của bài này thì vẫn nằm trong chương trình học hiện hành, tuy nhiên với câu hỏi b thì đã "nằm ngoài chương trình giáo khoa hiện hành". Thật ra bạn sẽ cảm thấy rất khó khăn khi làm câu này không phải vì bạn không đủ trình độ để giải chúng mà ta chưa có bất

kỳ kiến thức nào để vận dụng vào việc giải tập. Ở đây, xét theo góc độ phải giải quyết câu hỏi này, tác giả nhắc lại một số kiến thức liên quan để bạn đọc có thể nắm và vận dụng được:

"Xét đường thẳng Δ: Ax + By + C = 0 ($A^2 + B^2 > 0$ và elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

$$\Delta \text{ tiếp xúc (E)} \Leftrightarrow \boxed{a^2A^2+b^2B^2=C^2}$$

☻ **Ý tưởng**:

_ Dựa trên ý tưởng trên để giải quyết câu hỏi b của bài toán không quá khó vì ta có thể gọi dạng phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm N là: $\boxed{y=k(x-x_N)+y_N}$ và dùng điều kiện tiếp xúc để giải ra k.

_ Đối với câu a của bài toán, chúng ta chỉ việc chuyển bài toán này về xét sự tương giao giữa hai đường bằng cách xét hệ phương trình của 2 đường thẳng. (Bạn đọc có thể xem lại chủ đề 4 – chương 2 để hiểu rõ hơn).

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có: $\begin{cases}(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow 4x^2+9y^2-36=0\\ (d_m): mx-y-1=0 \Leftrightarrow y=mx-1\end{cases}$

* Phương trình hoành độ giao điểm của (d_m) và (E) là:

  $4x^2+9(mx-1)^2-36=0 \ \Leftrightarrow (4+9m)x^2-18mx-25=0$

* Xét $\Delta' = 81m^2+25(4+9m^2)>0$, đúng $\forall m \in R$.

  Vậy (d_m) luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt. (đpcm).

* Nhận xét: hai tiếp tuyến thẳng đúng của (E) là x = ± 3 (không qua N). Gọi Δ là tiếp tuyến qua N(1; –3) thì phương trình Δ có dạng:

  $\boxed{\mathbf{y = k(x-1)-3}}$

* Để Δ tiếp xúc (E)

$$\Leftrightarrow 9k^2+4=(-3-k)^2 \Leftrightarrow 8k^2-6k-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\frac{-1}{2} \Rightarrow \Delta_1: x+2y+5=0\\ k=\frac{5}{4} \Rightarrow \Delta_2: 5x-4y-17=0\end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l}\Delta_1: x+2y+5=0\\ \Delta_2: 5x-4y-17=0\end{array}\right.}$

CÂU 8 (CHÍNH THỨC – ĐH B2003). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A và AB = AC. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

☺**Đặt vấn đề** *:* Với những bài toán điểm trong tam giác, ta cần lưu ý đến tính chất của những điểm đặc biệt như:

♥ Trọng tâm (giao điểm 3 đường trung tuyến).

♦ Trực tâm (giao điểm 3 đường cao).

♣ Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (giao điểm 3 đường trung trực).

♠ Tâm đường tròn nội tiếp tam giác. (giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác).

Ngoài ra cũng cần xét đến quan hệ giữa các điểm đặc biệt này. (các bạn có thể xem lại lý thuyết cơ sở và một số bổ đề đã được chứng minh ở chương 1 để củng cố lại).

☻**Ý tưởng***:*

_ Với bài toán này, do đề đã cho trọng tâm G và trung điểm M → ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A.

_ Để tìm tọa độ B, C → ta xét thấy B và C thuộc đường BC → viết phương trình BC ? → do ΔABC vuông cân tại A → BC ⊥ AM và qua M.

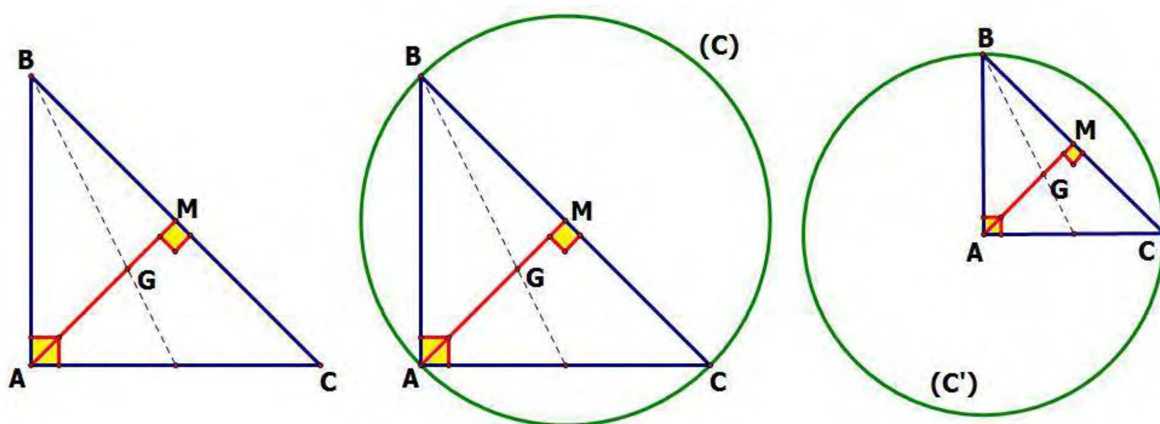
_ Ta có 4 hướng để đi tiếp:

+ **Hướng thứ 1**: Mã hóa B theo đường BC và thông qua M là trung điểm BC biểu diễn tọa độ C theo tọa độ B → sử dụng điều kiện còn lại AB = AC → tìm tọa độ B và C.

+ **Hướng thứ 2**: Xét B và C trong sự tương giao của BC và đường tròn (C) tâm M, bán kính MA → giải hệ trên ta tìm được B và C. (*Ở đây Đáp án của Bộ GD&ĐT đã đi theo hướng thứ 2*).

+ **Hướng thứ 3**: Xét B và C trong sự tương giao của BC và đường tròn (C’) tâm A, bán kính AB → giải hệ trên ta tìm được B và C.

+ **Hướng thứ 4**: Sử dụng phép biến hình (**phép quay**) để biến điểm A thành điểm B và C. (Bạn đọc có thể xem lại kiến thức cơ sở ở chương 1 để hiểu rõ hơn)



► Hướng dẫn giải cách 1:

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = 3(1 - \frac{2}{3}) \\ -1 - y_A = 3(-1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;2)}$$

* BC qua M(1; –1) nhận $\overrightarrow{AM} = (1;-3)$ làm vtpt có dạng là:

$1(x-1) - 3(y+1) \Leftrightarrow BC: x - 3y - 4 = 0$

* B ∈ BC: x – 3y – 4 = 0 ⇒ B(3b + 4 ; b). Mặt khác M là trung điểm BC

⇒ C(–3b – 2 ; –2 – b).

* Lại có

$AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow (3b+4)^2 + (b-2)^2 = (-3b-2)^2 + (-b-4)^2 \Leftrightarrow b = 0$

$\Rightarrow \boxed{B(4;0), C(-2;-2)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)}$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = 3(1 - \frac{2}{3}) \\ -1 - y_A = 3(-1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;2)}$$

* BC qua M(1; –1) nhận $\overrightarrow{AM} = (1;-3)$ làm vtpt có dạng là:

$1(x-1) - 3(y+1) \Leftrightarrow BC: x - 3y - 4 = 0$

* Ta có B và C là giao điểm giữa đường thẳng BC và đường tròn (C) có tâm là M(1 ; –1) và bán kính $AM = \sqrt{10}$ (do ΔABC vuông cân tại A)

⇒ tọa độ B và C thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-3y-4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=4 \\ y=-2 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

* Do vai trò của B và C như nhau nên ta giả sử B(4; 0) và C(–2; –2).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Tương tự như cách giải 1 ta có **A(0;2) và BC: x – 3y – 4 = 0**
* Ta có B và C là giao điểm giữa đường thẳng BC và đường tròn (C) có tâm là A(0; 2) và bán kính $AB = AM\sqrt{2} = \sqrt{20}$ (do ΔABC vuông cân tại A) ⇒ tọa độ B và C thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y-4=0 \\ x^2+(y-2)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=4 \\ y=-2 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

* Do vai trò của B và C như nhau nên ta giả sử B(4; 0) và C(–2; –2).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)}$

► **Hướng dẫn giải cách 4:**

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x_A = 3(1-\frac{2}{3}) \\ -1-y_A = 3(-1-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;2)}$$

* Ta có phép $Q_{(M;-90^o)}: A \to B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = (x_A - x_M).\cos(-90^o) - (y_A - y_M).\sin(-90^o) + x_M \\ y_B = (x_A - x_M).\sin(-90^o) + (y_A - y_M).\cos(-90^o) + y_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 4 \\ y_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(4;0)}$$

* Do M là trung điểm BC ⇒ C(–2; –2)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)}$

■ **Lời bình**: Qua bài toán này ta rút ra một số kinh nghiệm.
Một là, khi đề cập đến điểm đặc biệt trong tam giác (cụ thể ở đây là trọng tâm) thì dựa trên các tính chất của điểm đó mà ta khai thác các yếu tố liên quan. Trong bài này việc tìm được độ điểm A đóng một vai trò rất quan trọng trong quá trình tìm tọa độ B và C.

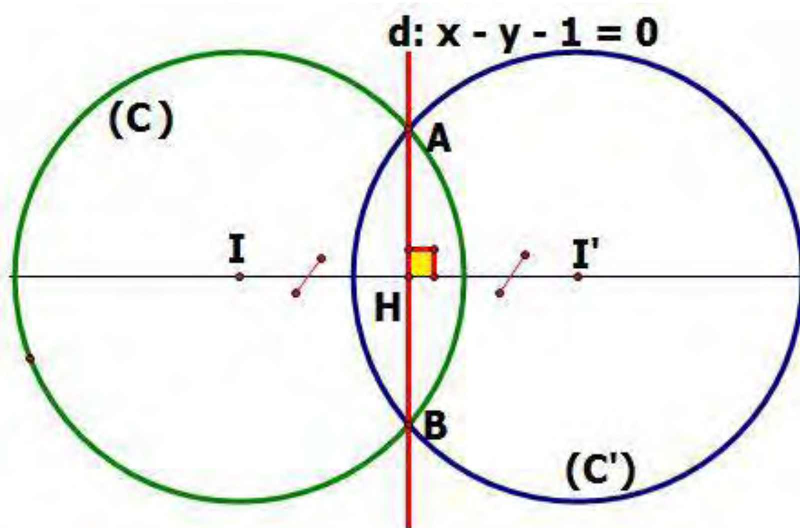
Hai là, với cách giải 2 và 3, đều xét sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn để tìm nhanh toa độ điểm, ở đây ta thấy được sự sáng tạo trong việc tìm lời giải.

Ba là, đối với cách 3, là một cách rất hay nhưng có một nhược điểm là công thức cồng kềnh khó nhớ, ngoài ra việc tính toán nhanh mà không phải tìm thêm một số yếu tố khác chính là ưu điểm lớn nhất của cách này.Trong quá trình đi tìm cách tiếp cận cho một bài toán, bạn hãy lưu tâm đến phương pháp tiếp cận dựa trên phép biến hình.

CÂU 9 (CHÍNH THỨC – ĐH D2003). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $d: x-y-1=0$

Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

☻**Ý tưởng**: Để viết phương trình đường tròn (C') (có tâm I' bán kính R') đối xứng với (C) qua d thì khi đó:



_ Bán kính của 2 đường tròn bằng nhau R = R'

_ Đường thẳng trung trực của II' chính là đường thẳng d → I' đối xứng với I qua đường thẳng d → ta tìm H là trung điểm II' bằng cách viết phương trình đường II' ⊥ d và qua I ⇒ H = II' ∩ d.

_ Để tìm giao điểm A,B giữa 2 đường tròn ta có thể xét

{A; B} = (C) ∩ (C') hoặc (C) ∩ d.

► **Hướng dẫn giải:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính R = 2
* Gọi J, R' là tâm và bán kính của đường tròn (C') cần tìm và A,B là giao điểm giữa (C) và (C').

* Do (C) và (C') đối xứng với nhau qua đường thẳng d
  $\Rightarrow$ R' = R = 2 và IJ nhận d làm đường trung trực.

* Do đó IJ $\perp$ d $\Rightarrow$ IJ : x + y + m = 0. II' qua I(1; 2)
  $\Rightarrow$ m = – 3. Vậy IJ: x + y – 3 = 0.
  Mặt khác, H = IJ $\cap$ d $\Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(2;1)$$

* Lại có, H là trung điểm IJ $\Rightarrow$ J(3; 0).
  Vậy phương trình $\boxed{(C'):\ (x-3)^2+y^2=4}$

* Gọi A, B là giao điểm giữa (C) và (C')
  $\Rightarrow$ tọa độ C và (C') thỏa hệ: $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=4 \\ (x-3)^2+y^2=4 \end{cases}$

  Suy ra $\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=3 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$.

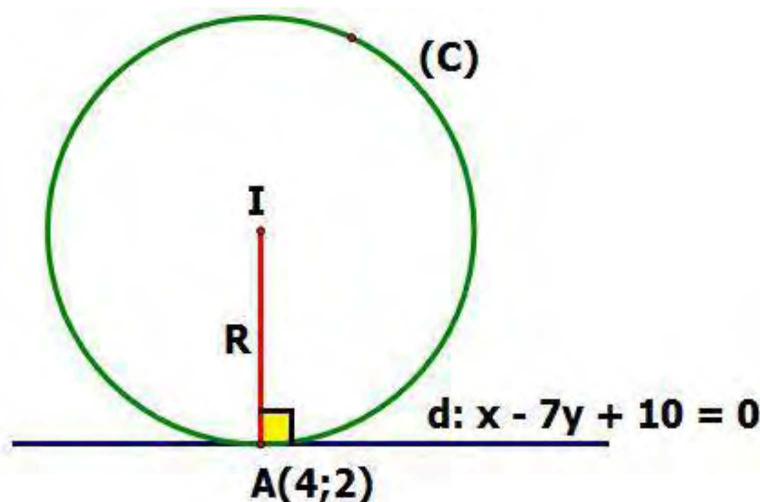
  Do vai trò của A và B là như nhau nên ta chọn $\boxed{A(1;\ 0) \text{ và } B(3;\ 2)}$

  Vậy yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\boxed{(C'):(x-3)^2+y^2=4,\ A(1;0),\ B(3;2)}$$

CÂU 10 (DỰ BỊ 1 – ĐH B2003). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x-7y+10=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng Δ: $2x+y=0$ và tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm A(4; 2).

☻ **Ý tưởng**:



_ Để viết phương trình chúng ta cần xác định 2 yếu tố chính là tâm I và bán kính R. Ở đây, yếu tố tâm I đóng vai trò quyết định. Do tìm được tâm I → tìm được bán kính R.

_ Ở đây ta thấy do (C) tiếp xức d tại A ⇒ IA ⊥ d → viết được phương trình IA.

_ Mặt khác I = IA ∩ Δ → tọa độ I → bán kính R = IA.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C) cần tìm. Do (C) tiếp xúc d ⇒ IA ⊥ d

Suy ra IA: 7x + y + m = 0, do IA qua A(4; 2) ⇒ m = – 30.

Vậy **IA: 7x + y – 30 = 0**

* Mặt khác I = IA ∩ Δ ⇒ tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x+y-30=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(6;-12)}$$

* Ta có bán kính R = $IA=\sqrt{(4-6)^2+(2+12)^2}=10\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là

$$\boxed{(C):(x-6)^2+(y+12)^2=200}$$

CÂU 11 (DỰ BỊ 2 – ĐH B2003). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, điểm M(–2; 3) và điểm N(5; n). Viết phương trình các đường thẳng d_1; d_2 qua M và tiếp xúc với (E). Tìm n để trong số các tiếp tuyến của (E) đi qua N có một tiếp tuyến song song với d_1 hoặc d_2.***

☻ **Ý tưởng**: **(Bạn đọc có thể xem câu 3 để hiểu rõ hơn)**

_ Để viết phương trình tiếp tuyến qua M của (E) → gọi dạng của tiếp tuyến $y = k(x - x_M) + y_M$.

_ Sử dụng điều kiện tiếp xúc giữa tiếp tuyến và (E) → giải tìm giá trị k → phương trình tiếp tuyến.

_ Sau khi tìm được phương trình tiếp tuyến d_1 và d_2 → ta gọi d_3 là tiếp tuyến của (E) qua N → tiếp tục dùng điều kiện tiếp xúc như trên để giải tìm n → tọa độ điểm N.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta x = ± 2 là hai tiếp tuyến của (E) vuông góc với trục hoành trong đó:

x = –2 đi qua điểm M

Suy ra $\boxed{d_1: x = -2}$ là một tiếp tuyến của (E) qua M.

* Phương trình tiếp tuyến d qua M(–2; 3) khác đường thẳng x = –2 có dạng: $y = k(x+2)+3 \Leftrightarrow kx - y + 3 + 2k = 0$

* Để d và (E) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow 4k^2 + 1 = (3+2k)^2 \Leftrightarrow k = \dfrac{-2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{d_2 : 2x + 3y - 5 = 0}$

* Dễ thấy tiếp tuyến d của (E) qua N(5; n) không song song với $\boxed{d_1: x = -2}$, do đó Δ // d_2 và qua N(5;n) có hệ số góc $k = \dfrac{-2}{3}$.

Vậy $\Delta : y = \dfrac{-2}{3}(x-5) + n \Leftrightarrow 2x + 3y - 10 - 3n = 0$

* Để Δ và (E) tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow 4(2)^2 + 1.(3)^2 = (10+3n)^2 \Leftrightarrow 3n^2 + 20n + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -5 \\ n = \dfrac{-5}{3} \end{array}\right.$

* Với $n = \dfrac{-5}{3} \Rightarrow \Delta : 2x + 3y - 5 = 0$ (loại vì trùng với đường d_2)

* Với $n = -5 \Rightarrow N(5;-5)$

Vậy yêu cầu bài toán đương với

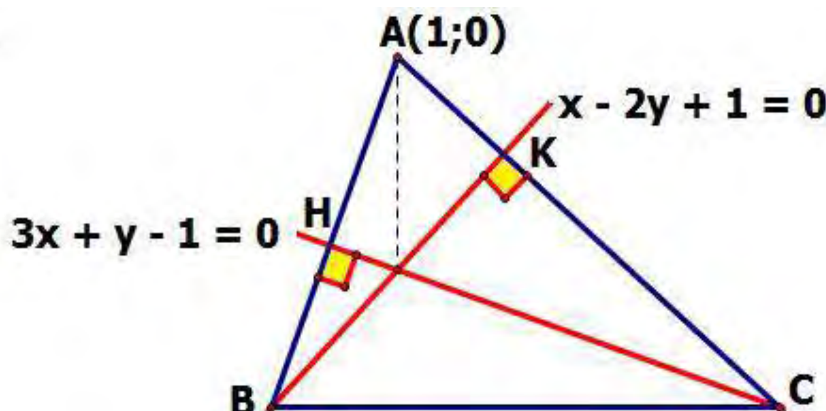
$\boxed{d_1 : x - 2 = 0,\ d_2 : 2x + 3y - 5 = 0,\ N(5;-5)}$

■ **Lời bình**: Tương tự như những bài toán trước (câu 3), xét sự tiếp xúc giữa (E) và d. Ở đây chỉ phải lưu ý điều kiện nhận (loại) khi vận dụng "tính song song" giữa các đường thẳng.

CÂU 12 (DỰ BỊ 3 – ĐH D2003). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(1; 0) và hai đường thẳng lần lượt chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là: x – 2y + 1 = 0 và đường thẳng 3x + y – 1 = 0. Tính diện tích tam giác ABC.***

■ **Đặt vấn đề :** Tính "diện tích tam giác" là một chủ đề không quá mới với học sinh nhưng chắc chắn sẽ làm mất không ít thời gian của chúng ta khi tính chúng. Có rất nhiều công thức tính diện tích tam giác. Qua bài toán này tác giả cũng muốn tổng kết lại cho bạn đọc. Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☻ **Ý tưởng**:



_ Để tính diện tích ΔABC → ta tìm tọa độ điểm B và C

_ Để tìm tọa độ điểm B → xét điểm B = AB ∩ CH → viết phương trình AB qua A và AB ⊥ CH.

_ Tương tự ta cũng tìm được tọa độ điểm C.

_ Đến đây để tính diện tích ΔABC ta có thể có những hướng đi sau:

+ **Hướng thứ nhất**, tính độ dài cạnh AB hoặc AC

$$\rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d[C;AB] = \frac{1}{2}AC.d[B;AC]$$

+ **Hướng thứ hai**, tính độ dài cạnh AB và AC →

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin CAB = \frac{1}{2}AB.AC\sqrt{1-\cos^2 CAB}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2\cos^2 CAB} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$$

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C và B lên AB và AC.

* Ta có AB ⊥ CH: 3x + y – 1 = 0 ⇒ AB: x – 3y + m = 0, AB qua A(1; 0) ⇒ m = –1

Vậy AB : x – 3y – 1 = 0. B = AB ∩ BK

Suy ra tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-5;2)}$

* Ta có AC ⊥ BK: x – 2y + 1 = 0 ⇒ AC: 2x + y + n = 0, AC qua A(1; 0) ⇒ m = –2

Vậy AC : 2x + y – 2 = 0. C = AC ∩ CH

Suy ra tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 3x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1;4)}$

* Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;-2),\overrightarrow{AC}=(-2;4)$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin CAB=\frac{1}{2}AB.AC\sqrt{1-\cos^2 CAB}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-AB^2.AC^2\cos^2 CAB}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(36+4)(4+16)-4^2}=14\,(\text{dvdt})$

Vậy diện tích tam giác ABC là $\boxed{S_{\Delta ABC}=14\,(\text{dvdt})}$

► **Cách tính diện tích tam giác ABC:**

* Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;-2)\Rightarrow AB=2\sqrt{10}$

* $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d[C;AB]=\frac{1}{2}2\sqrt{10}.\frac{|-1-3.4-1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=14\,(\text{dvdt})$

Vậy diện tích tam giác ABC là $\boxed{S_{\Delta ABC}=14\,(\text{dvdt})}$

■ **Lời bình**: Qua đây cũng xin tổng kết lại các công thức để tính diện tích tam giác.

$\bullet\, S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c.$

$\bullet\, S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$

$\bullet\, S=\frac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

$\bullet\, S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$

<u>*Trong đó:*</u> $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ *với*

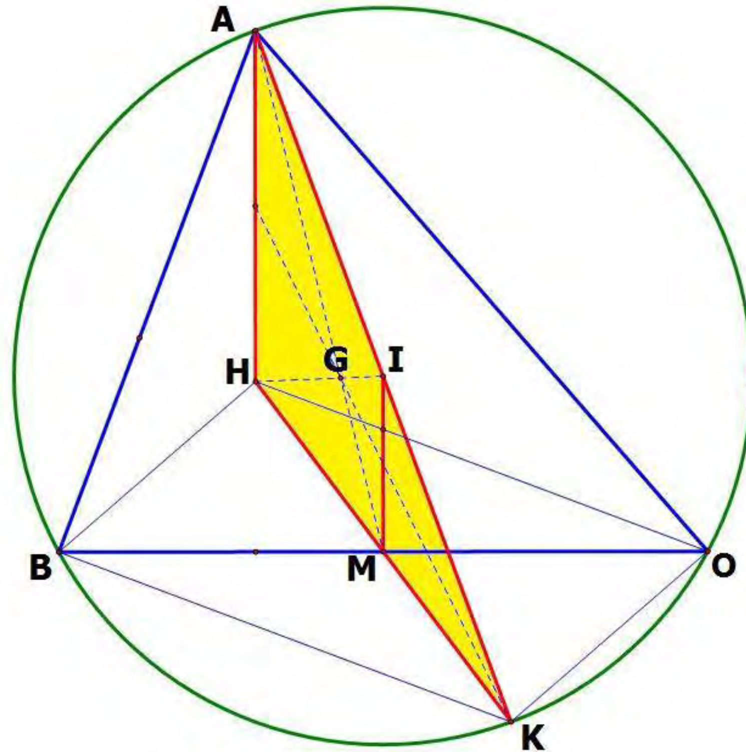
$\overrightarrow{AB}=(a_1;a_2),\ \overrightarrow{AC}=(b_1;b_2).$

CÂU 13 (CHÍNH THỨC – ĐH A2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tọa độ A(0;2) và B*** $(-\sqrt{3};-1)$ ***.Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.***

■ **Đặt vấn đề :** "Xác định tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác " cũng là một trong những chủ đề thường xuyên bắt gặp trong các đề thi đại học.

Qua câu hỏi này, tác giả cũng muốn tổng kết lại một số cách tiêu biểu để tìm "tâm đường tròn ngoại tiếp" của một tam giác, mời các bạn cùng theo dõi.

☻ **Ý tưởng**:



_ Để **tìm tọa độ trực tâm H** → chúng ta có thể viết phương trình AH và BH → H = AH ∩ BH.

(hoặc cũng có thể gọi tọa độ H(x_H; y_H) → AH ⊥ OB (1), BH ⊥ OA (2) → giải hệ tạo bởi (1) và (2) → H.)

_ Để **tìm I là tâm đường tròn ngoại tiếp** ΔABO (khi đã biết tọa độ của 3 đỉnh) ta có thể có một số cách tiêu biểu sau:

- Cách 1: Gọi tọa độ I(x;y), vận dụng định nghĩa của **tâm I là cách đều ba đỉnh tam giác** ⇒ $\begin{cases} OI = AI \\ OI = BI \end{cases}$
- Cách 2: Lập pt d_1, d_2 lần lượt là phương trình trung trực của cạnh AO, BO ta có $d_1 \cap d_2 = I$ (vận dụng cách dựng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của các đường trung trực) .
- Cách 3: Gọi dạng khai triển của pt đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABO: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó I(a;b) chính là tọa độ cần tìm. Lần lượt thay tọa độ A, B, O vào pt khai triển → giải hệ 3 pt 3 ẩn tìm I.

● Cách 4: Ta cũng có thể vận dụng quan hệ thẳng hàng giữa trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp I đó chính là $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ (H và G là tọa độ đã tìm được ở câu a).

● Cách 5: Ta cũng có thể gọi M là trung điểm BO, dựa vào tính chất $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \rightarrow$ giải tìm I.

● Cách 6: Bằng cách tính tất cả các cạnh để kiểm tra ΔABO có là **tam giác đặc biệt ?**

+ Giả sử: **ΔABO vuông** tại O thì trung điểm cạnh huyền BA chính là tâm I

+ Giả sử: **ΔABO đều** thì trọng tâm G của tam giác ABO chính là tâm I

+ Giả sử: **ΔABO cân tại O** có góc $BOA = 120^o$ thì tâm I chính là đỉnh thứ 4 của hình thoi AOBI

► **Hướng dẫn giải cách 1: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* AH qua A(0;2) nhận $\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3};-1)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$AH: \sqrt{3}(x-0)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+y-2=0$$

* BH qua $B(-\sqrt{3};-1)$ nhận $\overrightarrow{OA} = (0;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$BH: 0(x+\sqrt{3})+2(y+1)=0 \Leftrightarrow y+1=0$$

* Ta có H = BH ∩ AH ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \sqrt{3}x+y-2=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(\sqrt{3};-1)}$$

* Gọi d_1, d_2 lần lượt là trung trực của cạnh OA, OB.

Gọi $M(0;1), N\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm OA, OB.

* Ta có: d_1 qua $M(0;1)$ nhận $\overrightarrow{OA} = (0;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$d_1: (x-0)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow y-1=0$$

* Ta có: d_2 qua $N\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$ nhận $\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3};-1)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$d_2: \sqrt{3}(x+\frac{\sqrt{3}}{2})+(y+\frac{1}{2})=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+y+2=0$$

* Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABO ⇒ I = (d_1) ∩ (d_2) ⇒ tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y-1=0 \\ \sqrt{3}x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(-\sqrt{3};1\right)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H(\sqrt{3};-1), I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Theo cách 1 ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $\boxed{H(\sqrt{3};-1)}$

* Gọi $I(x_I; y_I)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoài tiếp $\Delta ABO \Rightarrow \begin{cases} OI=AI \\ OI=BI \end{cases}$ **(*)**

* Với $\begin{cases} \overrightarrow{OI}=(x_I;y_I) \\ \overrightarrow{AI}=(x_I;y_I-2) \\ \overrightarrow{BI}=(x_I+\sqrt{3};y_I+1) \end{cases}$ do đó (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OI^2=AI^2 \\ OI^2=BI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_I}^2+{y_I}^2={x_I}^2+(y_I-2)^2 \\ {x_I}^2+{y_I}^2=(x_I+\sqrt{3})^2+(y_I+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=-4y_I+4 \\ 0=2\sqrt{3}x_I+3+2y_I+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=-\sqrt{3} \\ y_I=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(-\sqrt{3};1\right)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H(\sqrt{3};-1), I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Theo cách 1 ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $\boxed{H(\sqrt{3};-1)}$

* Gọi phương trình dạng khai triển của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABO là:

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ với tâm } I(a;\ b)$$

* Ta có $\begin{cases} A\in(C)\Rightarrow -4b+c=-4 & (1) \\ B\in(C)\Rightarrow 2\sqrt{3}a+2b+c=-4 & (2) \\ O\in(C)\Rightarrow c=0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\sqrt{3} \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H(\sqrt{3};-1), I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

► Hướng dẫn giải cách 4:

* Theo cách 1 ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $\boxed{H(\sqrt{3};-1)}$

* Gọi G là trọng tâm tam giác $\Delta ABO \Rightarrow G\left(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{1}{3}\right)$

* Nhận xét I, H, G thẳng hàng và đặc biệt $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}$ ***(phần chứng minh kết quả bổ đề này mời các bạn xem ở chương 1).***

Do đó $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3}-x_I=3(\frac{-\sqrt{3}}{3}-x_I)\\ -1-y_I=3(\frac{1}{3}-y_I)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_I=-\sqrt{3}\\ y_I=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H(\sqrt{3};-1), I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

► Hướng dẫn giải cách 5:

* Theo cách 1 ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $\boxed{H(\sqrt{3};-1)}$

* Gọi M là trung điểm OB $\Rightarrow M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$

* Nhận xét $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ ***(phần chứng minh kết quả bổ đề này mời các bạn xem ở chương 1).***

* Do đó $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3}-0=2(\frac{-\sqrt{3}}{2}-x_I)\\ -1-2=2(\frac{-1}{2}-y_I)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_I=-\sqrt{3}\\ y_I=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

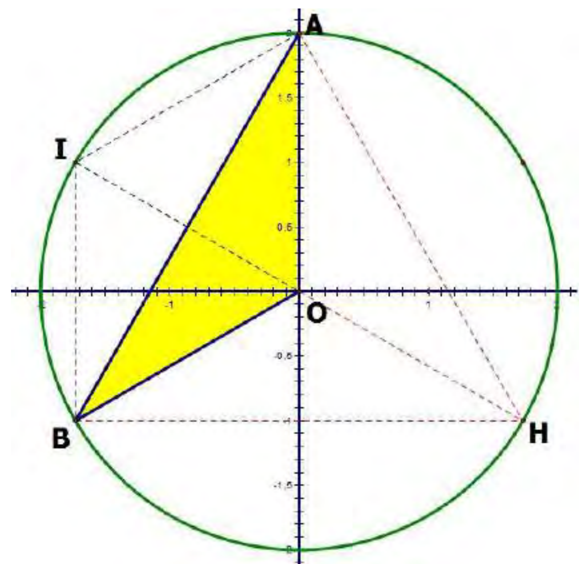
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H(\sqrt{3};-1), I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

► Hướng dẫn giải cách 6:

* Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}=(-\sqrt{3};-1)\Rightarrow OB=2\\ \overrightarrow{OA}=(0;2)\Rightarrow OA=2\\ \overrightarrow{BA}=(\sqrt{3};3)\Rightarrow AB=2\sqrt{3}\end{cases}$

và $\cos AOB=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}$

$=\frac{4+4-12}{2.2.2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow AOB=120^o$

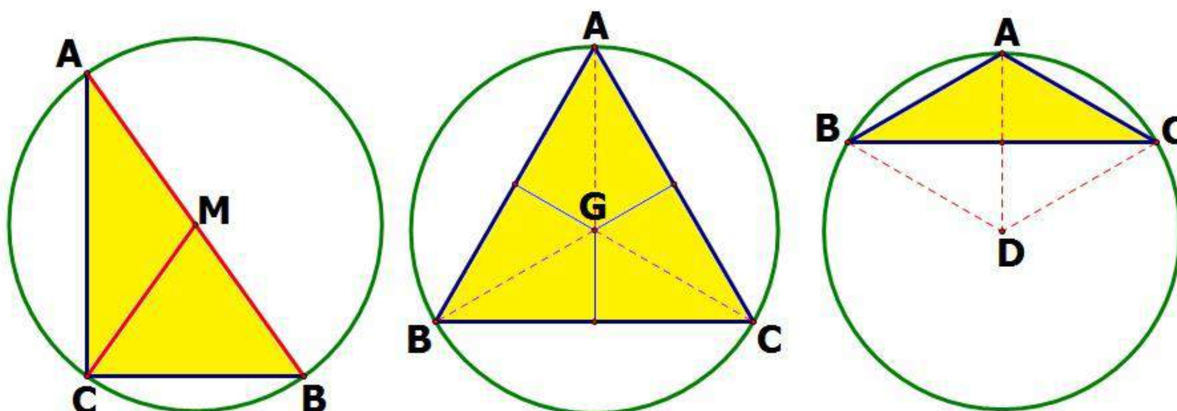


* Do OB = OA $\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O và $AOB = 120^o \Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABO \rightarrow$ đỉnh thứ 4 của hình thoi AOBI. Gọi $M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm AB $\Rightarrow$ M là trung điểm OI $\Rightarrow I\left(-\sqrt{3};1\right)$
* Mặt khác khi đó O chính là trung điểm của IH $\Rightarrow H(\sqrt{3};-1)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H(\sqrt{3};-1), I\left(-\sqrt{3};1\right)}$

■ **Lời bình**: Qua các cách giải đã trình bày ở câu 13, chúng ta rút ra vài nhận xét sau:

Một là, đề cập đến việc xác định tâm đường tròn ngoại tiếp với những **tam giác đặc biệt** thì chúng ta có những lưu ý sau:



Hai là, mỗi cách trên đều có cái hay riêng của nó, có cách thì vận dụng tính chất hình học, các kết quả đẹp từ đường tròn (cách 4 và cách 5), có cách vận dụng nội tại của định nghĩa và cách xây dựng của điểm (cách 1 và cách 2), có cách thì vận dụng phương trình đường tròn trong hình tọa độ Oxy (cách 3), đặc biệt là cách 6 với việc tính toán kiểm tra các dạng hình của tam giác để rút ra những kết luận quan trọng.

CÂU 14 (CHÍNH THỨC – ĐH B2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(1;1) và B(4; –3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng x – 2y – 1 = 0 sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.***

☺**Nhận xét :** chủ đề khoảng cách hay bài toán có liên quan đến khoảng cách cũng là một chủ đề thường xuyên bắt gặp trong các đề thi đại học. Ở đây khoảng cách không chỉ cho ta biết được thông tin độ dài hình học mà ngoài ra dựa vào khoảng cách chúng ta cũng biết được vị trí tương đối giữa các đối tượng trong hình học phẳng. Với bài toán yêu cầu tìm điểm

C thỏa mãn yêu cầu khoảng cách từ C đến AB bằng 6 thì dường như "người ra đề" chỉ muốn kiểm tra ở người làm bài có nắm được cách kiến thức liên quan và những kỹ năng cần có hay không ? Mời các bạn cùng xem lời giải.

☻ **Ý tưởng**:

_ Dựa vào công thức khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng trong mặt phẳng → cần phải gọi tọa độ điểm C và viết phương trình đường AB.

_ Tọa độ $C \in x - 2y - 1 = 0$ → tham số hóa điểm C theo ẩn c.

_ Phương trình AB đi qua 2 điểm A, B → viết phương trình AB.

_ Vận dụng công thức khoảng cách tìm giá trị c → tọa độ C cần tìm.

► **Hướng dẫn giải:**

* AB qua A(1; 1) nhận $\overrightarrow{AB} = (3; -4)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là:

$$AB: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$$

* Ta có $C \in d: x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow C(2c + 1; c)$

* Theo đề bài ta có: $d[C:AB] = \frac{|4(2c+1) + 3c - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6 \Leftrightarrow |11c - 3| = 30$

Vậy tọa độ điểm C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C_1(3;1),\ C_2\left(\frac{-43}{11}; \frac{-27}{11}\right)}$

CÂU 15 (CHÍNH THỨC – ĐH D2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh A(–1; 0), B(4; 0), C(0; m) với m ≠ 0. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.***

☻ **Ý tưởng**: Dùng công thức trọng tâm G biểu thị G theo ẩn m → để $\Delta GAB \perp G \Rightarrow GA \perp GB \Rightarrow G$

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có G là trọng tâm tam giác ABC có tọa độ:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(1; \frac{m}{3}\right)$$

* $\Delta AGB \perp G \Rightarrow GA \perp GB \Rightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{GA} = \left(-2; \dfrac{-m}{3}\right) \\ \overrightarrow{GB} = \left(3; \dfrac{-m}{3}\right) \end{cases}$

* Do đó $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \dfrac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{m = \pm 3\sqrt{6}}$

CÂU 16 (DỰ BỊ 1 – ĐH A2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng*** $d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ ***và điểm A(–1 ;1). Viết phương trình đường tròn đi qua A, qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng d.***

☺ **Nhận xét *:*** Hiện tại chúng ta chưa có tâm và cả bán kính của đường tròn (C) (nếu như có trước một yếu tố thì quá trình phân tích sẽ khác hơn). Ở đây, đối với dạng toán "cho khuyết cả tâm và bán kính" thì ta sẽ gọi dạng phương trình khai triển của đường tròn (C).

☻ **Ý tưởng**:

_ Dạng khai triển của đường tròn (C) có đầy đủ 3 ẩn a, b, c → tìm hệ 3 phương trình ba ẩn → tìm a, b,c.

_ Cụ thể A ∈ (C) (1), B ∈ (C) (2), d[I;d] = R (3)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi phương trình dạng khai triển của đường tròn (C) là:

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ với tâm } I(a;\, b) \text{ và } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

* Ta có: $\begin{cases} A \in (C) \\ O \in (C) \\ d[I;d] = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2a - 2b + c = 0 \\ c = 0 \\ \dfrac{|a - b + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ c = 0 \\ 1 = \sqrt{(b-1)^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ c = 0 \\ 2b^2 - 2b = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} b=1, a=0 \Rightarrow (C_1): x^2+y^2-2y=0 \\ b=0, a=-1 \Rightarrow (C_2): x^2+y^2+2x=0 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$$\left[\begin{array}{l} (C_1): x^2+y^2-2y=0 \\ (C_2): x^2+y^2+2x=0 \end{array}\right.$$

CÂU 17 (DỰ BỊ 2 – ĐH A2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(0;2) và đường thẳng d có phương trình x – 2y + 2 = 0. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B và AB = 2BC.***

☻**Ý tưởng**:

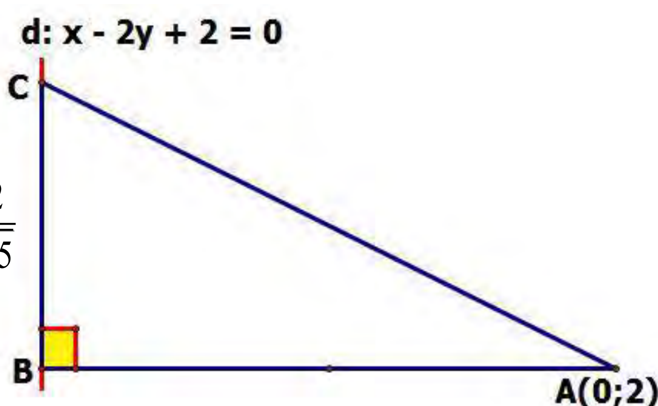
_ Dựa vào điểm A và đường thẳng d (chứa B,C) → ta có thể viết phương trình AB và d[A;d] = AB.

_ Ta có B = d ∩ AB ⇒ tọa độ của điểm B cần tìm.

_ Do tính được độ dài AB ⇒ độ dài BC (đã có tọa độ điểm B) → tham số hóa C theo đường d

_ Giải phương trình độ dài BC → tìm ra toa độ C.

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có ΔABC ⊥ B

⇒ AB ⊥ BC

$\Rightarrow AB = d[A;BC] = \dfrac{|0-4+2|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow\ BC = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AC = 1$

* Mặt khác AB ⊥ BC: x – 2y + 2 = 0

⇒ AB: 2x + y + m = 0, AB qua A(0; 2) ⇒ m = – 2.

Vậy **AB : 2x + y – 2 = 0**.

* Ta có C ∈ BC ⇒ C(2c – 2; c)

Và B = BA ∩ d ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{6}{5}\right)}$$

* Ta có $\overrightarrow{AC} = (2c-2; c-2)$ và $AC^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (2c-2)^2+(c-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \Rightarrow C_1(0;1) \\ c=\dfrac{7}{5} \Rightarrow C_2\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5}\right)\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là :

$$\boxed{B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right), C_1(0;1) \text{ hay } B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right), C_2\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)}$$

CÂU 18 (DỰ BỊ 3 – ĐH B2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm I(–2; 0) và hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình 2x – y + 5 = 0 và d_2: x + y – 3 = 0. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm I và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$.***

■ **CÁCH 1:**

☻ **Ý tưởng**:

_ Ta có thể gọi dạng phương trình đường thẳng Δ: $y = k(x - x_I) + y_I$.

_ Ta đã có $A = \Delta \cap d_1$, $B = \Delta \cap d_2$ → giải hệ biểu thị tọa độ A và B theo k.

_ Dùng điều kiện $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ → giải tìm giá trị k → phương trình Δ.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Phương trình đường thẳng Δ đi qua I(–2 ; 0) có hệ số k: y = k(x + 2)

* Ta có $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} kx-y+2k=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2k-5}{2-k} \\ y=\dfrac{-k}{2-k} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2k-5}{2-k};\frac{-k}{2-k}\right)$$

* Ta có $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow$ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} kx-y+2k=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-2k}{1+k} \\ y=\dfrac{5k}{1+k} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{3-2k}{1+k};\frac{5k}{1+k}\right)$$

* Ta có $\overrightarrow{IA}=\left(\dfrac{-1}{2-k};\dfrac{-k}{2-k}\right), 2\overrightarrow{IB}=\left(\dfrac{10}{1+k};\dfrac{10k}{1+k}\right)$

* Theo yêu cầu bài toán thì

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{2-k} = \dfrac{10}{1+k} \\ \dfrac{-k}{2-k} = \dfrac{10k}{1+k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{7}{3} \\ k = 0 \vee k = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{7}{3}$$

Vậy đường thẳng Δ thỏa yêu cầu bài tóa là

$$\boxed{\Delta : y = \frac{7}{3}(x+2) \Leftrightarrow 7x - 3y + 14 = 0}$$

■ **CÁCH 2:**

☻ **Ý tưởng**:

_ Do nhận xét Δ đã qua I → chỉ cần tìm thêm một điểm nữa là có thể viết phương trình Δ

_ Ta tham số hóa điểm A và B lần lượt theo theo d_1 và d_2.

_ Dùng điều kiện $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ → giải tìm tọa độ A và B → phương trình Δ.

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi Δ là phương trình đường thẳng cần tìm.

* $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$: $2x - y + 5 = 0$

$\Rightarrow A(a; 2a + 5)$ và $\overrightarrow{IA} = (a+2; 2a+5)$

* $B = \Delta \cap d_1 \Rightarrow B \in d_2$: $x + y - 3 = 0 \Rightarrow A(b; 3 - b)$ và $\overrightarrow{IB} = (b+2; 3-b)$

* Theo yêu cầu bài toán thì

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = 2(b+2) \\ 2a+5 = 2(3-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 2 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

* Đường thẳng Δ qua I(–2 ; 0) nhận $\overrightarrow{IA} = (3; 7)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{7} \Leftrightarrow 7x - 3y + 14 = 0$

Vậy đường thẳng Δ thỏa yêu cầu bài tóa là $\boxed{\Delta : 7x - 3y + 14 = 0}$

■ **Lời bình**: Qua bài toán này, ta rút ra một số kinh nghiệm sau:

Một là, xét về cách giải thì cách 2 hay hơn rất nhiều với ưu điểm tính toán nhẹ nhàng, trong khi đó cách 1 thì bạn đọc sẽ khá mất thời gian khi biểu thị tọa độ A, B theo k (ngoài việc giải chân phương, các bạn có thể vận dụng phương pháp giải hệ Crammer dùng định thức để tính nhanh tọa độ x, y theo k).

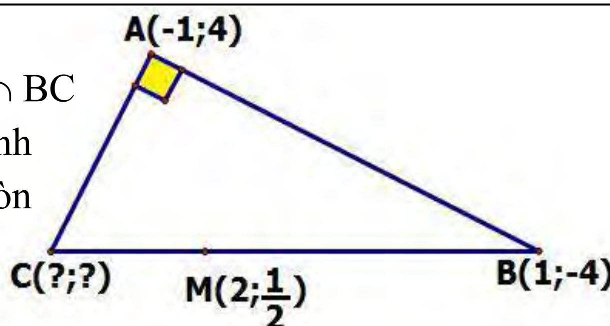
Hai là, khi giải bằng cách 2, chúng ta đã lường trước số ẩn cần đặt và số phương trình đang có, có thể thấy việc giải tìm được cả tọa độ A và B là "**dư so với những gì ta mong đợi**", vì vậy việc lưu ý đặt ẩn cực kì quan trọng, quyết định thành bại của một bài toán.

CÂU 19 (DỰ BỊ 4 – ĐH D2004). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Biết tọa độ*** $A(-1;4)$ ***và*** $B(1;-4)$ ***và đường thẳng BC đi qua điểm*** $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$ ***. Tìm tọa độ đỉnh C.***

☻ **Ý tưởng**:

_ Để tìm tọa độ điểm C → C = AC ∩ BC

_ Như vậy ta cần viết phương trình AC và BC → BC qua B và M, còn AC qua A và vuông AB.



► **Hướng dẫn giải :**

* BC qua B(1; –4) nhận $\overrightarrow{BM}=\left(1;\frac{9}{2}\right)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{\frac{9}{2}}\Leftrightarrow 9x-2y-17=0$$

* AC qua A(–1;4) nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-8)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là :

$$2(x+1)-8(y-4)=0\Leftrightarrow x-4y+17=0$$

* C = AC ∩ BC ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-4y+17=0\\9x-2y-17=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{C(3;5)}$$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là $\boxed{C(3;5)}$

CÂU 20 (CHÍNH THỨC – ĐH A2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng*** d_1***: x – y = 0 và*** d_2***: 2x + y – 1 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc*** d_1***, đỉnh C thuộc*** d_2 ***và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.***

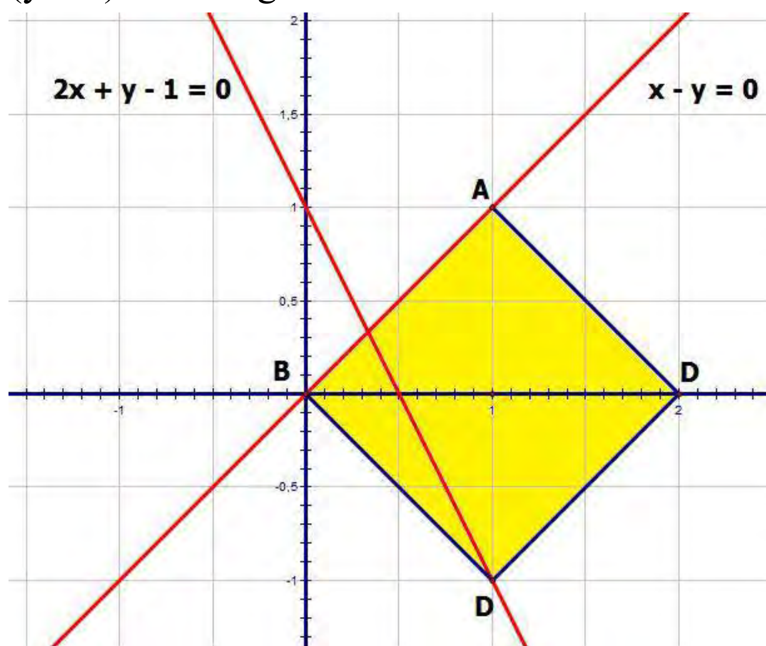
☻ **Ý tưởng**:

_ Trước tiên ta tham số A và C theo đường d_1 và d_2 → trung điểm I của AC thuộc trục hoành (do B và D đều thuộc trục hoành) → phương trình (1).

_ Mặt khác AC ⊥ BD ⇒ AC ⊥ Ox ⇒ AC vuông góc với véctơ đơn vị của trục hoành → phương trình (2).

_ Giải hệ gồm (1) và (2) → tìm được A và C.

_ Đến đây để tìm nhanh B và D → xét B và D trong sự tương giao giữa trục hoành (y = 0) và đường tròn tâm I bán kính IA.



► **Hướng dẫn giải cách 1: Gọi I là tâm hình vuông ABCD.**

* $A \in d_1: x - y = 0 \Rightarrow A(a; a)$, $C \in d_2: 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow C(c; 1 - 2c)$.

Vì I là trung điểm AC $\Rightarrow I\left(\dfrac{a+c}{2}; \dfrac{1-2c+a}{2}\right)$.

* Do B và D thuộc trục hoành (y = 0) ⇒ I ∈ trục hoành

Suy ra **a = 2c – 1** $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (c-a; 1-2c-a) = (1-c; -4c+2)$

* Ta có AC ⊥ BD ⇒ AC ⊥ Ox ⇒ $\overrightarrow{AC}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 1 - c = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow a = 1$ với $\vec{i} = (1; 0)$ là véctơ đơn vị.

Suy ra I(1;0) và IA = 1

* B và D là giao điểm giữa trục hoành và đường tròn (C) tâm I(1; 0) bán kính R = IA = 1 ⇒ Tọa độ B và D thỏa hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \\ y = 0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(0;0), D(2;0) \\ B(2;0), D(0;0) \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm tthỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0) \text{ hay } A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)}$$

► **Hướng dẫn giải cách 2: Theo đáp án của Bộ GD&ĐT**

* Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(t; t)$. Do A và C đối xứng nhau qua BD và B, D $\in$ Ox $\Rightarrow C(t; -t)$

* Vì $C \in d_2$ nên $2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1 ; 1), C(1 ; -1)$

* Trung điểm của AC là I(1 ; 0). Vì là tâm của hình vuông nên $\begin{cases} IA = IB = 1 \\ ID = IA = 1 \end{cases}$

Lại có $\begin{cases} B \in Ox \\ D \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(b;0) \\ D(d;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |b-1| = 1 \\ |d-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, b = 2 \\ d = 0, d = 2 \end{cases}$

Suy ra B(0;0) và D(2; 0) hay B(2; 0) và D(0; 0).

Vậy tọa độ điểm tthỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0) \text{ hay } A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)}$$

■ **Lời bình**: Trong cách giải của Bộ GD&ĐT đã có sử dụng đến phép biến hình mà cụ thể chính là "phép đối xứng qua trục hoành" (các bạn có thể xem lý thuyết cơ sở ở chương 1 để hiểu rõ hơn).

CÂU 21 (CHÍNH THỨC – ĐH B2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(2; 0) và B(6; 4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.***

■ **Đặt vấn đề: "viết phương trình đường tròn"** từ lâu đã trở thành một chủ đề quan trọng thường xuyên bắt gặp, xuất hiện trong các kì thi Đại Học – Cao Đẳng, và một trong những vấn đề liên quan thường được hỏi nhất chính là "sự tiếp xúc" giữa đường tròn và đường thẳng, giữa đường tròn và đường tròn. Cụ thể trong bài toán này, khi đường tròn tiếp xúc với trục hoành thì ta sẽ khai thác như thế nào ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

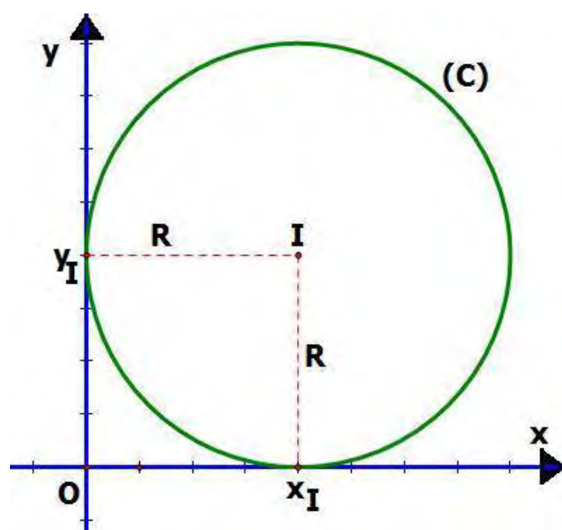
☻ **Nhận xét và ý tưởng**:

_ Nhận xét: khi đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành

$\rightarrow$ **d[I;Ox] = $|y_I|$ = R** và khi (C) tiếp xúc với trục tung

$\rightarrow$ **d[I; Oy] = $|x_I|$ = R**

_ Như vậy do (C) tiếp xúc Ox tại A $\rightarrow x_I = x_A$ và $|y_I| = R \rightarrow$ như vậy



chỉ cần xác định được tung độ của điểm I là ta đã có thể viết được phương trình đường tròn.

_ Ở đây đề bài tiếp túc đề cập đến khoảng cách từ một đến khoảng cách từ 1 điểm đến một đường tròn → đó chính là khoảng cách từ tâm đến điểm đó → nói cách khác đó chính là đoạn BI → giải phương trình ta tìm được tung độ điểm I.

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi (C) là phương trình cần tìm có tâm I(a; b) , bán kính R. Do (C) tiếp xúc trục hoành tại A

Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ |b| = R \end{cases}$. Vậy I(2; b) $\Rightarrow \overrightarrow{BI} = (2-6; b-4) = (-4; b-4)$

* Theo đề bài ta có $IB = 5 \Leftrightarrow IB^2 = 25 \Leftrightarrow 16 + (b-4)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 7 \\ b = 1 \end{array}\right.$

* Với b = 7, ta có tâm I(2; 7) và $R_1 = 7$.

Do đó phương trình đường tròn (C_1) là: $(C_1): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$

* Với b = 1, ta có tâm I(2; 1) và $R_2 = 1$.

Do đó phương trình đường tròn (C_2) là: $(C_2): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$(C_1): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$ hay $(C_2): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

CÂU 22 (CHÍNH THỨC – ĐH D2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và tọa độ điểm C(2; 0). Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.***

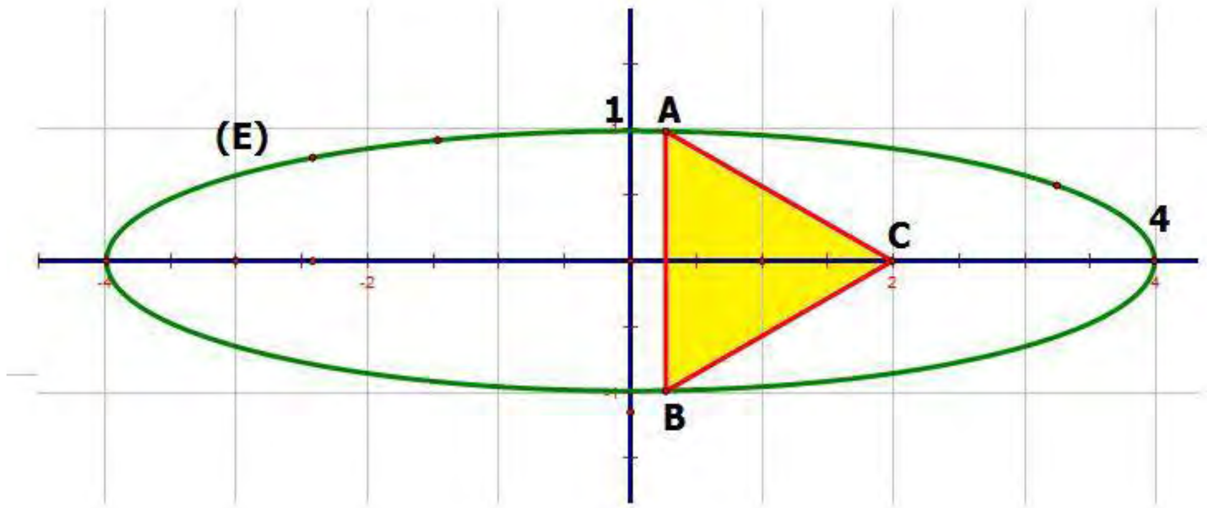
☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Do A và B đối xứng và trục hoành nên ta có chúng có cùng hoành độ và tung độ trái dấu.

_ Như vậy ta có thể biểu thị tọa độ điểm B theo điểm A → có 2 ẩn → cần 2 phương trình để lập

_ Phương trình (1) chính là A thuộc (E) và Phương trình (2) chính là AB = AC

_ Chú ý: AC = CB là hiển nhiên vì C thuộc trục hoành và trục hoành đang là trung trực của AB.



► **Hướng dẫn giải :**

* Giả sử tọa độ điểm $A(x_A;y_A)$. Do A và B đối xứng nhau qua trục hoành $\Rightarrow B(x_A;-y_A)$

  Ta có $AB^2 = 4{y_A}^2$ và $AC^2 = (x_A-2)^2 + {y_A}^2$

* Vì $A \in (E) \Rightarrow \frac{{x_A}^2}{4} + \frac{{y_A}^2}{1} = 1 \Rightarrow {y_A}^2 = 1 - \frac{{x_A}^2}{4}$ (1)

* Để ΔABC đều $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow 4{y_A}^2 = (x_A-2)^2 + {y_A}^2$ (2).

* Thay (1) vào (2), ta được

$$4\left(1-\frac{{x_A}^2}{4}\right) = (x_A-2)^2 + 1 - \frac{{x_A}^2}{4} \Leftrightarrow 7{x_A}^2 - 16x_A + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 2 \\ x_A = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

* Với $x_A = 2$, thay vào (1) ta có $y_A = 0$ (loại vì trùng với điểm C).

* Với $x_A = \frac{2}{7}$, thay vào (1) ta có $y_A = \frac{\pm 4\sqrt{7}}{3}$

  Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)}$$

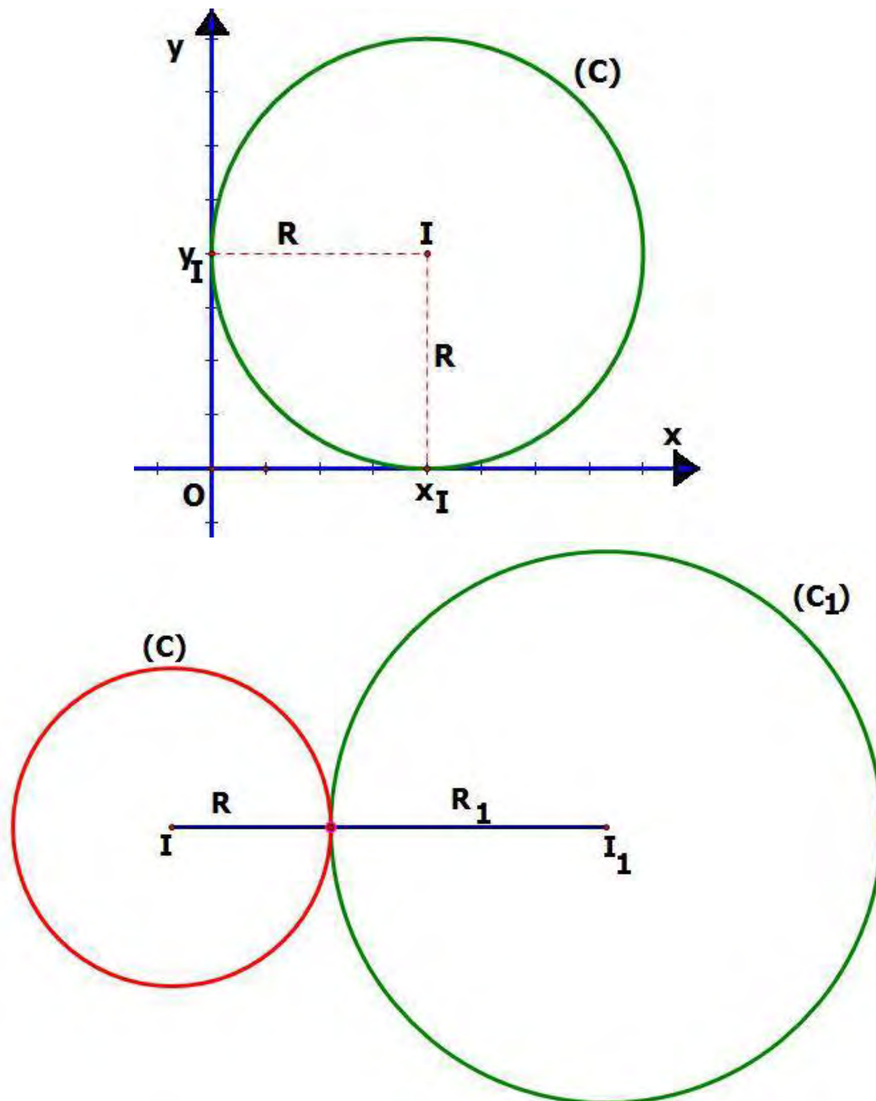
CÂU 23 (DỰ BỊ 1 – ĐH A2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình:*** $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 36 = 0$. ***Viết phương trình đường tròn (C₁) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy, đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).***

☺**Nhận xét và ý tưởng :**

_ Tương tự như câu 21, ta có trong bài này đường tròn cần tìm tiếp xúc với cả hai trục tọa độ → |a| = |b| = R (với I(a; b) là tâm và R là bán kính.)

_ Cuối cùng là ta sử dụng điều kiện để 2 đường tròn **tiếp xúc ngoài** với nhau đó chính là tổng hai bán kính bằng khoảng cách nối hai tâm của hai đường tròn.

_ Với những phân tích và nhận xét trên, tác giả trình bay theo hai hướng. Mời các bạn xem lời giải.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(6;2) và R = 2. Gọi đường tròn cần tìm là (C_1) có tâm $I_1(a; b)$ và bán kính R_1.

Do (C_1) tiếp xúc với hai trục Ox, Oy nên tâm I 1 c) tiếp xúc với hai trục Ox, Oy nên tâm I_1 nằm trên đường thẳng y = ± x và vì (C) có tâm I(6;2), R = 2 nên đường tròn (C) nằm bên phải trục tung.

* Do đó tâm $I_1(a;\pm a)$, $a > 0$

* TH1: I_1 thuộc đường thẳng y = x ⇒ I(a; a), bán kính R_1 = a.
  Để (C_1) tiếp xúc ngoài với (C)
  $\Leftrightarrow \quad II_1 = R + R_1 \Leftrightarrow \sqrt{(a-6)^2 + (a-2)^2} = 2 + a$ (do a > 0 nên ta bình phương 2 về phương trình và thu gọn, ta được:
  $$a^2 - 20a + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 18 \end{array}\right.$$
  Vậy với TH1, ta có hai đường tròn thỏa mãn là:
  $$\left[\begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-18)^2 + (y-18)^2 = 18^2 \end{array}\right.$$
* TH2: I_1 thuộc đường thẳng y = – x ⇒ I(a; –a), bán kính R_1 = a.
  Tương tự, ta có $II_1 = R + R_1 \Leftrightarrow \sqrt{(a-6)^2 + (-a-2)^2} = 2 + a$ (do a > 0 nên ta bình phương 2 về phương trình và thu gọn, ta được: $a = 6$
  Vậy với TH2, ta có hai đường tròn thỏa mãn là: $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-18)^2 + (y-18)^2 = 18^2 \\ (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \end{array}\right.}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Đường tròn (C) có tâm I(6;2) và R = 2. Gọi đường tròn cần tìm là (C_1) có tâm I_1(a; b) và bán kính R_1.
* Ta có (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài với (C)
  $$\text{Suy ra} \begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ |a| = R_1 \\ |b| = R_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-6)^2 + (b-2)^2} = 2 + R_1 \ (*) \\ |a| = R_1 \\ |b| = R_1 \end{cases}$$
* TH1: a = R_1, b = R_1 khi đó (*)
  $$\Leftrightarrow \sqrt{(R_1-6)^2 + (R_1-2)^2} = 2 + R_1 \Leftrightarrow R_1^2 - 20R_1 + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R_1 = 2 \\ R_1 = 18 \end{array}\right.$$
  Vậy với TH1, ta có hai đường tròn thỏa mãn là:
  $$\left[\begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-18)^2 + (y-18)^2 = 18^2 \end{array}\right.$$
* TH2: a = –R_1, b = R_1

khi đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(-R_1-6)^2+(R_1-2)^2}=2+R_1 \Leftrightarrow R_1^{\,2}-4R_1+36=0$ (VN)

* TH3: $a = R_1$, $b = -R_1$

Khi đó (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{(R_1-6)^2+(-R_1-2)^2}=2+R_1 \Leftrightarrow R_1^{\,2}-12R_1+36=0 \Leftrightarrow R_1=6$

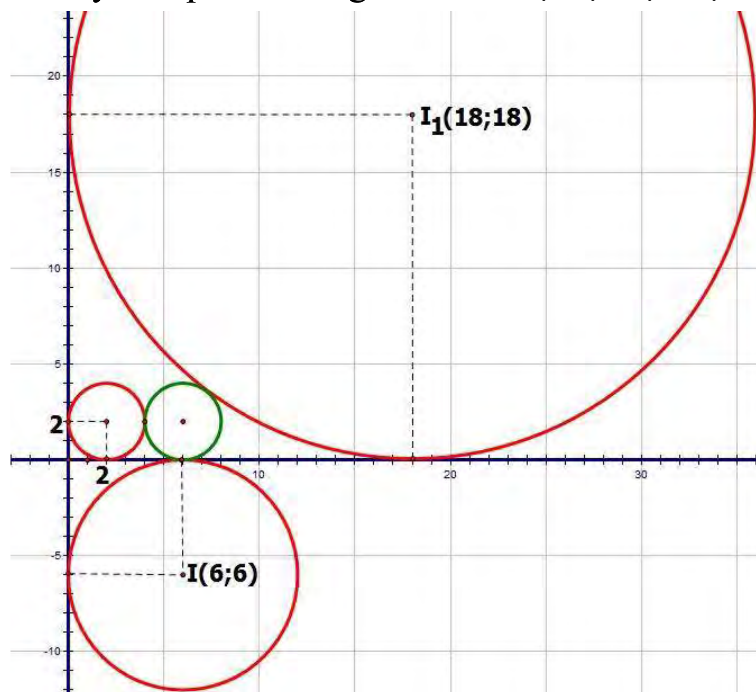
* TH4: $a = -R_1$, $b = -R_1$

Khi đó (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{(R_1+6)^2+(R_1+2)^2}=2+R_1 \Leftrightarrow R_1^{\,2}+12R_1+36=0 \Leftrightarrow R_1=-6$ (VN)

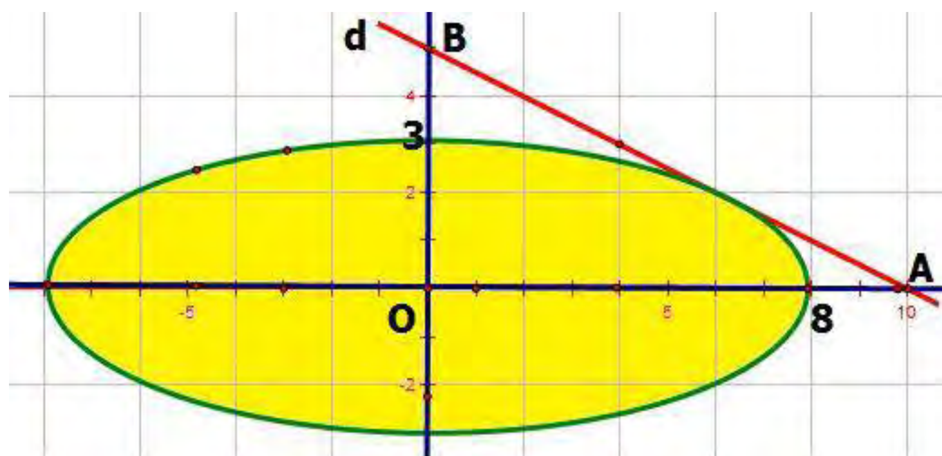
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\left[\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\(x-18)^2+(y-18)^2=18^2\\(x-6)^2+(y+6)^2=36\end{array}\right.$

■ **Lời bình**: Sau đây kết quả 3 đường tròn trên hệ trục tọa độ mà ta tìm được:



CÂU 24 (DỰ BỊ 2 – ĐH B2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E):*** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$. ***Viết phương trình tiếp tuyến d của (E) biết d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho AO = 2BO.***

☺**Nhận xét và ý tưởng *:***



_ Trước khi làm bài này, bạn đọc có thể xem lại câu 3 để hiểu rõ hơn về dạng tiếp tuyến của Elip).

_ Ở bài này chúng ta có thể giải theo hướng đó là phát hiện đường thẳng d cần viết chính là phương trình đoạn chắn 2 trục tọa độ → kết hợp với điều kiện tiếp xúc giữa d và (E) → tìm được đường thẳng d.

_ Hoặc ta cũng có thể dựa vào liên hệ OA = 2OB → suy ra hệ số góc của đường thẳng d: y = kx + m → sử dụng điều kiện tiếp xúc (E) và d để giải → tìm được đường thẳng d.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Do tính đối xứng của elip (E), ta chỉ cần xét trường hợp x ≥ 0, y ≥ 0. Gọi A(2m; 0) , B(0; m) là giao điểm của tiếp tuyến của (E) với các trục tọa độ (m > 0). Phương trình tiếp tuyến của (E) với các trục tọa độ (m > 0) là:

$$\frac{x}{2m}+\frac{y}{m}=1 \Leftrightarrow \boxed{AB: x+2y-2m=0}$$

* Do AB tiếp xúc (E) ⇔ $64+4.9=4m^2 \Leftrightarrow m=5\ (m>0)$

* Vậy phương trình tiếp tuyến là x + 2y – 10 = 0

* Do tính đối xứng nên ta có tất cả 4 tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} x+2y-10=0 \\ x+2y+10=0 \\ x-2y-10=0 \\ x-2y+10=0 \end{array}\right.}$$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi A(m; 0), B(0; n) là giao điểm của tiếp tuyến của (E) với các trục tọa độ (m, n ≠ 0)

Phương trình AB: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \Leftrightarrow \boxed{AB: \text{n}\,x+my-mn=0}$

* Do AB tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow 64n^2 + 9m^2 = m^2.n^2$ (1)
* Mặt khác OA = 2OB $\Leftrightarrow |m| = 2|n| \Leftrightarrow m^2 = 4n^2$ (2)
* Thay (2) vào (1), ta được: $64n^2 + 9.4n^2 = 4n^4 \Leftrightarrow n^2 = 25 \Leftrightarrow n = \pm 5$
* Với $n = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -10 \end{array}\right.$.

  Vậy ta có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x + 2y - 10 = 0 \\ x - 2y + 10 = 0 \end{array}\right.}$

* Với $n = -5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -10 \end{array}\right.$.Vậy ta có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là:

  $\boxed{\left[\begin{array}{l} x - 2y - 10 = 0 \\ x + 2y + 10 = 0 \end{array}\right.}$

Vậy đường thẳng d cần tìm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} x + 2y - 10 = 0 \\ x + 2y + 10 = 0 \\ x - 2y - 10 = 0 \\ x - 2y + 10 = 0 \end{array}\right.}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Gọi phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng y = kx + m với k là hệ số góc của đường thẳng d.

  Ta có hệ số góc k = $\pm \frac{OB}{OA} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 : y = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow x - 2y + 2m = 0 \\ d_2 : y = \frac{-1}{2}x + m \Leftrightarrow x + 2y - 2m = 0 \end{array}\right.$

* TH1: d_1 tiếp xúc (E) $\Rightarrow 64 + 4.9 = 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 5$

  Vậy ta có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x - 2y - 10 = 0 \\ x - 2y + 10 = 0 \end{array}\right.}$

* TH2: d_2 tiếp xúc (E) $\Rightarrow 64 + 4.9 = 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 5$

  Vậy ta có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x + 2y - 10 = 0 \\ x + 2y + 10 = 0 \end{array}\right.}$

Vậy đường thẳng d cần tìm thỏa yêu cầu bài toán là $\left[\begin{array}{l} x+2y-10=0 \\ x+2y+10=0 \\ x-2y-10=0 \\ x-2y+10=0 \end{array}\right.$

CÂU 25 (DỰ BỊ 3 – ĐH B2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C₁):*** $x^2+y^2=9$ ***và đường tròn (C₂):*** $x^2+y^2-2x-2x-23=0$. ***Viết phương trình trục đẳng phương d của 2 đường tròn (C₁), (C₂). Chứng minh rằng nếu K thuộc d thì khoảng cách từ K đến tâm (C₁) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C₂).***

■ **Đặt vấn đề :** Để rõ hơn về trục đẳng phương của hai đường tròn, bạn đọc có thể xem trong phần chủ đề 2(viết phương trình đường thẳng) và chủ đề 3(viết phương trình đường tròn). Đây là nội dung không nằm trong chương trình Phổ thông hiện hành, nhưng một số ứng dụng của chúng lại giúp chúng ta giải quyết các bài toán về đường tròn một cách nhanh gọn. Cụ thể như thế nào mời bạn đọc theo dõi.

☺**Nhận xét và ý tưởng*:***

♥ Định nghĩa **phương tích**: Cho đường $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$.
Khi đó $P_{M/(C)}=\overline{MA}.\overline{MB}$ không phụ thuộc vào phương của cát tuyến MAB của đường tròn mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm M.
Cụ thể nếu $M(x_o; y_o)$ thì $P_{M/(C)}={x_0}^2+{y_0}^2+2ax_0+2by_0+c=0$.

♥ Định nghĩa **trục đẳng phương**: Cho 2 đường tròn $(C_1), (C_2)$, khi đó:
Tập $d=\left\{M \mid P_{M/(C_1)}=P_{M/(C_2)}\right\}$ là một đường thẳng và đó gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Giả sử $\begin{cases}(C_1): x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0 \\ (C_2): x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0\end{cases}$

Thì phương trình trục đẳng phương là:

$$\boxed{2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)x+c_1-c_2=0}$$

♥ Chú ý:

+ Khi 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm A, B thì AB chính là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)

+ Khi 2 đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm A thì trục đẳng phương của 2 đường tròn chính là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn tại điểm A.

Trở lại bài toán, như vậy dựa vào định nghĩa và tính chất của trục đẳng phương ta dễ dàng tìm được phương trình trục đẳng phương.

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C_1) có tâm O(0; 0), bán kính $R_1 = 3$. Đường tròn (C_2) có tâm I(1; 1), bán kính $R_2 = 5$.

* Phương trình trục đẳng phương của 2 đường tròn (C_1) và (C_2) là:

$$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-2x-2y-23)=0 \Leftrightarrow \boxed{d: x+y+7=0}$$

* Gọi K là điểm thuộc d ⇒ K(k; – 7 – k)

* Xét $\begin{cases} OK^2 = k^2+(k+7)^2 \\ IK^2 = (k-1)^2+(k+8)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow IK^2 - OK^2 = [(k-1)^2+(k+8)^2]-[k^2+(k+7)^2] = 16 > 0$$

Suy ra IK > OK (đpcm)

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là $\boxed{d: x+y+7=0}$

CÂU 26 (DỰ BỊ 4 – ĐH D2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ là phương trình của đường tròn (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d: $2x - y + 3 = 0$ sao cho MI = 2R, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để tìm điểm M thỏa yêu cầu bài toán trên → M ∈ d (tham số hoa điểm M →1 ẩn → cần 1 phương trình.

_ Phương trình đó là MI = 2R (như vậy đường tròn giúp ta khai thác tâm và bán kinh)

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm I(2; 3), bán kính R = 5

* M ∈ d: 2x – y + 3 = 0 ⇒ M(m; 2m + 3) và $\overrightarrow{IM} = (m-2; 2m)$

* Theo yêu cầu bài toán ta có

$$MI = 2R = 10 \Leftrightarrow IM^2 = 100 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = \dfrac{24}{5} \end{array}\right.$$

Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(-4;-5) \text{ hay } M\left(\dfrac{24}{5}; \dfrac{63}{5}\right)}$

CÂU 27 (DỰ BỊ 5 – ĐH D2005). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 điểm A(0;5), B(2; 3). Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính bằng*** $\sqrt{10}$

■ **Đặt vấn đề :** Bài toán " viết phương trình đường tròn " từ lâu đã không còn lạ lẫm với các bạn học sinh. Có hai khuynh hướng chung có thể dễ thấy nhất khi lập phương trình đường tròn, hoặc là tìm kiếm 3 điểm thuộc đường tròn, hoặc là xác định tâm và bán kính. Bài toán thậm chí có thể cho sẵn tâm hoặc cho sẵn bán kính và dĩ nhiên ta phải xác định yếu tố còn lại để viết phương trình. Vậy với câu 27 này, ta xử lý như thế nào ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺**Nhận xét và ý tưởng :**

_ Hướng thứ 1: ta đã xác định được bán kính → tìm tâm I(a; b) → 2 ẩn → cần 2 phương trình → ta có thể gọi dạng tổng quát để giải.

_ Hướng thứ 2: ta cũng có thể gọi dạng khai triển (chứa 3 ẩn a,b,c) → cần 3 phương trình → gồm có A ∈ (C), B ∈ (C) và R = $\sqrt{10}$.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi dạng tổng quát của phương trình cần tìm là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2=10$$

* Ta có

$$\begin{cases} A\in(C) \\ B\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(5-b)^2=10 \\ (2-a)^2+(3-b)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+25-10b+b^2=10 & (1) \\ a^2-4a+4+9-6b+b^2=10 & (2) \end{cases}$$

* Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2) ta được: a – b + 3 = 0

⇒ b = a + 3 (3)

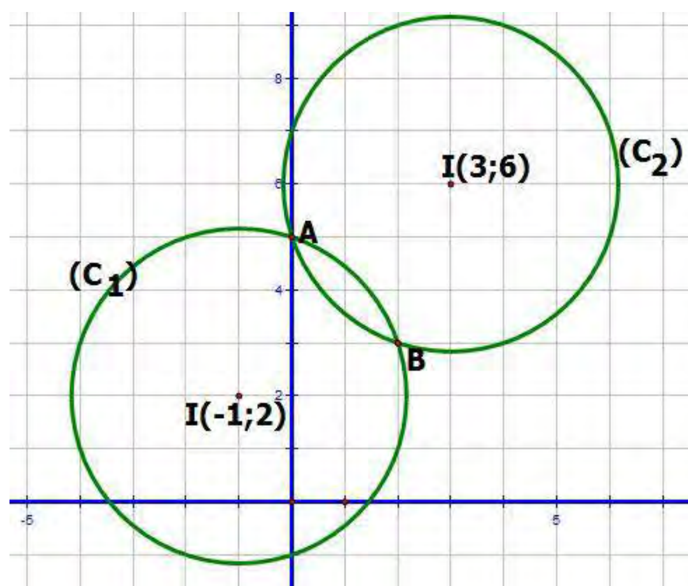
* Thay (3) vào (1) ta được: $a^2+25-10(a+3)+(a+3)^2=10$

Suy ra $2a^2-4a-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow b=2 \\ a=3 \Rightarrow b=6 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} (x+1)^2+(y-2)^2=10 \\ (x-3)^2+(y-6)^2=10 \end{array}\right.}$$

Còn đây là hình ảnh 2 đường tròn thỏa yêu cầu bài toán trên hệ trục Oxy.



► Hướng dẫn giải cách 2:

* Gọi dạng phương trình khai triển của đường tròn có dạng:

$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó I(a; b) và $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

* Theo đề bài ta có: $\begin{cases} A \in (C) \\ B \in (C) \\ R = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b + c = -25 & (1) \\ -4a - 6b + c = -13 & (2) \\ a^2 + b^2 - c = 10 & (3) \end{cases}$

* Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = b - 3 \\ c = 10b - 25 \end{cases}$ thay vào (3) ta được :

$(b-3)^2 + b^2 + 25 - 10b = 10$

Suy ra $2b^2 - 16b + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 6 \end{array}\right.$

* Với b = 2 $\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -5 \end{cases}$.

Vậy $(C_1): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

* Với b = 6 $\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 35 \end{cases}$.

Vậy $(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$$\left[\begin{array}{l} (C_1): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0 \end{array}\right.$$

■ **Lời bình**: Có thể thấy việc bạn xuất phát ở cách 1 hay 2 thì mấu chốt chính là cách chúng ta giải hệ phương trình 2 ẩn hay 3 ẩn. Đây là kỹ năng giải các bài toán đại số mà học sinh phải nắm vững. Cũng phải lưu ý với bạn đọc về "hệ phương trình" hình thành trong quá trình giải các bài toán hình học không hề quá khó, bạn sử dụng các kỹ năng thường thấy khi giải hệ đó chính là " cộng, trừ, rút, thế " các vế của từng phương trình trong hệ để quy về 1 ẩn 1 phương trình.

CÂU 28 (CHÍNH THỨC – ĐH A2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng lần lượt có phương trình d_1: x + y + 3 = 0, d_2: x – y – 4 = 0 và d_3: x – 2y = 0. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đương thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d_2.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Bài toán này chỉ dựa trên 2 vấn đề " tham số hóa 1 điểm" và "khoảng cách". Đây là một trong những câu hỏi dễ trong đề thi tuyển sinh đại học – cao đẳng chính thức dễ nhất mà chúng ta từng thấy.

_ Tham số hóa điểm M theo đường d_3 và xét $d[M;d_1] = 2d[M;d_2]$ → tìm tọa độ điểm M.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có $M \in d_3: x - 2y = 0 \Rightarrow M(2m; m)$

* Theo yêu cầu bài toán ta có: $d[M;d_1] = 2d[\text{M};\text{d}_2]$

Suy ra $\dfrac{|2m+m+3|}{\sqrt{1+1}} = 2\dfrac{|2m-m-4|}{\sqrt{1+1}}$

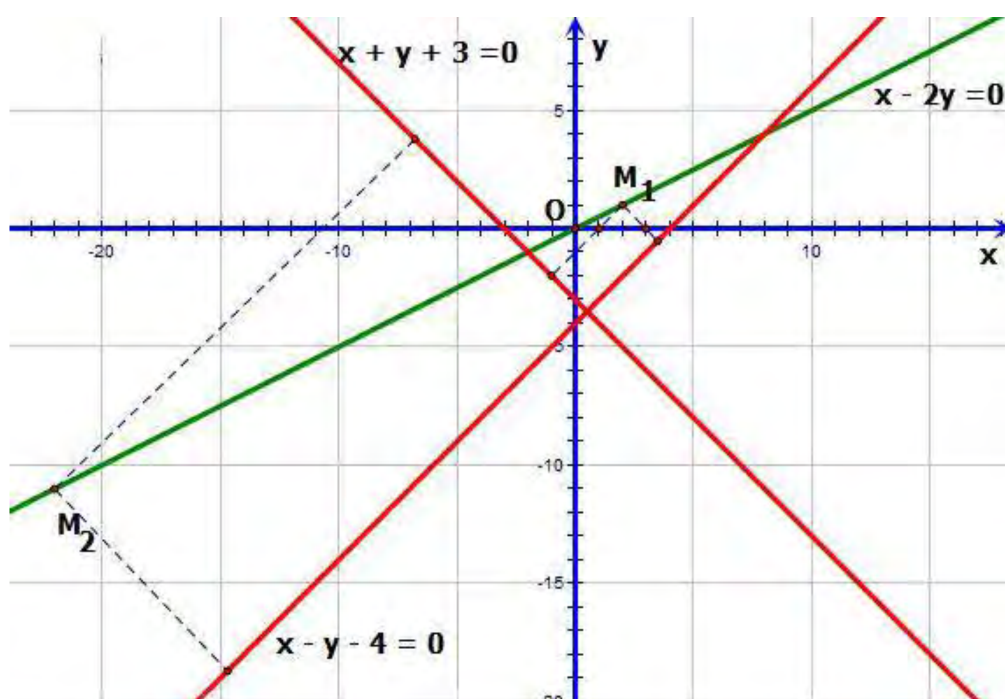
$\Leftrightarrow |3m+3| = |2m-8|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m+3 = 2m-8 \\ 3m+3 = 8-2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -11 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán là

$\boxed{M_1(-22;-11) \text{ hay } M_2(2;1)}$

■ **Lời bình**: Chúng ta có thể kiểm tra lại kết quả bằng cách đưa cách điểm lên hệ trục Oxy.



CÂU 29 (CHÍNH THỨC – ĐH B2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (C):*** $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ ***và điểm M(–3; 1). Gọi*** T_1 ***và*** T_2 ***là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng*** T_1T_2.

■ **Đặt vấn đề :** đối với các bài toán liên quan đến đường tròn thì ngoài tiếp tuyến là một chủ đề khá quen thuộc thì dây cung cũng là một dạng hay bắt gặp trong các đề thi. Vậy khi đó ta sẽ tiếp cận viết phương trình đường thẳng chứa dây cung như thế nào ? Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺ **Nhận xét và ý tưởng*:***

_ Trước tiên, chúng ta sẽ xét vị trí tương đối giữa điểm M và đường tròn (C) bằng cách xác định độ dài đoạn MI với R.

_ Ở đây thực chất T_1T_2 chính là dây cung tạo bởi 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M và chúng ta có một số hướng tiếp cận như sau:

+ **Hướng thứ 1**: Suy nghĩ rất giản đơn là ta tìm tọa độ của điểm T_1 và T_2 $\rightarrow$ Xét T_1 và T_2 trong sự tương giao của đường tròn (C) và một đường tròn ẩn mình (C’) có tâm M và bán kính MT_1.

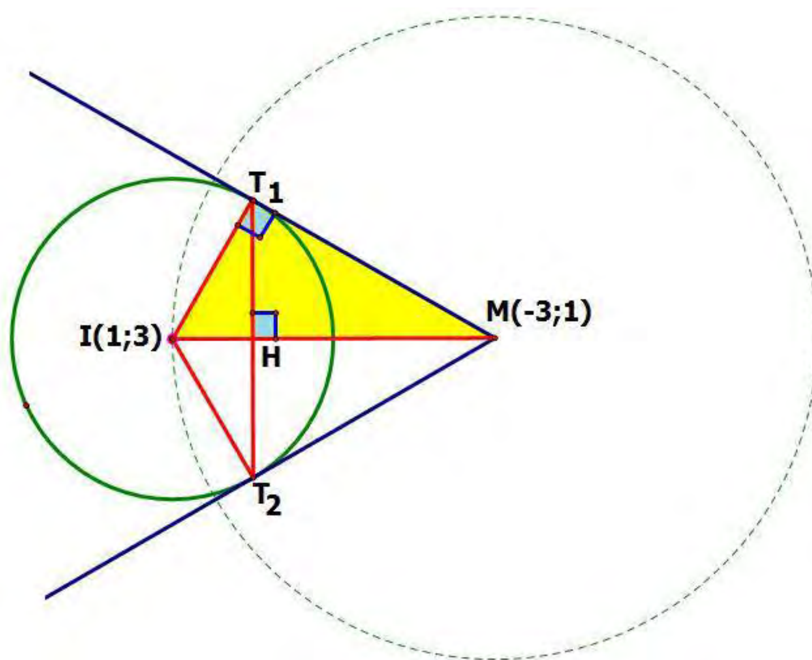
+ **Hướng thứ 2**: Tương tự hướng thứ 1 ta cũng phát hiện T_1T_2 chính là dây cung chung của 2 đường tròn (C) và (C’) ((C’) có tâm M và bán kính MI) $\rightarrow$ T_1T_2 chính là Trục đẳng phương của 2 đường tròn.

+ **Hướng thứ 3**: Theo tính chất qua một điểm nằm ngoài đường tròn kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn thì ta phát hiện T_1T_2 vuông góc với MI $\rightarrow$ nếu Gọi $H = MI \cap T_1T_2$ thì ta sẽ viết được phương trình đường T_1T_2

→ tìm tọa độ H ? → tính độ dài IH (do nhận xét $\Delta MIT_1 \perp T_1$ có IT_1 là đường cao) → đọ tỉ số độ dài với IM và ta sẽ được $IH = kIM$ $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{IM}$,$(k > 0)$.

+ **Hướng thứ 4**: Dựa trên đáp án lời giải của Bộ GD&ĐT → Gọi $T(x_o; y_o)$ là tiếp điểm → ta có T ∈ (C) và MI ⊥ TI → giải tiếp bạn sẽ thấy chúng giống hướng thứ 2 (dùng trục đẳng phương).

+ **Hướng thứ 5**: Dựa vào **phương pháp phân đôi** của tiếp tuyến đối với đường tròn (C) → để tìm ra quỹ tích biểu diễn tọa độ điểm T_1 và T_2 → phương trình T_1T_2.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 2.

Ta có $\overrightarrow{MI} = (4;2) \Rightarrow MI = 2\sqrt{5} \Rightarrow MT_1 = 4$

* T_1, T_2 chính là giao điểm giữa đường tròn (C) và (C') có tâm M(–3;1) và bán kính $MT_1 = 4$

Suy ra tọa độ T_1, T_2 thỏa hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 16 \end{cases}$ (Việc giải hệ này xin dành cho bạn đọc).

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{-3}{5} \Rightarrow y = \dfrac{21}{5} \end{array}\right.$.

Do vai trò của T_1, T_2 là như nhau nên đặt $T_1(1;1)$, $T_2\left(\frac{-3}{5};\frac{21}{5}\right)$

* Đường thẳng T_1T_2 qua $T_1(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{MI}=(4;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $2(x-1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{T_1T_2: 2x+y-3=0}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{T_1T_2: 2x+y-3=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 2.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(4;2)\Rightarrow MI=2\sqrt{5}\Rightarrow MT_1=4$

* Phương trình đường tròn (C') tâm M(–3; 1) và bán kính MT_1 = 4 là: $(x+3)^2+(y-1)^2=16$

* Nhận xét T_1T_2 chính là giao điểm chung của 2 đường tròn ⇒ T_1T_2 chính là trục đẳng phương của hai đường tròn nên có phương trình:

$$T_1T_2:(x^2+y^2-2x-6y+6)-[(x+3)^2+(y-1)^2-16]=2x+y-3$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{T_1T_2: 2x+y-3=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 2. Ta có

$$\overrightarrow{MI}=(4;2)\Rightarrow MI=2\sqrt{5}$$

* Gọi H = $T_1T_2 \cap MI$, ta có $\Delta MIT_1 \perp T_1$, đường cao HT_1 có

$$IT^2=IH.IM\Rightarrow IH=\frac{IT^2}{IM}$$

$$\Rightarrow \frac{IH}{IM}=\frac{IT^2}{IM^2}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow \begin{cases} x_H-1=\frac{-4}{5} \\ y_H-3=\frac{-2}{5}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{1}{5};\frac{13}{5}\right)$$

* Đường thẳng T_1T_2 qua $H\left(\frac{1}{5};\frac{13}{5}\right)$ và nhận $\overrightarrow{MI}=(4;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $2\left(x-\frac{1}{5}\right)+1\left(y-\frac{13}{5}\right)=0\Leftrightarrow \boxed{T_1T_2: 2x+y-3=0}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{T_1T_2: 2x+y-3=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 4:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 2.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(4;2)\Rightarrow MI=2\sqrt{5}>R$ nên M nằm ngoài đường tròn (C).

* Gọi $T(x_o;y_o)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến C thỏa:

$$\begin{cases} T\in(C) \\ \overrightarrow{IT}.\overrightarrow{MT}=0 \end{cases}$$

* Với $\overrightarrow{MT}=(x_o+3;y_o-1),\ \overrightarrow{IT}=(x_o-1;y_o-3)$.

Do đó ta có: $\begin{cases} x_o^2+y_o^2-2x_o-6y_o+6=0 \\ (x_o+3)(x_o-1)+(y_o-1)(y_o-3)=0 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x_o^2+y_o^2-2x_o-6y_o+6=0 \\ x_o^2+y_o^2+2x_o-4y_o=0 \end{cases}\Rightarrow 2x_o+y_o-3=0$ (*)

Vậy tọa độ các tiếp điểm T_1 và T_2 của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) đều thỏa mãn đẳng thức (*).

Do đó phương trình đường thẳng $\boxed{T_1T_2:2x+y-3=0}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{T_1T_2:2x+y-3=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 5:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 2.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(4;2)\Rightarrow MI=2\sqrt{5}>R$ nên M nằm ngoài đường tròn (C).

* Gọi $T(x_o;y_o)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến Δ đến (C) thì phương trình Δ có dạng:

$$\Delta: x_ox+y_oy-(x+x_o)-3(y+y_o)+6=0$$

* M(–3; 1) ∈ Δ ⇒ $2x_o+y_o-3=0$ (*)

* Vì $T_1(x_1;y_1),\ T_2(x_2;y_2)$ là tiếp điểm $\Rightarrow \begin{cases} 2x_1+y_1-3=0 \\ 2x_2+y_2-3=0 \end{cases}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{T_1T_2:2x+y-3=0}$

■ **Lời bình**: Cả 5 cách giải đều có cái hay riêng của nó. Tuy nhiên cho đến thời điểm hiện tại cách giải 1 và 3 là được sử dụng nhiều nhất. Đối với trục đẳng phương, tác giả đã giới thiệu ở những bài trước bạn đọc có thể theo dõi để hiểu rõ hơn. Riêng với phương pháp phân đôi (thuộc chương trình sách giáo khoa cũ) thì đây là một phương pháp cũng khá hay khi sử dụng viết phương trình tiếp tuyến của một đường tròn mà bạn đã biết tiếp điểm. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm ở phần bài tập của chủ đề 3, chương 2 để hiểu rõ hơn.

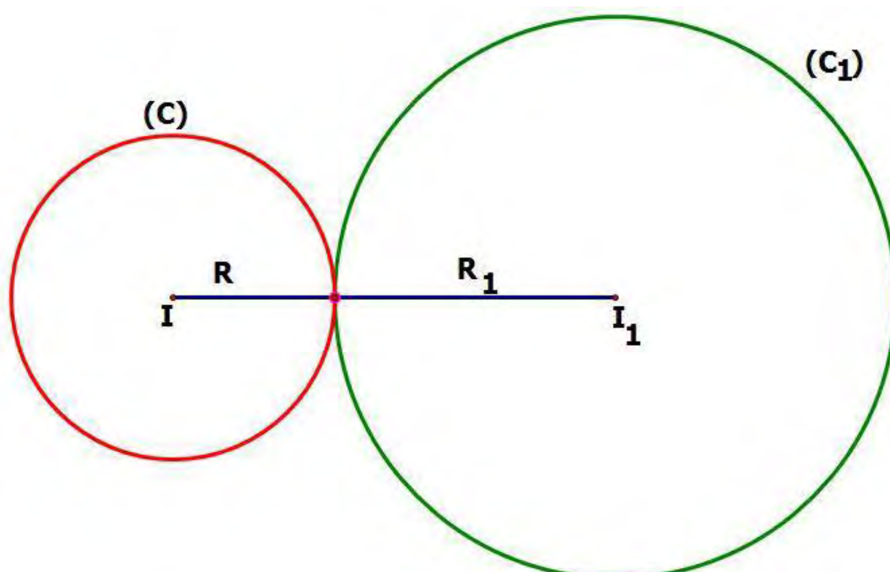
CÂU 30 (CHÍNH THỨC – ĐH B2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (C):*** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ ***và đường thẳng d: x – y + 3 = 0. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để xác định tọa độ M → tham số hóa M theo đường d → 1 ẩn nên cần một phương trình

_ Bài toán đã đề cập đến một trong những vấn đề liên quan đến bài toán tiếp xúc của đường tròn. Đó chính là bài toán "đường tròn tiếp xúc ngoài với một đường tròn" → vậy điều kiện tiếp xúc là gì ? → Tổng độ dài hai bán kính bằng khoảng cách giữa hai tâm → phương trình cần tìm.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**



* Đường tròn (C) có bán tâm I(1; 1) và bán kính R = 1.

* Do M ∈ d: x – y + 3 = 0 ⇒ M(m; m + 3)

* Theo yêu cầu bài toán ta có MI = R + 2R

$$\Leftrightarrow (m-1)^2+(m+2)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $M_1(1;4)$ hay $M_2(-2;1)$

■ **Lời bình**: Qua bài toán này, ta rút ra một số lưu ý

Một là, điều kiện tiếp xúc giữa 2 đường tròn gồm có tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong. Đối với tiếp xúc ngoài thì như đã chỉ ra → "tổng hai bán kính = khoảng cách 2 tâm", đối với tiếp xúc trong thì "hiệu hai bán kính = khoảng cách 2 tâm".

Hai là, giả sử bài toán này cho một điểm M thuộc đường tròn (C') khác thì bạn đọc sẽ xử lý như thế nào ? → chúng ta có thể tham số hóa theo lượng giác. Ví dụ M ∈ (C'): $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ M(2cost; 2sint).

CÂU 31 (DỰ BỊ 1 – ĐH A2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận là y = ± 2x và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip (E).***

■ **Đặt vấn đề :** dạng bài viết phương trình chính tắc của các đường conic (elip, hypebol, parabol) từ lâu đã không còn quá xa lạ với các bạn học sinh. Với các dạng bài này thường đề bài đề cập đến các thuộc tính của các đường conic như tiêu điểm, tâm sai, các đường chuẩn, v,v… Tuy vậy về bản chất để xác định được phương trình chính tắc của các đường conic mà cụ thể là đường hypebol ở bài trên thì ta phải xác định được 2 biến số a và b trong phương trình $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, tất là ta đang cần tìm 2 phương trình chứa 2 ẩn a, b để giải. Mời bạn đọc xem lời giải.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Từ phương trình (E) đề bài cho → ta khai thác 2 tiêu điểm (E) chính là 2 tiêu điểm của (H) → phương trình (1)

_ Do đề bài đã cho sẵn đường tiệm cận y = ± 2x → ta thiết lập tìm được phương trình thứ (2).

_ Giải hệ gồm 2 phương trình (1), (2) → phương trình (H) cần tìm

_ Lưu ý: bạn cần nắm vững các kiến thức liên quan đến các đường conic trước khi vào giải bài tập này (để hiểu rõ hơn hãy xem lại kiến thức chương (1)).

► **Hướng dẫn giải**

* (E): $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow$ (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{10};0)$, $F_2(\sqrt{10};0)$

* Gọi phương trình chính tắc của (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a^2+b^2=c^2$

* Do (H) và (E) có cùng tiêu điểm nên $a^2+b^2=10$ (1)

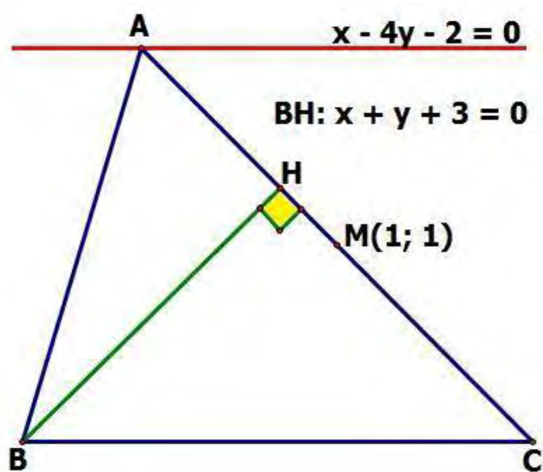
* (H) có hai đường tiệm cận $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 2x \Leftrightarrow \frac{b}{a}=2 \Leftrightarrow b=2a$ (2)

* Thay (2) vào (1) ta được: $a^2 + 5a^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 8$

Vậy phương trình (H) thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(H): \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1}$

CÂU 32 (DỰ BỊ 2 – ĐH A2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng d: x – 4y – 2 = 0, cạnh BC song song với d, phương trình đường cao BH: x + y + 3 = 0 và trung điểm của cạnh AC là M(1; 1). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để tìm tọa độ của một điểm ngoài việc "tham số hóa" điểm đó, ta còn có thể xét chúng trong sự tương giao của các đường. Đề bài đã gợi ý cho ta 3 yếu tố gồm có : đường cao BH, trung điểm M, đường thẳng d // BC. Trong các yếu tố đó yếu tố nào có thể kết hợp lại để tạo ra yếu tố mới ? → câu trả lời chính là đường cao BH và trung điểm M của AC

→ Vì AC ⊥ BH, AC qua M → viết được phương trình AC.

_ Đến đây thì tọa độ điểm A tìm được vì A = AC ∩ d → cùng với tọa độ điểm C (Do M là trung điểm)

_ Lúc này đây đã có thêm 2 yếu tố mới chính là điểm A và C, trong 2 yếu tố đó thì nếu kết hợp tọa độ điểm C và đường thẳng d // BC → viết được phương trình BC → BC ∩ BH = B. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có AC ⊥ BH: x + y + 3 = 0

⇒ AC: x – y + m = 0, AC qua M(1; 1) ⇒ m = 0

Vậy AC: x – y = 0.

* Ta có A = AC ∩ d ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 4y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{-2}{3}; \frac{-2}{3}\right)}$$

* Lại có M là trung điểm AC ⇒ $\boxed{C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)}$

* Mặt khác, BC // d: x – 4y – 2 = 0 ⇒ BC: x – 4y + n = 0 (n ≠ –2), BC qua $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ ⇒ n = –8

Vậy BC: x – 4y – 8 = 0

* Ta có B = BH ∩ BC ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-4y-8=0 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-4;1)}$$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $\boxed{A\left(\frac{-2}{3};\frac{-2}{3}\right), B(-4;1), C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)}$

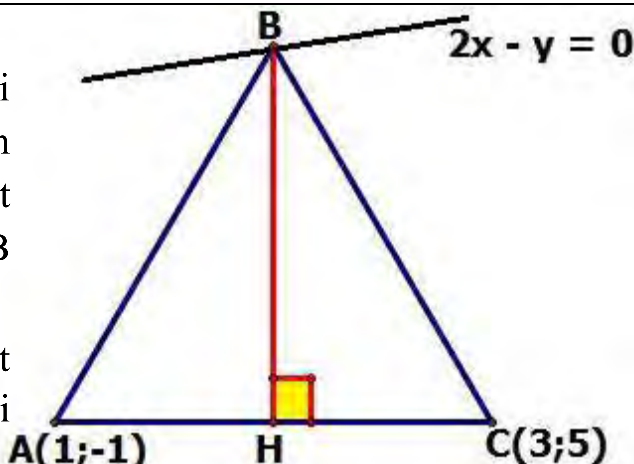
■ **Lời bình**: Qua bài toán này, ta thấy được các yếu tố trong một bài toán thường có một mối liên kết chặt chẽ với nhau và nhiệm vụ của ta là xâu chuỗi chúng lại. Các yếu tố mới tìm được từ yếu tố cũ bao giờ cũng là những "gợi ý quan trọng" giúp ta tìm kiếm ra kết quả.

CÂU 33 (DỰ BỊ 3 – ĐH B2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B với tọa độ các đỉnh A(1; –1), B(3; 5). Điểm B nằm trên đường thẳng d: 2x – y = 0. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Do tính chất ΔABC cân tại B, gọi H là trung điểm AB ⇒ BH chính là trung trực của AC → viết phương trình BH → BH ∩ d = B → tọa độ điểm B.

_ Có tọa độ B kết hợp với A → viết phương trình AB (tương tự với điểm C → viết phương trình BC)



► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi H là trung điểm AC ⇒ H(2; 2). Do ΔABC cân tại B ⇒ BH là đường trung trực của AC

Do đó BH qua H(2; 2) nhận $\overrightarrow{AC}=(2;6)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$2(x-2)+6(y-2)=0 \Leftrightarrow BH: x+3y-8=0$$

* Ta có BH ∩ d = B ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y-8=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{7} \\ y=\dfrac{16}{7} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(\dfrac{8}{7};\dfrac{16}{7}\right)}$$

* Phương trình đường AB qua A(1; –1) nhận $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{23}{7}\right)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{23} \Leftrightarrow \boxed{AB: 23x-y-24=0}$

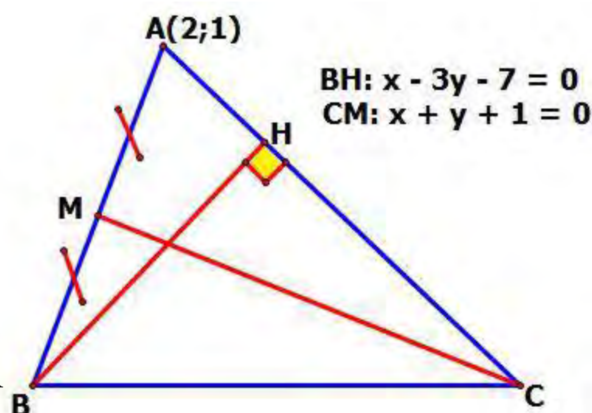
* Phương trình đường BC qua C(3; 5) nhận $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{19}{7}\right)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x-1}{13}=\dfrac{y+1}{19} \Leftrightarrow \boxed{BC: 19x-13y+8=0}$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{\begin{cases} BC: 19x-13y+8=0 \\ AB: 23x-y+24=0 \end{cases}}$$

CÂU 34 (DỰ BỊ 4 – ĐH B2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(2; 1), đường cao qua đỉnh B có phương trình x – 3y – 7 = 0 và đường trung tuyến qua đỉnh C: x + y + 1 = 0. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Ta có thể tọa độ điểm B và C một cách độc lập như sau:

+ Tham số hóa B theo đường BH và gọi M là trung điểm AB → tham số hóa M theo B → M ∈ MC → giải phương trình tìm được tọa độ B.

+ viết pt đường AC ⊥ BH và AC qua A → AC ∩ MC = C → tọa độ điểm C.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có B ∈ BH: x – 3y – 7 = 0 ⇒ B(3b + 7; b).

Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow M\left(\dfrac{3b+9}{2};\dfrac{1+b}{2}\right)$

* Mặt khác M $\in$ CM

$\Rightarrow \dfrac{3b+9}{2}+\dfrac{1+b}{2}+1=0 \Leftrightarrow 3b+9+1+b+2=0 \Leftrightarrow b=-3 \Rightarrow \boxed{B(-2;-3)}$

* Ta có AC $\perp$ BH: x – 3y –7 = 0 $\Rightarrow$ AC: 3x + y + m = 0, AC qua A(2; 1) $\Rightarrow$ m = –7 .

Vậy AC: 3x + y – 7 = 0.

* Lại có C = AC $\cap$ MC $\Rightarrow$ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+y-7=0\\ x+y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=-5\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(4;-5)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;-3),\ C(4;-5)}$

CÂU 35 (DỰ BỊ 5 – ĐH D2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d:*** $x-y+1-\sqrt{2}=0$ ***và tọa độ A(–1; 1). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, O và tiếp xúc với d.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để viết phương trình đường tròn ta có hai hướng chính khai thác:

+ Hướng thứ 1, đó là dựa trên phương trình khai triển của đường tròn (do hiện tại phương trình chưa xác định được tâm và bán kính) $\rightarrow$ thiết lập 3 phương trình 3 ẩn a, b,c để giải.

+ Hướng thứ 2, đó là dựa trên phương trình tổng quát của đường tròn $\rightarrow$ thiết lập 3 phương trình 3 ẩn a, b, R để giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi phương trình khai triển của đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, trong đó tâm I(a; b) và bán kính $R^2=a^2+b^2-c>0$

* Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}O(0;0)\in(C)\\ A(-1;1)\in(C)\\ (C)\text{ tx d}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\ 2+2a-2b+c=0\\ d[I;d]=R\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\ a-b=-1\\ \dfrac{|a-b+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=R\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\ a-b=-1\\ R=1\end{cases}$$

* Mặt khác

$$R^2 = a^2 + b^2 - c \Leftrightarrow 1 = (b-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 - b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \Rightarrow a = -1 \\ b = 1 \Rightarrow a = 0 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} (C_1): x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 + 2x = 0 \end{array}\right.}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi phương trình tổng quát của đường tròn (C) là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, trong đó tâm I(a; b) và bán kính R.

* Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} O(0;0) \in (C) \\ A(-1;1) \in (C) \\ (C) \text{ tx d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (-1-b)^2 = R^2 \\ \dfrac{|a - b + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 & (1) \\ a = b - 1 & (2) \\ R = 1 & (3) \end{cases}$$

* Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $(b-1)^2 + b^2 = 1$

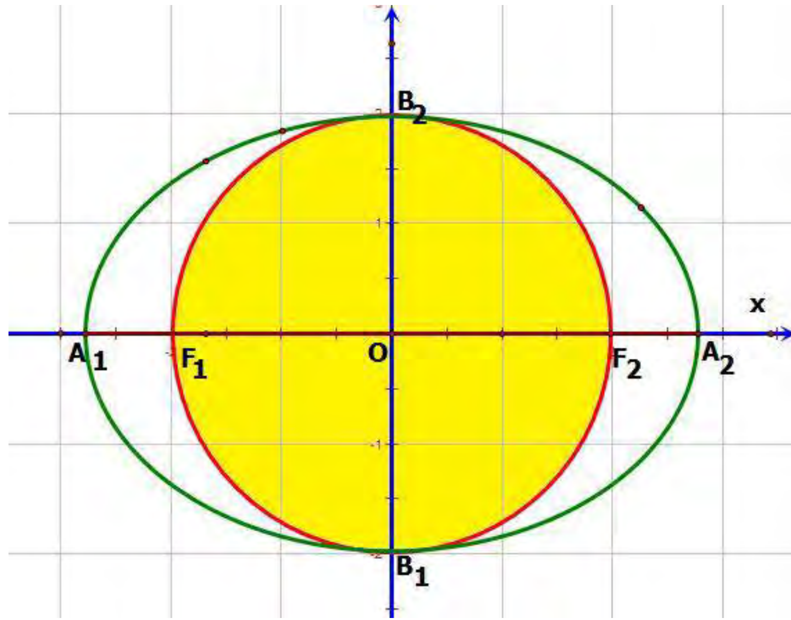
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \Rightarrow a = -1 \\ b = 1 \Rightarrow a = 0 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} (C_1): x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (C_2): (x+1)^2 + y^2 + = 1 \end{array}\right.}$

■ **Lời bình**: Cả hai cách giải đều đòi hỏi ở người làm những kỹ năng cơ bản trong việc giải hệ phương trình. Vấn đề giải hệ phương trình từ lâu không còn xa lạ với các bạn học sinh tuy nhiên nếu không rèn luyện tốt các bạn sẽ gặp một số trục trặc trong quá trình giải chúng. Các kỹ năng yêu cầu thường thấy khi giải hệ phương trình đó chính là các kỹ năng: "rút, thế, cộng, trừ vế các phương trình" trong hệ phương trình nhằm mục đích quy tất cả về 1 ẩn 1 phương trình để giải.

CÂU 36 (DỰ BỊ 6 – ĐH D2006). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng*** $4\sqrt{2}$***, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để thiết lập phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ cần tìm 2 ẩn a, b $\rightarrow$ cần thiết lập 2 phương trình 2 ẩn.

+ Ta có (E) có độ dài trục lớn $\Rightarrow$ phương trình (1).

+ Ta có 2 tiêu điểm và 2 đỉnh trên trục nhỏ thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ phương trình (2).

_ Giải hệ gồm phương trình (1) và (2) $\Rightarrow$ tìm được a, b $\Rightarrow$ phương trình (E).

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 - b^2 = c^2$

* Theo giả thiết của bài toán thì độ dài trục lớn của (E) bằng $4\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2a = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 8$

* Ta có tứ giác $B_1F_1B_2F_2$ là hình thoi, theo giả thiết 4 đỉnh nằm trên đường tròn nên hình thoi trở thành hình vuông

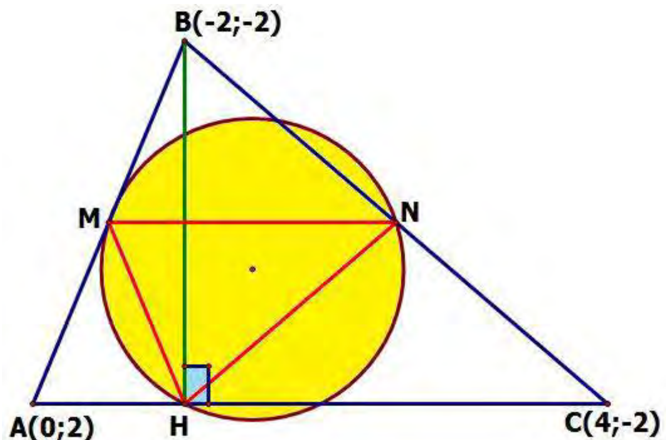
$\Rightarrow$ b = c mà $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 8 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 4$

Vậy phương trình (E) thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1}$

CÂU 37 (CHÍNH THỨC – ĐH A2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh A(0; 2), B(–2; –2) và C(4; –2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B và M, N lần lượt là trung điểm của***

các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Đây rõ rang là bài toán đường tròn đi qua ba đểm H, M, N và đang bị khuyết tâm và bán kính. Vì vậy ta sẽ gọi dạng khai triển của đường tròn để làm.

_ Trong ba tọa độ trên thì tọa độ của điểm M và N tìm được một cách rất dễ dàng thông qua công thức trung điểm. Để tìm tọa độ điểm H ta có hai hướng đi cho bài toán:

+ **Hướng thứ 1**: Gọi H(x_H; y_H) → 2 ẩn nên cần 2 phương trình → phương trình (1) là BH ⊥ AC, phương trình (2) là H ∈ AC (điều này dẫn đến ta phải lập phương trình đường AC)

+ **Hướng thứ 2**: Xét H = BH ∩ AC (lập phương trình hai đường thẳng) → tọa độ H.

+ **Hướng thứ 3**: Gọi K = MN ∩ BH (K chính trung điểm BH) viết phương trình hai đường thẳng MN và BH → tọa độ K → tọa độ H.

Các hướng đi là tương tự nhau nhưng trong quá trình phân tích chúng ta sẽ chọn cách ngắn nhất để làm.

► **Hướng dẫn giải :**

* Do M, N lần lượt là trung điểm AB, BC
  ⇒ M(–1; 0) và N(1; –2)

* AC qua A(0;2) nhận $\overrightarrow{AC}=(4;-4)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là :

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{-1}\Leftrightarrow AC: x+y-2=0$$

* Ta có H ∈ AC ⇒ H(h; 2 – h) và $\overrightarrow{BH}=(h+2;4-h)$

* Mặt khác BH ⊥ AC
  $\Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 4(h+2)-4(4-h)=0\Leftrightarrow h=1\Rightarrow \boxed{H(1;1)}$

* Gọi dạng phương trình khai triển của đường tròn là $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với tâm I(a; b) và bán kính $R^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.

* Ta có: $\begin{cases} M(-1;0) \in (C) \\ N(1;-2) \in (C) \\ H(1;1) \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2a + c = 0 \\ 5 - 2a + 4b + c = 0 \\ 2 - 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$

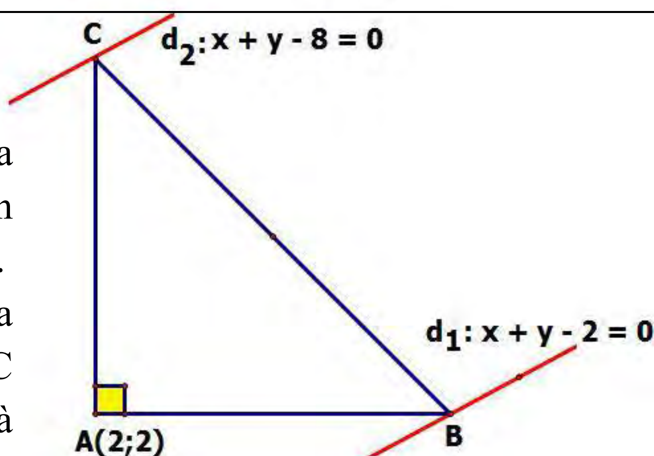
Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$\boxed{(C): x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0}$

CÂU 38 (CHÍNH THỨC – ĐH B2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 2) và các đường thẳng d_1: x + y – 2 = 0 và d_2: x + y – 8 = 0. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Với gợi ý B ∈ d_1 và C ∈ d_2 → chắc chắn ta sẽ tham số hóa điểm B và C → như vậy ta cần 2 ẩn → lập 2 phương trình 2 ẩn.



_ Trong đề bài còn dữ liệu nào ta chưa sử dụng đến → ΔABC vuông cân tại A → AB = AC và AB ⊥ AC.

_ Giải hệ gồm 2 phương trình trên ta tìm được B và C.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có B ∈ d_1: x + y – 2 = 0 ⇒ B(b; 2 – b) và C ∈ d_2: x + y – 8 = 0 ⇒ C(c; 8 – c)

* Do ΔABC vuông cân tại A

$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-2; -b) \\ \overrightarrow{AC} = (c-2; 6-c) \end{cases}$

* Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)^2 + b^2 = (c-2)^2 + (c-6)^2 \\ (b-2)(c-2) + b(c-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b = c^2 - 8c + 18 \\ bc - c - 4b + 2 = 0 \end{cases}$

(*để giải quyết hệ trên ta có thể xử lý bằng cách rút thế, tuy nhiên chúng ta có cách giải đẹp hơn*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 = (c-4)^2 + 3 \\ (b-1)c - 4b + 4 - 4 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 = (c-4)^2 + 3 \\ (b-1)c - 4(b-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \\ (b-1)(c-4) = 2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = b-1 \\ v = c-4 \end{cases}$ thì hệ thành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3 + v^2 \\ u^2v^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3 + v^2 \\ (3+v^2)v^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3 + v^2 \\ \left[\begin{array}{l} v^2 = 1 \quad (n) \\ v^2 = -4 \ (l) \end{array}\right. \end{cases}$$

Do đó uv = 2 > 0 nên hoặc u, v cùng dương hoặc u,v cùng âm nên ta có:

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} hay \begin{cases} u = -2 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases} hay \begin{cases} b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{B(-1;3), C(3;5) \ hay \ B(3;-1), C(5;3)}$$

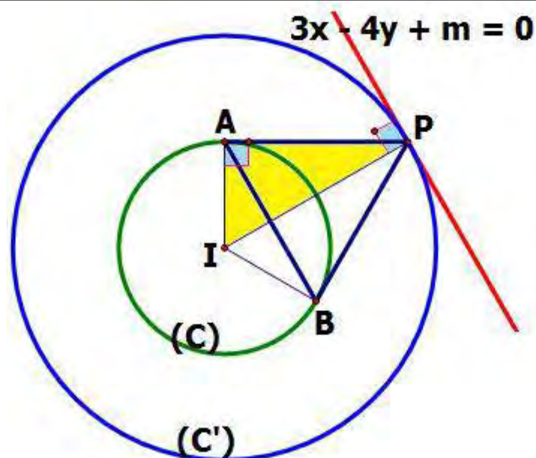
■ **Lời bình**: Qua bài toán trên ta thấy khâu giải hệ phương trình 2 ẩn mới là vấn đề ta quan tâm nhất. Dĩ nhiên việc giải hệ theo phương pháp rút thế cũng có thể thực hiện được nhưng so với việc tìm cách đổi biến số (vận dụng 1 số kỹ thuật trong hệ phương trình đại số) lại giúp ta có những lời giải đẹp hơn.

CÂU 39 (CHÍNH THỨC – ĐH D2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (C):*** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ ***và đường thẳng d: 3x – 4y + m = 0. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Với bài toán này việc xác định quỹ tích của điểm M là cực kì quan trọng → Ở đây tập hợp những điểm P cách đều I một khoảng cho trước sẽ lập nên 1 "đường tròn ẩn mình (C')" với tâm I bán kính IP.

_ Nhờ giả thiết ΔAPB đều nên ta dễ dàng suy ra IP = 2IA = 2R.



Với mọi điểm M thuộc đường tròn (C') ta sẽ kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) và tạo được 2 tiếp điểm A, B để cùng với điểm M lập thành tam giác đều.

_ Do vậy giả sử nếu đường thẳng d cắt đường tròn (C') tại hai điểm M, N phân biệt thì sẽ có đến 2 điểm thỏa yêu cầu bài toán.

_ Do yêu cầu bài toán là có "**duy nhất**" một điểm P nên dẫn đến d chỉ cắt (C') tại 1 điểm → điều này dẫn đến việc đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C') tại P → dùng điều kiện tiếp xúc → giải tìm được m.

_ Để hiểu rõ hơn bài toán này bạn đọc có thể tham khảo (*bài toán 10 – chủ đề 2 – chương 2: vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; –2) và bán kính R = 3.

Do ΔAPB đều ⇒ $BPA = 60^o \Rightarrow IPA = 30^o$

* Ta có ΔIPA ⊥ A có $\sin IPA = \dfrac{IA}{IP} \Rightarrow IP = \dfrac{IA}{\sin 30^o} = 2IA = 2R = 6$

* Vậy tập hợp những điểm P thỏa yêu cầu bài toán chính là đường tròn (C') có tâm là I và bán kính IP.

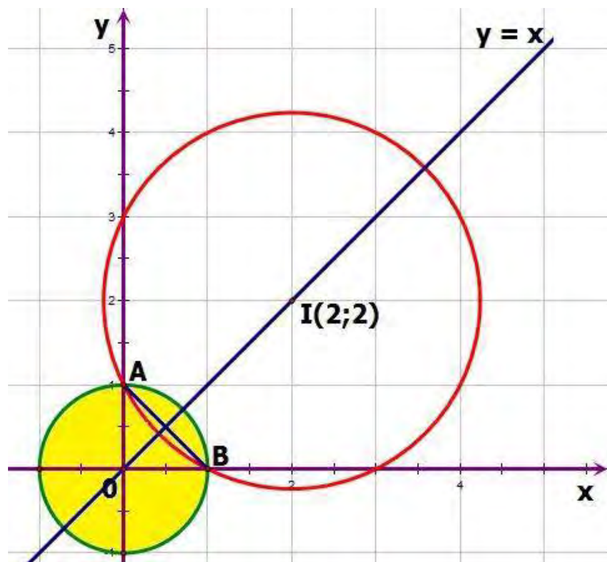
* Theo yêu cầu bài toán ⇔ đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C')

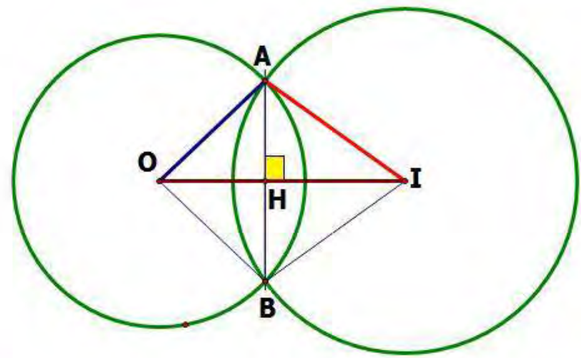
Suy ra $d[I;d] = IP \Leftrightarrow \dfrac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 6 \Leftrightarrow |11+m| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 19 \\ m = -41 \end{array}\right.$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với **m = 19 hay m = –41**

CÂU 40 (DỰ BỊ 1 – ĐH A2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):*** $x^2 + y^2 = 1$***. Một đường tròn (C') có tâm I(2; 2) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho AB =*** $\sqrt{2}$***. Viết phương trình đường thẳng AB.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**





_ Bài toán yêu cầu ta viết phương trình đường AB (thuộc chủ đề 2, chương 2 "viết phương trình đường thẳng") thì ta có thể tiếp cận dựa trên những hướng nào ?

+ **Hướng thứ 1** (tìm tọa độ của hai điểm A và B) → Từ đây chúng ta dễ dàng viết được phương trình đường thẳng AB đi qua 2 điểm (**"nắm đắm kép"**). Ở đây ta có một nhận xét quan trọng đường thẳng nối tâm OI chính là đường phân giác y = x của góc phần tư thứ nhất hệ trục và vì độ dài $AB=\sqrt{2}$ nên A và B chính là giao điểm của (C) với Ox, Oy.

+ **Hướng thứ 2** (tìm tọa độ điểm H = AB ∩ OI) → Với nhận xét AB ⊥ OI nên ta dễ dàng có được véctơ pháp tuyến. Như vậy chỉ cần xác định được tọa độ điểm H trong bài là đã có thể viết phương trình AB → Với độ dài OI, OA, AB → tính được độ dại OH → lập tỉ số OH với OI → để chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ (Tuy nhiên khi làm bài toán này, bạn phải xét đến hai trường hợp O và I nằm cùng phía và khác phía so với AB)

+ **Hướng thứ 3** (gọi dạng hàm số của đường thẳng AB: y = kx + m) → Với nhận xét tương tự như hướng thứ 1 ta sẽ có hệ số góc của đường AB là k = –1 → ta chuyển bài toán trong hình học phẳng sang bài toán tương giao giữa các đường trong hàm số → biện luận định m thỏa mãn $AB=\sqrt{2}$.

+ **Hướng thứ 4** (Gọi H = AB ∩ OI) → Bản chất AB chính là **trục đẳng phương** của 2 đường tròn (C) và (C') nên chúng ta chỉ cần xác định được bán kính R' → việc xác định bán kính R' ta thực hiện tương tự như **hướng thứ 2** và cũng xin lưu ý đến hai trường hợp O và I nằm cùng phía và khác phía so với AB.

► Hướng dẫn giải cách 1:

* Đường tròn (C) có tâm O(0;0) và bán kính R = 1. Đường thẳng OI nối 2 tâm của 2 đường tròn (C) và (C') là đường phân giác d: y = x.
  Do đó AB ⊥ d ⇒ hệ số góc của đường thẳng AB bằng – 1.
* Vì độ dài AB = $\sqrt{2}$ ⇒ A, B phải là giao điểm của (C) với Ox, Oy.
  Suy ra $\left[\begin{array}{l} A_1(0;1), B_1(1;0) \\ A_2(-1;0), B_2(0;-1) \end{array}\right.$
* **TH1**: A_1B_1 chính là phương trình chắn hai trục tọa độ nên có dạng:

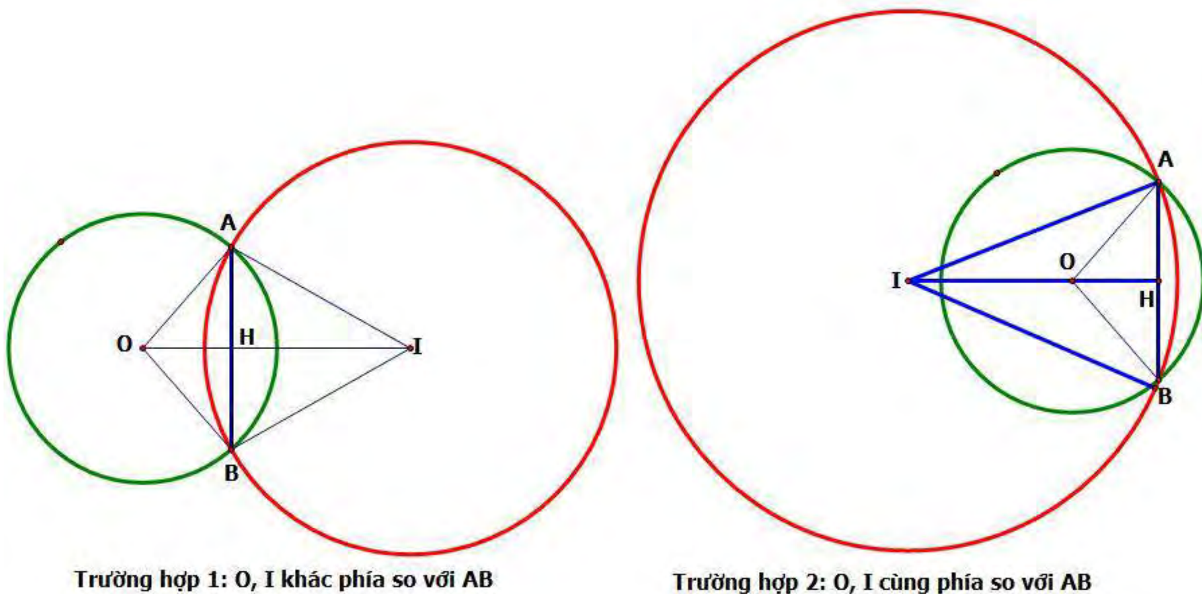
$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1 \Leftrightarrow \boxed{A_1B_1: x+y-1=0}$$

* **TH2**: A_2B_2 chính là phương trình chắn hai trục tọa độ nên có dạng:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-1}=1 \Leftrightarrow \boxed{A_2B_2: x+y+1=0}$$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+y+1=0 \end{array}\right.}$

► Hướng dẫn giải cách 2:



Trường hợp 1: O, I khác phía so với AB

Trường hợp 2: O, I cùng phía so với AB

* Đường tròn (C) có tâm O(0;0) và bán kính R = 1 và gọi H = AB ∩ OI
* **TH1**: O và I nằm khác phía với đường AB.
  Khi đó ta có:

$$OH^2 = OA^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{2} \text{ và } OI^2 = 8 \text{ do đó } \frac{OH}{OI} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OI}$$

Suy ra $\begin{cases} x_H = \dfrac{1}{2} \\ y_H = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó đường thẳng AB qua $H\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ nhận $\overrightarrow{OI} = (2;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là :

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$$

* **TH2**: O và I nằm cùng phía với đường AB.

Khi đó ta có:

$$OH^2 = OA^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{2} \text{ và } OI^2 = 8 \text{ do đó } \frac{OH}{OI} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OI}$$

Suy ra $\begin{cases} x_H = \dfrac{-1}{2} \\ y_H = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$.

Khi đó đường thẳng AB qua $H\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$ nhận $\overrightarrow{OI} = (2;2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là : $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+2\left(y+\dfrac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+y+1=0$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+y+1=0 \end{array}\right.$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Đường tròn (C) có tâm O(0;0) và bán kính R = 1. Đường thẳng OI nối 2 tâm của 2 đường tròn (C) và (C') là đường phân giác d: y = x.

Do đó AB ⊥ d ⇒ hệ số góc của đường thẳng AB bằng – 1.

Suy ra phương trình AB có dạng là (AB): $y = -x + m$

* Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa AB và đường tròn (C) ta có:

$x^2 + (-x+m)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (*) có $\Delta' = 2 - m^2$

Để AB cắt (C) tại hai điểm phân biệt ⇒ phương trình (C) có 2 nghiệm phân biệt

Suy ra $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

* Khi đó gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*) nên ta đặt

$A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2;-x_2+m)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_1 - x_2)$.

Theo đề bài ta có

$$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 2 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 2 \Leftrightarrow x_1^{\ 2} - 2x_1x_2 + x_2^{\ 2} = 1$$

Suy ra $S^2 - 4P = 1$ với $\begin{cases} S = \dfrac{-b}{a} = m \\ P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m^2 - 1}{2} \end{cases}$ do đó ta có:

$$m^2 - 2(m^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}\right.}$

► **Hướng dẫn giải cách 4:**

* Đường tròn (C) có tâm O(0;0) và bán kính R = 1 và gọi H = AB $\cap$ OI

* **TH1**: O và I nằm khác phía với đường AB.

Khi đó ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $OI = 2\sqrt{2}$ do đó $HI = OI - OH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $AI = \sqrt{IH^2 + \dfrac{AB^2}{4}} = \sqrt{5} \Rightarrow$ (C’): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$

Nhận xét A, B chính là giao điểm chung của 2 đường tròn (C) và (C’)

$\Rightarrow$ AB chính là trục đẳng phương của (C) và (C’) nên AB:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 - 5 = x^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$$

* **TH2**: O và I nằm cùng phía với đường AB.

Khi đó ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $OI = 2\sqrt{2}$ do đó $HI = OI + OH = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $AI = \sqrt{IH^2 + \dfrac{AB^2}{4}} = \sqrt{13} \Rightarrow$ (C’): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$

Nhận xét A, B chính là giao điểm chung của 2 đường tròn (C) và (C’)

$\Rightarrow$ AB chính là trục đẳng phương của (C) và (C’) nên AB:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 - 13 = x^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}\right.}$

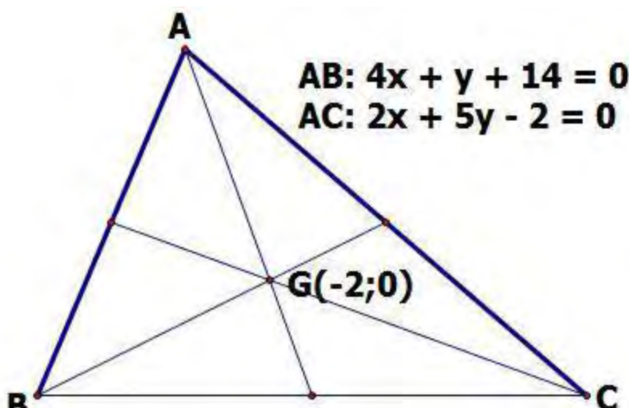
■ **Lời bình**: Có thể thấy cả 4 cách làm trên đều rất cần điểm tựa chính là **« hình vẽ ».** Tuy nhiên với cách 2 và 4 thì rất có thể bạn đọc sẽ làm thiếu trường hợp còn lại do sự **« ngộ nhận hình học »** , áp đặt trong suy nghĩ **« tư duy hình thức »** (« ***Con người chịu ảnh hưởng sâu sắc bởi tư duy hình thức*** ») chỉ có 1 trường hợp. Việc giải bằng nhiều cách giúp chúng ta soi sáng lại những cách cũ và đồng thời tìm một hướng đi mới cho bài toán bằng những công cụ rất đỗi bình thường.

CÂU 41 (DỰ BỊ 2 – ĐH A2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G(–2; 0), biết phương trình chứa cạnh AB, AC theo thứ tự*** $4x+y+14=0,\ 2x+5y-2=0$***. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Dễ dàng xác định tọa độ điểm A do A = AC ∩ AB. Đến đây ta có thể tìm B, C theo hai hướng:

+ **Hướng thứ 1**: Gọi tọa độ $B(x_B;\ y_B)$ và $C(x_C;\ y_C)$ → 4 ẩn nên cần 4 phương trình lập → B ∈ AB (1), C ∈ AC (2) và G là trọng tâm ΔABC ((3) và (4)) → giải hệ tìm được B và C.



+ **Hướng thứ 2**: Tham số hóa điểm B ∈ AB và C ∈ AC → 2 ẩn nên cần 2 phương trình → G là trọng tâm ΔABC → giải hệ tìm được B và C. *Ở đây tác giả xin được trình bày theo hướng thứ 2.*

► **Hướng dẫn giải:**

* A = AC ∩ AB

⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x+y+14=0\\2x+5y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-4;2)}$

* B ∈ AB: 4x + y + 14 = 0 ⇒ $B(b;-4b-14)$ và C ∈ AC : 2x + 5y – 2 = 0 ⇒ $C(1-5c;2c)$

* Do G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4+b+1-5c=-6\\2+(-4b-14)+2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-5c=-3\\-4b+2c=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3\\c=0\end{cases}$$

* Do đó tọa độ điểm $\boxed{B(-3;-2),\ C(1;0)}$

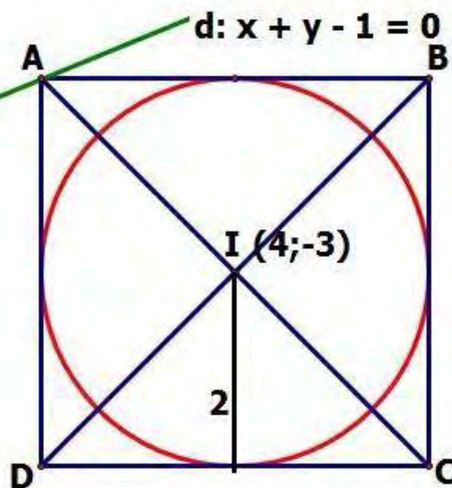
Vậy tọa độ của các điểm cần tìm là $\boxed{A(-4;2),\ B(-3;-2),\ C(1;0)}$

■ **Lời bình**: Bài toán đã quá quen thuộc với chúng ta trong quá trình tìm hiểu về cách tìm tọa độ điểm với các yếu tố liên quan trong tam giác. Nếu bạn để ý một chút thì thì việc đặt ẩn cho "khéo" cũng góp phần giúp ta giải nhanh bài toán. Cụ thể trong bài toán này chính là việc đặt tọa độ điểm C. (Bạn đọc có thể tham khảo lại chủ đề 1, chương 2 để hiểu rõ hơn).

CÂU 42 (DỰ BỊ 3 – ĐH B2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (C):*** $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ ***và đường thẳng d: x + y – 1 = 0. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp (C), biết A $\in$ d.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Đường tròn (C) cho phép ta khai thác triệt để 2 yếu tố chính là tâm I(4; –3) và bán kính R = 2 → tính cạnh AB. Đường thẳng d giúp cho việc tham số hóa tọa độ điểm A. (Đây hầu hết là những "thủ tục cơ bản" chúng ta phải thực hiện khi bước đầu giải bài toán này.



_ Để tìm tọa độ điểm A → Ta có thể dùng độ dài IA = R để giải tìm tọa độ A.

_ Sau khi tìm được tọa độ điểm A → dễ dàng suy ra tọa độ điểm C. Để tìm tọa độ điểm B và D ta có thể:

+ **Hướng thứ 1**: viết phương trình BD (BD vuông AC và BD qua I) và đường tròn (C') có tâm I bán kính IA → B và D là giao điểm giữa (C) và BD.

+ **Hướng thứ 2**: Sử dụng phép biến hình cụ thể là "Phép Quay" để giải tìm nhanh tọa độ B và D.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(4; –3) và bán kính R = 2 ⇒ $IA=2\sqrt{2}$.

Do hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) nên tâm I cũng chính là tâm của hình vuông ABCD ⇒ I là trung điểm của AC và BD.

* Lại có A ∈ d: x + y – 1 = 0 ⇒ $A(a;1-a)$ và $\overrightarrow{IA}=(a-4;4-a)$.

Do đó: $IA^2=8 \Leftrightarrow 2(a-4)^2=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \Rightarrow A(6;-5) \\ a=2 \Rightarrow A(2;-1) \end{array}\right.$

* **TH1:** với A(6; –5) $\Rightarrow$ C(2;–1). Phương trình đường thẳng BD qua I(4;–3) và nhận $\overrightarrow{AC} = (-4;4)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$-1(x-4)+1(y+3)=0 \Leftrightarrow x-y-7=0.$$

Khi đó B và D là giao điểm giữa đường thẳng BD và đường tròn (C') có tâm là I(4;–3) và bán kính $IA = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ tọa độ B và D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-7=0 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(2;-5), C(6;-1) \\ B(6;-1), C(2;-5) \end{array}\right.$$

* **TH1:** với A(2; –1) $\Rightarrow$ C(6; –5).

Phương trình đường thẳng BD qua I(4;–3) và nhận $\overrightarrow{AC} = (4;-4)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $1(x-4)-1(y+3)=0 \Leftrightarrow x-y-7=0$.

Khi đó B và D là giao điểm giữa đường thẳng BD và đường tròn (C') có tâm là I(4;–3) và bán kính $IA = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ tọa độ B và D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-7=0 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(2;-5), D(6;-1) \\ B(6;-1), D(2;-5) \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} A(2;-1), B(2;-5), C(6;-5), D(6;-1) \\ A(6;-5), B(6;-1), C(2;-1), D(2;-5) \end{array}\right.}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Đường tròn (C) có tâm I(4; –3) và bán kính R = 2 $\Rightarrow IA = 2\sqrt{2}$.

Do hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) nên tâm I cũng chính là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow$ I là trung điểm của AC và BD.

* Lại có A $\in$ d: x + y – 1 = 0 $\Rightarrow A(a;1-a)$ và $\overrightarrow{IA} = (a-4;4-a)$.

Do đó: $IA^2 = 8 \Leftrightarrow 2(a-4)^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \Rightarrow A(6;-5) \\ a=2 \Rightarrow A(2;-1) \end{array}\right.$

* **TH1:** với A(6; –5) $\Rightarrow$ C(2;–1) Ta có phép quay $Q_{(I;-90^o)}: A \to B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = (x_A - x_I).\cos(-90^o) - (y_A - y_I).\sin(-90^o) + x_I \\ y_B = (x_A - x_I).\sin(-90^o) + (y_A - y_I).\cos(-90^o) + y_I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = -5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(2;-5)}$$

Do I là trung điểm BD $\Rightarrow$ D(6; –1). Do vai trò B và C là như nhau nên ta có B(2;–5) và D(6;–1)

* **TH2:** với A(2; –1) ⇒ C(6;–5) .Ta có phép quay $Q_{(I;-90^o)}: A \to B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = (x_A - x_I).\cos(-90^o) - (y_A - y_I).\sin(-90^o) + x_I \\ y_B = (x_A - x_I).\sin(-90^o) + (y_A - y_I).\cos(-90^o) + y_I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 6 \\ y_B = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(6;-1)}$$

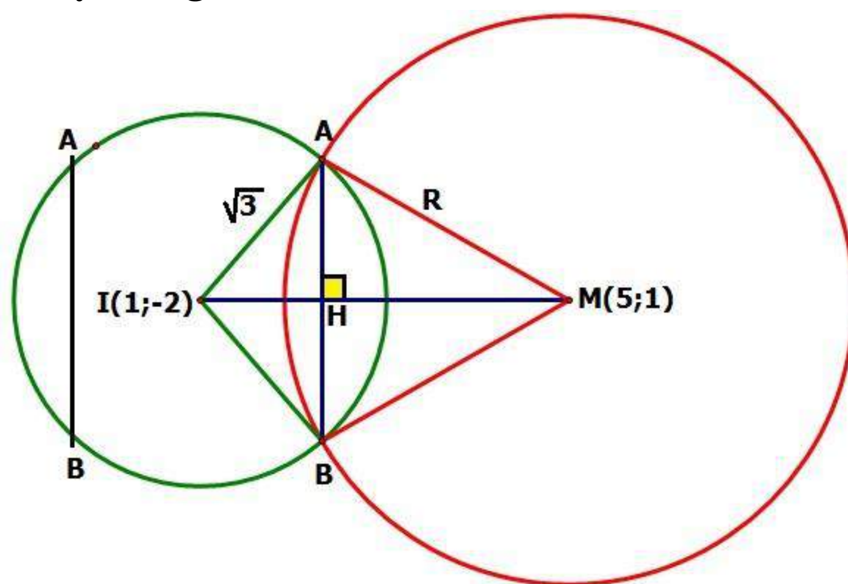
* Do I là trung điểm BD ⇒ D(2; –5). Do vai trò B và C là như nhau nên ta có B(6;–1) và D(2;–5)

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $\boxed{\left[\begin{array}{l} A(2;-1), B(2;-5), C(6;-5), D(6;-1) \\ A(6;-5), B(6;-1), C(2;-1), D(2;-5) \end{array}\right.}$

■ **Lời bình**: Có thể thấy việc giải bài toán theo cách 1, phát sinh ra rất nhiều trường hợp và trong quá trình giải cũng "khá nặng" về tính toán, việc ứng dụng phép biến hình cụ thể là phép quay trong bài toán này góp phần giúp cho lời giải gọn nhẹ hơn rất nhiều tránh những bước phải lập phương trình đường thẳng, đường tròn phát sinh.

CÂU 43 (DỰ BỊ 4 – ĐH B2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (C):*** $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. ***Viết phương trình đường tròn (C') có tâm M(5; 1) biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho AB =*** $\sqrt{3}$.

☺**Nhận xét và ý tưởng** :



_ Tương tự như câu 40 (*Đề Dự bị 1 – ĐH khối A năm 2007*) thay vì phải lập phương trình trục đẳng phương giữa hai đường tròn thì ở bài toán này chúng ta chỉ cần xác định bán kính R của đường tròn cần tìm là xong. Ở

đây tác giả xin trình bày lời giải dựa trên việc chia trường hợp M và I cùng phía hay khác phía so với đường thẳng AB.

► **Hướng dẫn giải :**

* Phương trình đường tròn (C) có tâm I(1; –2) và bán kính $r=\sqrt{3}$ và độ dìa IM = 5

* **TH1**: I và M nằm khác phía với đường AB.

Khi đó ta có: $IH=\sqrt{IA^2-\frac{AB^2}{4}}=\frac{3}{2}$ do đó $HM=IM-IH=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

Suy ra $R=\sqrt{MH^2+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{13}\Rightarrow$ (C’): $\boxed{(x-5)^2+(y-1)^2=13}$

* **TH2**: O và I nằm cùng phía với đường AB.

Khi đó ta có: $IH=\sqrt{IA^2-\frac{AB^2}{4}}=\frac{3}{2}$ do đó $HM=IM+IH=5-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$

Suy ra $R=\sqrt{MH^2+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{43}\Rightarrow$ (C’): $\boxed{(x-5)^2+(y-1)^2=43}$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

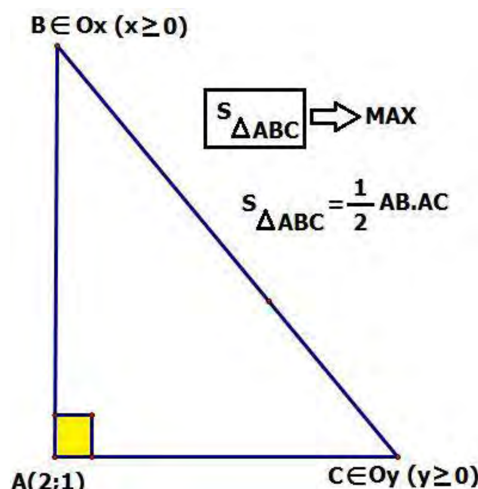
$$\boxed{\left[\begin{array}{l}(C'):(x-5)^2+(y-1)^2=13\\(C'):(x-5)^2+(y-1)^2=43\end{array}\right.}$$

CÂU 44 (DỰ BỊ 5 – ĐH D2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 1), lấy điểm B thuộc trục Oy có hoành độ x ≥ 0 và điểm C thuộc trục Oy có tung độ y ≥ 0 sao cho ΔABC vuông tại A. Tìm tọa độ B, C sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.***

■ **Đặt vấn đề :** Một lần nữa trong suốt chặng đường ra đề của Bộ GD&ĐT, chủ đề “Max–Min cực trị hình học lại xuất hiện”. Trong bài toán có liên quan đến chủ đề trên thì ta nên tiếp cận theo những hướng nào. Mời bạn đọc cùng theo dõi.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Ta xuất phát từ yêu cầu : $S_{\Delta ABC}$ đạt giá trị lớn nhất → câu hỏi đặt ra: chúng ta có tìm được biểu thức chứa biến biểu diễn diện tích ΔABC ?



→ câu trả lời là: Diện tích tính thông qua độ dài của AB và AC mà AB và AC thì phụ thuộc theo hai biến là x_B và y_C cùng với giả thiết AB ⊥ AC.

_ Tổng hợp dữ kiện lại ta lựa chọn "phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất" cụ thể như sau:

+ Tham số hóa điểm B ∈ Ox, C ∈ Oy → xuất hiện biến b và c

+ Do AB ⊥ AC ⇒ tạo được phương trình liên hệ biến b và c → tính độ dài AB và AC theo 1 biến (hoặc b hoặc c).

+ Diện tích tam giác cũng biểu thị theo biến đó (hoặc b hoặc c) → Dùng "phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của diện tích".

_ Chú ý: Bạn vẫn có thể giải bài toán theo hướng

$F = X^2 + A \ge A, \forall A \in R \Leftrightarrow \boxed{F_{\min} = A \Leftrightarrow X = 0}$.

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có B ∈ Ox, C ∈ Oy ⇒ $B(b;0),\ C(0;c)$ và $b \ge 0, c \ge 0$

* Do ΔABC vuông tại A

$$\Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0\ (*) \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-2;-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2;c-1) \end{cases}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow -2(b-2) - (c-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = -2b + 5},\ do\ c \ge 0 \Leftrightarrow \boxed{0 \le b \le \frac{5}{2}}$$

* Mặt khác,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2 + 1}\sqrt{4 + (c-1)^2} = (b-2)^2 + 1 \ge 1$$

Vậy yêu cầu bài toán ⇔ $S_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$ (thỏa $0 \le b \le \frac{5}{2}$) ⇒ c = 1

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(2;0),\ C(0;1)}$

■ **Lời bình**: Mặc dù khi phân tích bài toán ta "ngầm hiểu" dùng "phương pháp hàm số" nhưng đến "phút chót" lại chuyển sang dùng dạng đặc biệt của chú ý cũng bởi chúng ta chưa chủ động được biểu thức hàm mà mình tạo được sẽ như thế nào ? Do khi thu gọn xong về 1 biến b thì biểu thức chứa biến cần đạt max – min quá "Đẹp" nên ta có thể kết luận ngay. Trong một số tình huống khác, có khi chúng ta phải biến đổi phức tạp để đưa được về dạng $F = X^2 + A \geq A, \forall A \in R \Leftrightarrow \boxed{F_{\min} = A \Leftrightarrow X = 0}$ hoặc có khi là không thể. Cũng lưu ý tập xác định của bài toán này trong quá trình giải.

CÂU 45 (DỰ BỊ 6 – ĐH D2007). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A(0; 1), B(2; –1) và các đường thẳng***

$d_1 : (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$, $d_2 : (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$

Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

■ **Đặt vấn đề :** Như đã đề cập ở phần phương pháp tiếp cận thì với những bài toán liên quan đến max – min cực trị hình học thì một trong những vấn đề cần quan tâm đó chính là "vị trí tương đối" giữa các đối tượng hình học. Với câu 45 này thì "vị trí tương đối" có thể xem là chìa khóa giải quyết vấn đề không ? Mời các bạn cùng theo dõi.

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Đọc đề bài ta thấy có 2 yêu cầu nổi lên là "**chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau**" và xác định P = $d_1 \cap d_2$ sao cho PA + PB lớn nhất.

_ Với yêu cầu **chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau** thì ta xử lý như thế nào ? → Ở đây chúng ta có thể hiểu là hệ phương trình gồm phương trình của d_1 và d_2 luôn có nghiệm → nghĩa là định thức Crammer của phương trình khác 0. (để hiểu rõ hơn bạn đọc có thể xem lại phần lý thuyết về *vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng ở chương 1*). Ngoài ra, còn một yếu tố quan trọng nữa là **d_1 và d_2 vuông góc nhau** (Đây thật sự là một chi tiết quan trọng giúp ta "giải nhanh" bài toán).

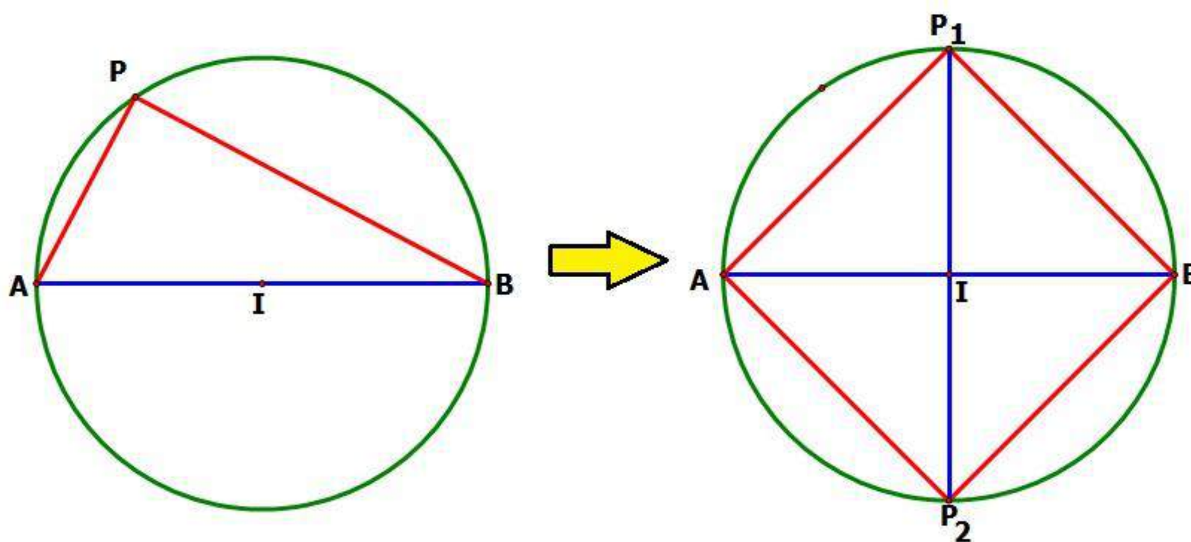
_ Đối với yêu cầu tìm P để thỏa mãn PA + PB lớn nhất thì ta có thể phân tích theo 3 hướng sau:

+ **Hướng thứ 1** (*sử dụng bất đẳng thức trong Đại Số*): Do phát hiện $d_1 \perp d_2$ nên ta dễ dàng ⇒ P thuộc đường tròn đường kính AB. Ở đây do để tìm giá trị lớn nhất nên ta sẽ sử dụng **BĐT Bunyakovski** cụ thể là: $(1.PA + 1.PB)^2 \leq (1^2 + 1^2)(PA^2 + PB^2) = 2AB^2$. Cho nên ta suy ra đẳng

thức trên xảy ra khi PA = PB nghĩa là tam giác PAB vuông cân tại P → P chính là giao điểm giữa đường trung trực cạnh AB và đường tròn đường kính AB. (*Bạn đọc có thể xem hình minh họa ở hướng dẫn giải cách 1 để hiểu rõ hơn).*

+ **Hướng thứ 2** (*sử dụng bất đẳng thức hình học)*: Nhận xét $d_1 \perp d_2$ và $A \in d_1$, $B \in d_2$ nên P thuộc đường tròn đường kính AB. Với 2 điểm A, B cố định, góc APB không đổi. Trên tia đối tia PB, ta chọn điểm C sao cho PA = PC khi ấy PA + PB = PC + PB = BC → Như vậy PA + PB lớn nhất khi và chỉ khi BC lớn nhất mà góc PBC và P→ điều này dẫn đến BC là đường kính của đường tròn đi qua 3 điểm PBC → P là điểm chính giữa của cung AB → PA = PB và vì vậy P ∈ đường trung trực của cạnh AB. (*Bạn đọc có thể xem hình minh họa ở hướng dẫn giải cách 2 để hiểu rõ hơn).*

► **Hướng dẫn giải cách 1:**



* Tọa độ giao điểm P giữa đường (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+(m-2)y+2-m=0 \\ (2-m)x+(m-1)y+3m-5=0 \end{cases}$

Xét định thức $D=\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix}=(m-1)^2+(m-2)^2$

$$=2m^2-6m+5=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0,\forall m\in R$$

Suy ra đường thẳng d_1 và d_2 luôn cắt nhau.

* Nhận xét $A(0;1) \in d_1$, $B(2;-1) \in d_2$ và $d_1 \perp d_2 \Rightarrow \Delta APB$ vuông tại P ⇒ P nằm trên đường tròn đường kính AB.

* Áp dụng bất đẳng Bunyakovski ta có:

$$(1.PA+1.PB)^2 \le (1^2+1^2)(PA^2+PB^2) = 2AB^2 = 16$$

Suy ra $PA+PB \le 4$. Dấu "=" xảy ra ⇔ PA = PB ⇔ P thuộc đường trung cạnh AB

* Gọi I là trung điểm AB ⇒ I(1;0) và $IA = R = \sqrt{2}$ nên phương trình đường tròn đường kính AB là:

$$\boxed{(C): (x-1)^2 + y^2 = 2}$$

* Đường trung trực của cạnh AB qua I(1; 0) nhận $\overrightarrow{AB} = (2;-2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

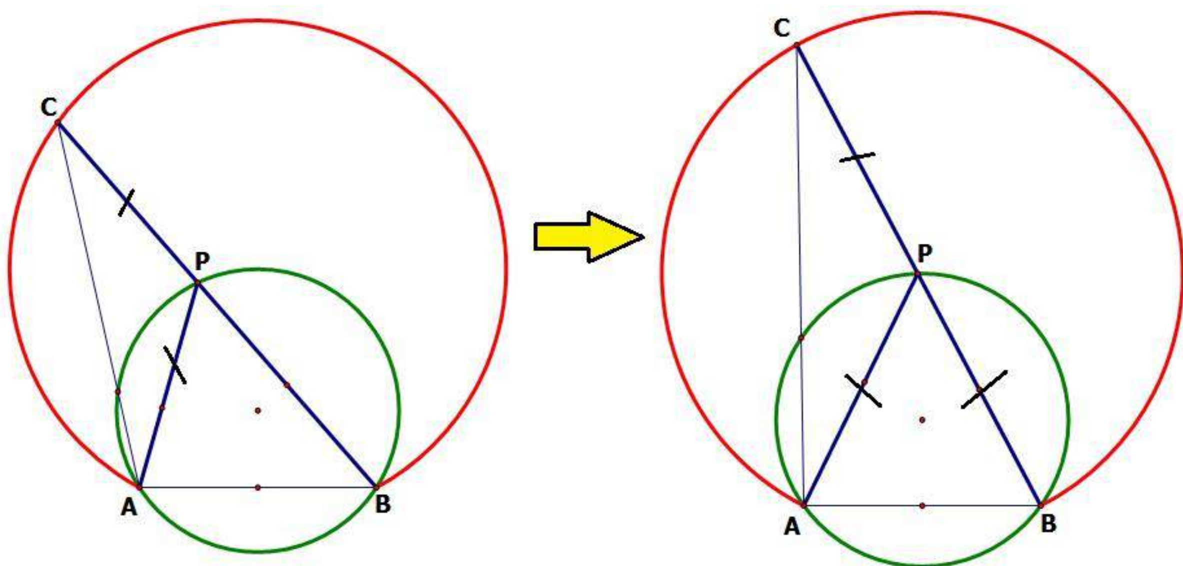
$$2(x-1) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{d: x - y - 1 = 0}$$

* Ta có tọa độ điểm P thỏa yêu cầu bài toán là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = -1 \end{array} \right.$$

Vậy điểm P thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{P(2;1) \text{ hay } P(0;1)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Việc chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau ta làm tương tự như cách 1. Tuy nhiên dựa vào định thức Cramer ta cũng có thể tính nhanh giá trị của x và y như sau:

$$\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0 \\ (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0 \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} D_x = \begin{vmatrix} m-2 & 2-m \\ m-1 & 3m-5 \end{vmatrix} = 4m^2 - 14m + 12 \\ D_y = \begin{vmatrix} 2-m & m-1 \\ 3m-5 & 2-m \end{vmatrix} = -2m^2 + 4m - 1 \\ D = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 6m + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{4m^2 - 14m + 12}{2m^2 - 6m + 5} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-2m^2 + 4m - 1}{2m^2 - 6m + 5} \end{cases}$

* Nhận xét $d_1 \perp d_2$, $A \in d_1$, $B \in d_2$ và $P = d_1 \cap d_2 \Rightarrow$ P thuộc đường tròn đường kính AB.

* Gọi C là điểm thuộc tia đối của tia PB sao cho CP = CA. Khi đó PA + PB = PC + PB = BC

* Do góc APB không đổi và góc ACB cũng không đổi $\Rightarrow$ C đang chuyển động trên một cung tròn cố định. Để PA + PB đạt giá trị lớn nhất thì BC chính là đường kính của cung tròn trên.

* Khi đó P chính là điểm chính giữa của cung AB $\Rightarrow$ P thuộc đường trung trực của cạnh AB

* Đường trung trực của cạnh AB qua I(1; 0) nhận $\overrightarrow{AB} = (2;-2)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là: $2(x-1) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{d : x - y - 1 = 0}$

* $P \in d$

$$\Rightarrow \frac{4m^2 - 14m + 12}{2m^2 - 6m + 5} - \frac{-2m^2 + 4m - 1}{2m^2 - 6m + 5} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

Vậy điểm P thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{P(2;1) \text{ hay } P(0;1)}$

CÂU 46 (CHÍNH THỨC – ĐH A2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng*** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ***và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để lập phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ta cần xác định 2 ẩn a, b nghĩa là cần lập 2 phương trình.

_ Dựa vào các thuộc tính của elip ta có: tâm sai elip bằng $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi HCN cơ sở là $2(2a+2b)=20$

_ Hiện ta đã có 3 phương trình 3 ẩn a, b, c → cần 1 phương trình liên hệ nữa → $c^2=a^2-b^2$

_ Giải hệ trên ta tìm được phương trình chính tắc của Elip.

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và $c^2=a^2-b^2$. $(a>b>0)$

* Ta có tâm sai elip

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow 9c^2=5a^2\Leftrightarrow 9(a^2-b^2)=5a^2\Leftrightarrow \boxed{4a^2=9b^2}\ (1)$$

* Chu vi hình chữ nhật cơ sở của elip là

$$2(2a+2b)=20\Leftrightarrow a+b=5\Leftrightarrow \boxed{a=5-b}\ (2)$$

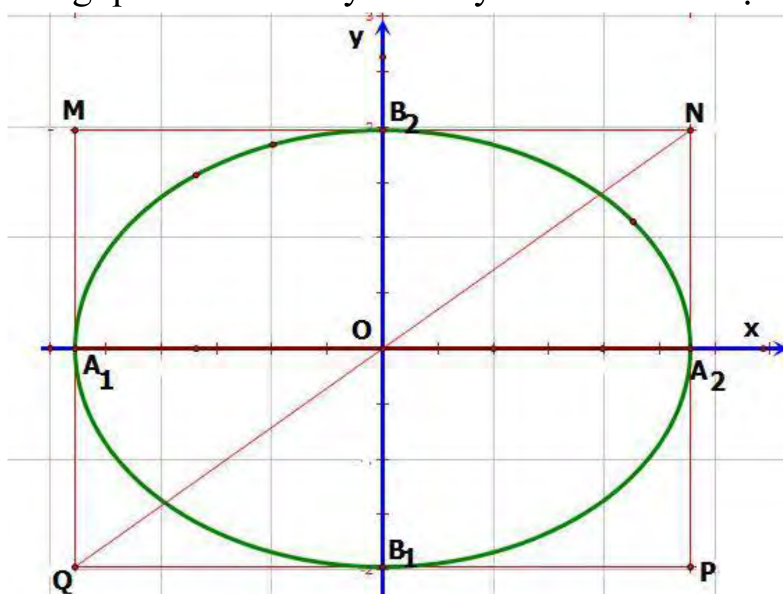
* Thay (2) vào (1), ta được:

$$4(5-b)^2=9b^2\Leftrightarrow 5b^2+40b-100=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \quad (n)\\ b=-10\,(l)\end{array}\right.\Rightarrow a=3$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}$$

■ **Lời bình**: Cũng qua bài toán này ta lưu ý về hình chữ nhật cơ sở:



Một là, chu vi hình chữ nhật cơ sở MNPQ là 2(MN + NP) = 2(2a + 2b)

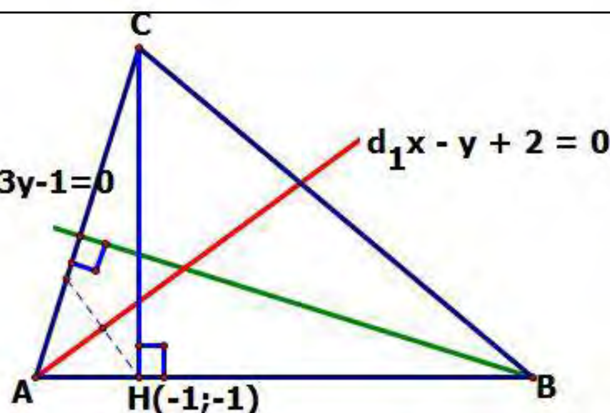
Hai là, diện tích hình chữ nhật cơ sở MNPQ là MN.NP = 2a.2b

Ba là, đường chéo hình chữ nhật cơ sở MNPQ là

$$MP = NQ = \sqrt{QP^2 + PN^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}$$

CÂU 47 (CHÍNH THỨC – ĐH B2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(–1; –1), đường phân giác trong của góc A có phương trình x – y + 2 = 0 và đường cao kẻ từ B có phương trình 4x + 3y – 1 = 0.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để tìm tọa độ C (theo cách nghĩ thông thường) ta sẽ thử tham số hóa điểm theo một đường thẳng đi qua C. Nhưng hiện tại thì chưa có. Do đó ta tìm C dựa trên sự tương giao giữa các đường thẳng → điều này có nghĩa là ta sẽ lập phương trình các đường thẳng đi qua C.

_ Ở đây ta xét thấy C = CH ∩ CA hay C = CH ∩ CB hay C = CA ∩ CB → trong các cặp phương trình trên thì CA và CH là "khả dĩ" nhất. Vì CA ⊥ d_2 (CA chỉ cần qua thêm 1 điểm nữa), CH thì qua H chỉ cần qua thêm 1 điểm nữa → từ nhu cầu lập phương trình đường thẳng → ta chuyển sang nhu cầu tìm thêm điểm mới.

_ Vậy trong các dữ kiện mà đề bài cho → dữ kiện nào giúp ta " **tìm thêm điểm mới**" → ở đây chính là điểm đường d_1 (phân giác trong góc A) do tính đối xứng của phân giác nên nếu ta gọi K là hình chiếu của H lên d_1 và I là điểm đối xứng của H qua phân giác thì ta sẽ có K là trung điểm HI và đặc biệt I thuộc AB.

_ "Điểm mới I" này giúp gì cho ta trong quá trình tìm điểm C ? → viết được phươn trình AC (AC qua I và AC ⊥ d_2).

_ Và "phương trình "**đường thẳng mới**" AC giúp gì cho ta ? → AC ∩ d_1 = A → tìm được tọa độ A.

_ Đến đây giống như hiện tượng "Domino", các giả thiết tưởng như "rời rạc" không liên quan nhưng lại xô đổ "lẫn nhau" hoặc cũng có thể hiểu những mảnh ghép cứ ngày một hé mở, bức tranh bí mật dần được giải

đáp → Đường thẳng HC qua H và vuông góc với HA → viết phương trình HC.

► **Hướng dẫn giải :**

* kí hiệu $d_1: x - y + 2 = 0$, $d_2: 4x + 3y - 1 = 0$. Gọi K là hình chiếu của H lên d_1 và I là điểm đối xứng của H qua d_1 ($I \in AC$).
* Ta có $KH \perp d_1$: $x - y + 2 = 0 \Rightarrow$ KH: $x + y + m = 0$. KH qua H(–1; –1) $\Rightarrow m = 2$.
  Vậy $KH: x + y + 2 = 0$
* Ta có $K = KH \cap d_1 \Rightarrow$ tọa độ K là nghiệm của hệ
  $$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-2;0)}$$
  Mặt khác K là trung điểm HI $\Rightarrow \boxed{I(-3;1)}$
* Đường thẳng $AC \perp d_2$: $4x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow$ AC: $3x - 4y + n = 0$, AC qua I(–3;1) $\Rightarrow n = 13$
  Vậy $AC: 3x - 4y + 13 = 0$
* Lại có $A = AC \cap d_1 \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ
  $$\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(5;7)}$$
* HC đi qua $H(-1;-1)$ nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = (3;4)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:
  $$3(x+1) + 4(y+1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{HC: 3x + 4y + 7 = 0}$$
* $C = HC \cap AC \Rightarrow \Rightarrow$ tọa độ C là nghiệm của hệ
  $$\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ 3x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-10}{3} \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{-10}{3}; \frac{3}{4}\right)}$$

Vậy tọa độ điểm C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C\left(\frac{-10}{3}; \frac{3}{4}\right)}$

CÂU 48 (CHÍNH THỨC – ĐH D2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P):*** $y^2 = 16x$ ***và điểm A(1; 4). Hai điểm phân biệt B, C (B***

và C khác A) di động trên (P) sao cho góc BAC bằng 90º. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Thực chất bài toán này thuộc về kiểu bài toán "quỹ tích", đây là một dạng toán khó. Nếu chưa có hình học tọa độ Decartes thì hình học phẳng gặp rất nhiều khó khăn khi tìm quỹ tích của một điểm, một đường thẳng thẳng, v.v…

_ Cách làm thường thấy nhất ở đây chính là tham số hóa các biến cần tìm và tìm cách khử đi ẩn "phụ thuộc" của tham số. Cụ thể trong bài này "yếu tố vuông góc" và B và C di động trên (P) sẽ giúp ta tìm được điểm cố định trên.

► **Hướng dẫn giải :**

* Do B và C thuộc (P), B khác C (B và C khác A) nên $B\left(\frac{b^2}{16};b\right)$, $C\left(\frac{c^2}{16};c\right)$

với b, c ∈ R, $b \neq 4, c \neq 4$.

* Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{b^2}{16} - 1; b - 4\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{c^2}{16} - 1; c - 4\right)$

Do góc $BAC = 90^o$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{16} - 1\right)\left(\frac{c^2}{16} - 1\right) + (b-4)(c-4) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{272 + 4(b+c) + bc = 0}$ (1)

* Mặt khác, phương trình đường thẳng BC có dạng:

$$\frac{x - \frac{c^2}{16}}{\frac{b^2}{16} - \frac{c^2}{16}} = \frac{y - c}{b - c} \Leftrightarrow \boxed{16x - (b+c)y + bc = 0} \ (2)$$

* Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng BC luôn đi qua điểm $\boxed{I(17;-4)}$

Vậy đường thẳng BC luôn đi qua điểm $\boxed{I(17;-4)}$

CÂU 49 (CHÍNH THỨC – CĐ 2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d: x – 2y + 3 = 0.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Bài toán này không quá khó khi đã gợi ý A ∈ Ox, B ∈ Oy. Như vậy ta cần thiết lập 2 phương trình 2 ẩn để giải tìm tọa độ A và B → ở đây do A và B đối xứng qua d nên trung điểm của A và B thuộc đường thẳng d và véctơ chỉ phương của d vuông góc với véctơ AB.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có $A \in Ox \Rightarrow A(a;0)$, $B \in Oy \Rightarrow B(0;b)$ và $\overrightarrow{AB} = (-a;b)$

Véctơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (2;1)$ và tọa độ trung điểm của AB là $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$

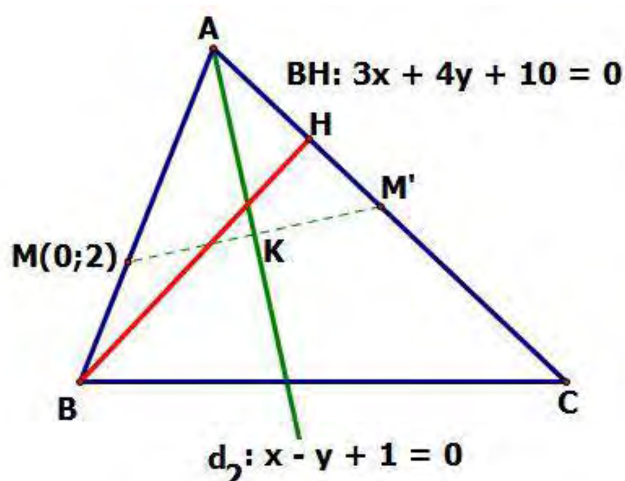
* Do A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d nên ta có:

$$\begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ a - 2b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $\boxed{A(2;0),\ B(0;4)}$

CÂU 50 (DỰ BỊ 1 – ĐH A2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC các đường cao kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là*** $3x + 4y + 10 = 0$ ***và*** $x - y + 1 = 0$, ***điểm M(0; 2) thuộc đường thẳng AB đồng thời cách điểm C một khoảng bằng*** $\sqrt{2}$. ***Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Sử dụng tính chất của phân giác ta tìm được thêm điểm mới M' (*phần vận dụng này mời bạn đọc xem lại chương 2, chủ đề tìm tọa độ điểm và viết phương trình đường thẳng*)

_ Khi đã có điểm M' ∈ AC → viết phương trình AC ⊥ BH → AC ∩ d_2 = A.

_ Khi đã có điểm A → viết phương trình AB qua A và M → B = AB ∩ BH

_ Tham số hóa điểm C ∈ AC → sử dụng giả thiết d[C; AB] = $\sqrt{2}$ → giải tìm tọa độ điểm C.

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi K là hình chiếu của M lên phân giác trong góc A và M' là điểm đối xứng của M qua phân giác trong góc A (M' $\in$ AC).

Ta có MK $\perp$ $d_2: x-y+1=0 \Rightarrow$ MK: $x+y+m=0$.

MK qua M(0;2) $\Rightarrow$ m = –2

Vậy MK: $x+y-2=0$.

Lại có K = MK $\cap$ d_2 $\Rightarrow$ Toa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

Mặt khác K là trung điểm MM' $\Rightarrow$ **M'(1;1)** $\in$ AC

* Đường thẳng AC $\perp$ $BH: 3x+4y+10=0 \Rightarrow AC: 4x-3y+n=0$. AC qua M(1;1) $\Rightarrow$ n = –1

Vậy AC: $4x-3y-1=0$

Ta có A = AC $\cap$ d_2 $\Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 4x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(4;5)}$$

* Đường thẳng AB qua M(0;2) và nhận $\overrightarrow{MA}=(4;3)$ làm véctơ chỉ phương có dạng là: $\dfrac{x-0}{4}=\dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow AB: 3x-4y+8=0$

Lại có B = AB $\cap$ BH $\Rightarrow$ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+4y+10=0 \\ 3x-4y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=\dfrac{-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(-3;\frac{-1}{4}\right)}$$

* C $\in$ AC: 4x – 3y – 1 = 0 $\Rightarrow C\left(c;\dfrac{4c-1}{3}\right)$ và $\overrightarrow{MC}=\left(c;\dfrac{4c-7}{3}\right)$

Ta có: $MC^2=2 \Leftrightarrow c^2+\dfrac{(4c-7)^2}{9}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \Rightarrow C_1(1;1) \\ c=\dfrac{31}{25} \Rightarrow C_2\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right) \end{array}\right.$

***Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là*:**

$$\boxed{A(4;5),\ \text{B}\left(-3;\frac{-1}{4}\right),\ C_1(1;1)\ hay\ A(4;5),\ \text{B}\left(-3;\frac{-1}{4}\right),\ C_2\left(\frac{31}{25};\frac{33}{5}\right)}$$

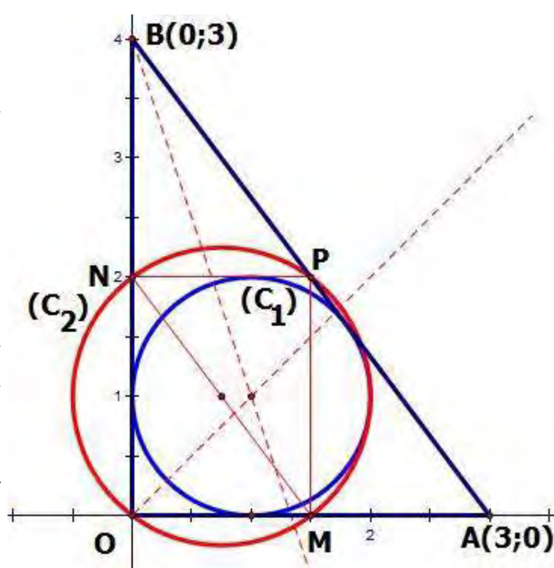
CÂU 51 (DỰ BỊ 2 – ĐH B2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(3; 0), B(0; 4). Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của tam giác OAB.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Có một tình huống khá thú vị mà một thầy giáo đặt ra cho học trò mình trong giờ dạy Toán là "nếu một căn phòng đã xác định được chiều rộng, chiều dài và chiều cao" thì các thông số như diện tích của các mặt xung quanh, thể tích của căn phòng hay đại loại tất cả các yếu tố về điểm, đường có được xác định không ?" → điều này củng cố cho học sinh một niềm tin rằng bằng cách này hay cách khác chúng có thể tìm được hay chứng minh một điều chưa biết bằng những số liệu đã xác định.

_ Trở lại bài toán này, khi mà cả 3 tọa độ O, A, B đã hiện hữu thì việc chứng minh đường tròn nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với đường tròn đi qua trung điểm của 3 cạnh OAB không hề khó. Ta cứ tuần tự làm theo các chỉ thị mà câu hỏi đặt ra. Dĩ nhiên bạn phải chắc chắn rằng mình đã nắm được các lập phương trình đường tròn.

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB, AB

$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0\right), N(0;2), P\left(\frac{3}{2};2\right)$

* ΔMNP ⊥ P nên tâm đường tròn ngoại tiếp (C_2) ΔMNP chính là trung điểm cạnh huyền MN $\Rightarrow I\left(\frac{3}{4};1\right)$ và bán kính R = $\frac{MN}{2} = \frac{5}{4}$

* Mặt khác ΔOAB ⊥ O nên đường tròn nội tiếp (C_1) tam giác OAB có $r = \frac{OA + OB + AB}{2} = 1$ và tâm J nằm trên đường thẳng y = x và thuộc góc phần tư thứ nhất nên J(1; 1).

* Ta có IJ = $IJ = \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - 1 = R - r$ $\Rightarrow$ đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong $\Rightarrow$ điều phải chứng minh

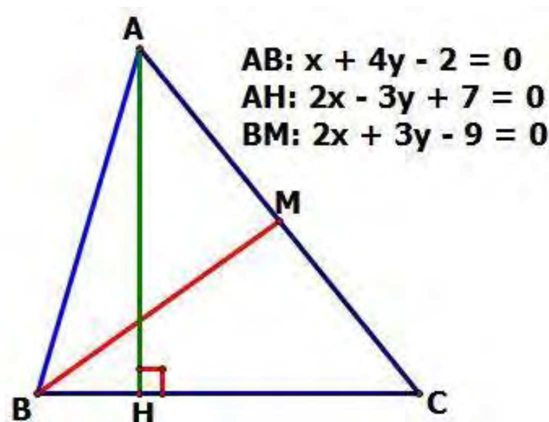
CÂU 52 (DỰ BỊ 3 – ĐH B2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đường thẳng AB, đường cao kẻ từ đỉnh A và đường trung tuyến kẻ từ B lần lượt có phương trình là x + 4y – 2 = 0, 2x – 3y + 7 = 0, 2x + 3y – 9 = 0.***

☺**Nhận xét và ý tưởng**

_ Dễ dàng tìm được tọa độ điểm A $\rightarrow$ AB $\cap$ AH = A. Tương tự với điểm B $\rightarrow$ BM $\cap$ AB = B

_ Để xác định tọa độ điểm C $\rightarrow$ viết phương trình BC qua B va BC $\perp$ AH $\rightarrow$ tham số hóa C theo BC

_ Gọi M là trung điểm AC $\rightarrow$ biểu diễn tọa độ của M theo C $\rightarrow$ M $\in$ BM $\rightarrow$ tìm được M $\Rightarrow$ C.



► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có A = AB $\cap$ AH $\Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 4y - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2;1)}$$

* Ta có B = AB $\cap$ BM $\Rightarrow$ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 4y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(6;-1)}$$

* Đường thẳng BC $\perp$ AH: 2x – 3y + 7 = 0 $\Rightarrow$ BC: 3x + 2y + m = 0.

BC qua B(6; –1) $\Rightarrow$ m = –16

Vậy BC: 3x + 2y – 16 = 0. C $\in$ BC $\Rightarrow$ $C(2c;8-3c)$

* Mặt khác, M là trung điểm AC $\Rightarrow$ $M\left(c-1;\frac{9-3c}{2}\right)$.

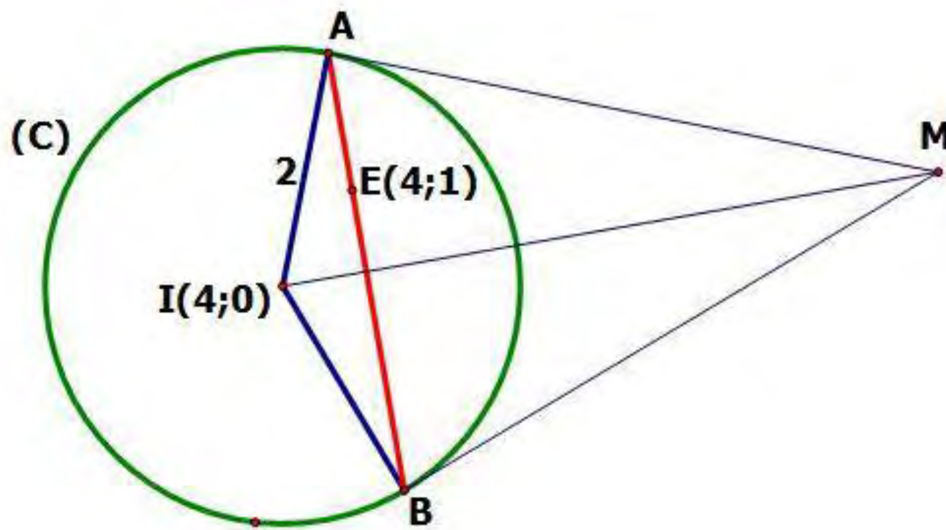
Lại có M $\in$ BM: 2x + 3y – 9 = 0

Suy ra $2(c-1)+3\left(\dfrac{9-3c}{2}\right)-9=0 \Leftrightarrow c=1 \Rightarrow \boxed{C(2;5)}$

Vậy tọa độ của các điểm cần tìm là $\boxed{A(-2;1),\ B(6;-1),\ C(2;5)}$

CÂU 53 (DỰ BỊ 4 – ĐH D2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho*** $(C):(x-4)^2+y^2=4$ ***và điểm E(4; 1). Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là các tiếp điểm sao cho đường thẳng AB đi qua điểm E.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Nhìn chung tâm điểm của bài toán này, "nhân vật chính" của bài toán này chính là đường thẳng AB → Do đề bài đã cho ta một gợi ý ngầm ẩn E ∈ AB.

_ Để giải bài toán này theo góc độ đó, ta có thể tiếp cận theo 3 hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**: sử dụng phương pháp gọi điểm

+ **Hướng thứ 2:** sử dụng phương pháp tách đôi của tiếp tuyến

+ **Hướng thứ 3:** sử dụng trục đẳng phương giữa hai đường tròn.

(tất cả những cách giải trên đều đã được giới thiệu ở chương 2, chủ đề 3, cách lập phương trình đường tròn). Cụ thể mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(4;0) và bán kính R = 2. Do M thuộc trục tung ⇒ M(0; m)

* Giả sử $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và $\overrightarrow{MA}=(x_A;y_A-m)$, $\overrightarrow{IA}=(x_A-4;y_A)$

Vì $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MA}=0 \Leftrightarrow (x_A-4)x_A+y_A(y_A-m)=0$

$\Leftrightarrow (x_A - 4)^2 + y_A{}^2 + 4(x_A - 4) - my_A = 0$ (1)

Mặt khác A ∈ (C) ⇒ $(x_A - 4)^2 + y_A{}^2 = 4$ (2)

* (1), (2) ta có A ∈ đường thẳng $\boxed{d: 4x - my - 12 = 0}$

* Tương tự, B ∈ đường thẳng $\boxed{d: 4x - my - 12 = 0}$.

Do đó phương trình đường AB: $\boxed{d: 4x - my - 12 = 0}$

* Lại có E(4; 1) ∈ AB ⇒ m = 4 ⇒ **M(0; 4)**

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M(0;4)}$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại $A(x_A; y_A)$ có dạng:

$$(x_A - 4)(x - 4) + y_A y - 4 = 0$$

* Vì tiếp tuyến qua M(0; m) nên ta có: $(x_A - 4)(-4) + y_A m - 4 = 0$

* Tương tự tọa độ $B(x_B; y_B)$ thỏa $(x_B - 4)(-4) + y_B m - 4 = 0$

Suy ra phương trình AB là $4x - my - 12 = 0$

* Lại có E(4; 1) ∈ AB ⇒ m = 4 ⇒ **M(0; 4)**

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M(0;4)}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Đường tròn (C) có tâm I(4;0) và bán kính R = 2.

Do M thuộc trục tung ⇒ M(0; m)

* Ta có $IM^2 = 16 + m^2 \Rightarrow AM^2 = IM^2 - R^2 = m^2 + 12$

* Đường tròn (C’) có tâm M(0; m) và bán kính R’ = $\sqrt{m^2 + 12}$ có dạng là:

$$(C'): x^2 + (y - m)^2 = m^2 + 12$$

* Khi đó A, B là giao điểm giữa hai đường tròn (C) và (C’) ⇒ AB chính là trục đẳng phương giữa hai đường tròn (C) và (C’) thỏa:

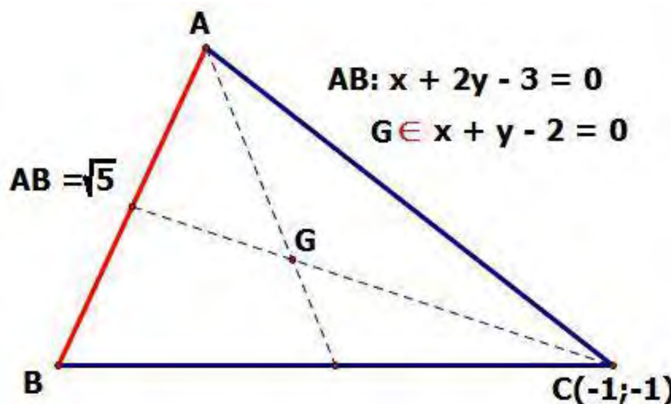
$$x^2 + (y - m)^2 - m^2 - 12 = (x - 4)^2 + y^2 - 4 \Leftrightarrow \boxed{AB: 4x - my - 12 = 0}$$

* *AB* qua E(4; 1) ⇒ m = 4 ⇒ **M(0; 4)**

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M(0;4)}$

CÂU 54 (DỰ BỊ 5 – ĐH D2008). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với AB = $\sqrt{5}$, tọa độ đỉnh C(–1; –1), đường thẳng AB có phương trình x + 2y – 3 = 0 và trọng tâm tam giác ABC thuộc đường thẳng x + y – 2 = 0. Hãy tìm tọa độ các đỉnh A và B.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Gọi M là trung điểm AB

→ M ∈ AB (tham số hóa M)

→ $CG = \frac{2}{3}CA$ → Biểu diễn tọa độ G theo M.

Mặt khác G ∈ d:x + y – 2 = 0

→ Tìm được tọa độ G và M.

_ Để xác định tọa độ A và B → A ∈ AB và do M là trung điểm → Biểu diễn tọa độ B theo A → 1 ẩn nên cần một phương trình → $MA = \frac{AB}{2}$

→ Giải tìm ra A và B.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi M là trung điểm của AB, ta có M ∈ AB: x + 2y – 3 = 0

$\Rightarrow M(3-2m;m)$.

Mặt khác ta có G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 1 = \frac{2}{3}(4-2m) \\ x_G + 1 = \frac{2}{3}(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{5}{3} - \frac{4m}{3} \\ x_G = \frac{2m}{3} - \frac{1}{3} \end{cases}$$

* Lại có G ∈ $x + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (5-4m) + (2m-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow \boxed{M(5;-1)}$

* Ta có $A \in AB \Rightarrow A(3-2a;a)$ và $MA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ với $\overrightarrow{MA} = (-2a-2;a+1)$

* Do đó $MA^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4(a+1)^2 + (a+1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (a+1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{-1}{2} \\ a = \frac{-3}{2} \end{array}\right.$

* Với $A\left(4;\frac{-1}{2}\right)$ do M là trung điểm AB $\Rightarrow B\left(6;\frac{-3}{2}\right)$

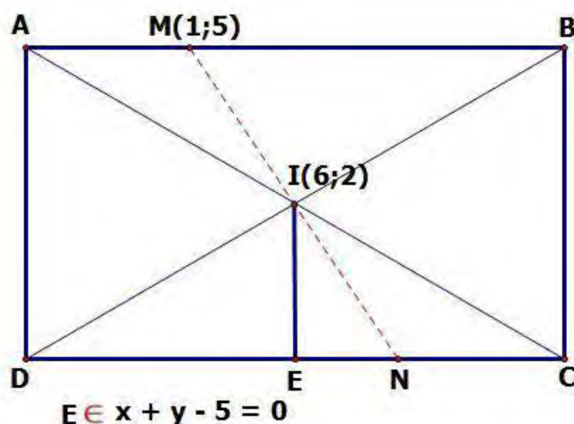
* Với $A\left(6;\frac{-3}{2}\right)$ do M là trung điểm AB $\Rightarrow B\left(4;\frac{-1}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A\left(4;\frac{-1}{2}\right), B\left(6;\frac{-3}{2}\right) \text{ hay } A\left(6;\frac{-3}{2}\right), B\left(4;\frac{-1}{2}\right)}$$

CÂU 55 (CHÍNH THỨC – ĐH A2009 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng Δ: x + y – 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng AB.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Do tính chất đối xứng của các điểm qua tâm I của hình chữ nhật nên nếu gọi N là điểm sao cho I là trung điểm MN thì khi đó N thuộc đường thẳng CD.

_ Do đề bài đã gợi ý điểm E → ta tìm tọa độ điểm E bằng cách tham số hóa E theo đường x + y – 5 = 0 → 1 ẩn nên cần 1 phương trình ? → Lại có IE ⊥ EN → giải phương trình tìm E.

_ Phương trình AB đã qua M nên chỉ còn cần đi qua 1 điểm nữa hoặc tìm thêm được vécto pháp tuyến.

+ Hướng thứ 1: Ở đây ta có thể dùng tính đối xứng của tâm I thêm lần nữa để tìm tọa độ E' sao cho I là trung điểm EE' (E' ∈ AB).

+ Hướng thứ 2: Hoặc ta cũng có thể chọn $\overrightarrow{IE}$ làm véctơ pháo tuyến hoặc $\overrightarrow{EN}$ làm vécto chỉ phương để viết phương trình AB.

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi N là điểm đối xứng với M qua I $\Rightarrow N(11;-1)$ và N thuộc đường thẳng CD.

* Ta có: E ∈ Δ: $x+y-5=0$

$\Rightarrow E(e;5-e)$ và $\overrightarrow{IE}=(e-6;3-e)$ và $\overrightarrow{NE}=(e-11;6-e)$

* Do E là trung điểm CD suy ra IE ⊥ EN

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EN}=0 \Leftrightarrow (e-6)(e-11)+(3-e)(6-e)=0$

$\Leftrightarrow e^2-13e+42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e=6 \\ e=7 \end{array}\right.$

* Với e = 6, ta có $\overrightarrow{IE}=(0;-3)$.

Khi đó AB qua M(1; 5) và nhận $\overrightarrow{IE}$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$0(x-1)-3(y-5)=0 \Leftrightarrow \boxed{AB: y-5=0}$

* Với e = 7, ta có $\overrightarrow{IE}=(1;-4)$.

Khi đó AB qua M(1; 5) và nhận $\overrightarrow{IE}$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

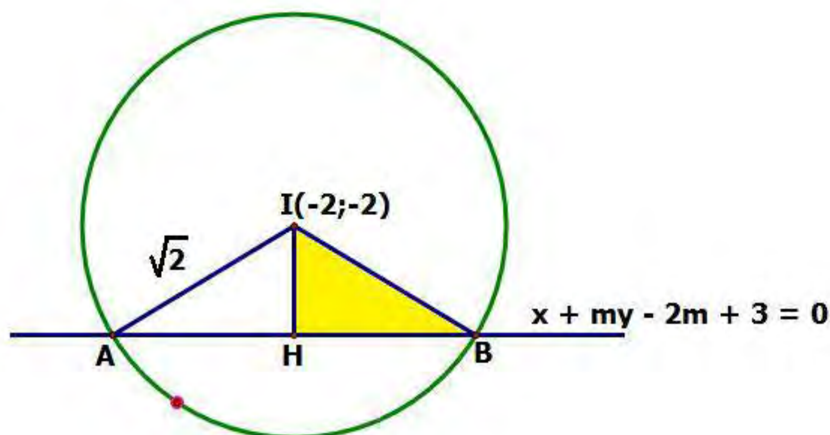
$1(x-1)-4(y-5)=0 \Leftrightarrow \boxed{AB: x-4y+19=0}$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là:

$\boxed{AB: y-5=0 \ hay \ AB: x-4y+19=0}$

CÂU 56 (CHÍNH THỨC – ĐH A2009 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):*** $x^2+y^2+4x+4y+6=0$ ***và đường thẳng Δ:*** $x+my-2m+3=0$ ***với m là tham số thực. Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Bài toán trên đã đề cập đến vấn đề "max – min" trong việc tính diện tích tam giác. Một số công thức diện tích tam giác ta có thể liên hệ như:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$ đường cao. cạnh đáy

hay $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$ tích 2 cạnh kề . (sin góc hợp giữa hai cạnh kề)

_ Ở đây ta sử dụng bất đẳng thức hình học:

$$S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}R^2 \Rightarrow S_{max} \Leftrightarrow \sin AIB_{max} = 1.$$

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

* Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}R^2 = 1$.

Do đó $\left(S_{\Delta IAB}\right)_{max} = 1 \Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Rightarrow AIB = 90^o \Rightarrow \Delta ABC \perp I$

* Gọi H là trung điểm AB (theo định lý đường kính và dây cung) ta có:

IH $\perp$ AB và IH = $\frac{AB}{2}$

Do $\Delta ABC \perp I \Leftrightarrow AB^2 = IA^2 + IB^2 = 4 \Rightarrow IH = 1$

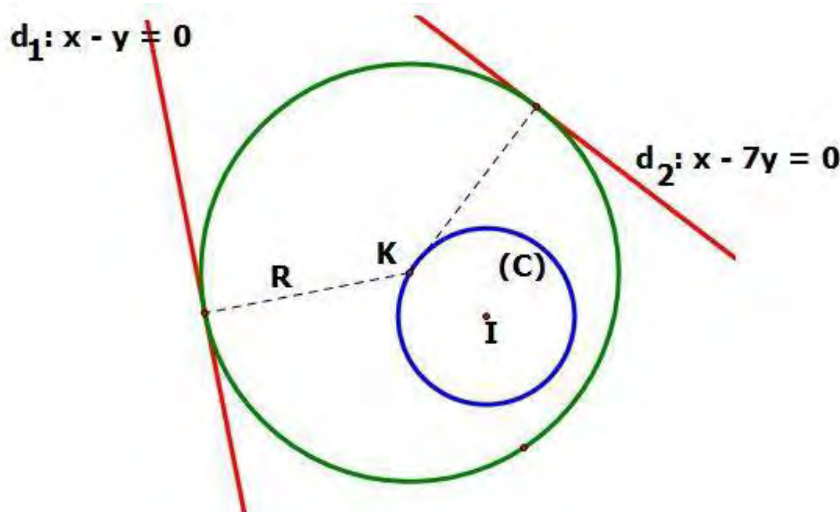
* Mặt khác $IH = d[I;d] \Leftrightarrow 1 = \frac{|-2-2m-2m+3|}{\sqrt{1+m^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1+m^2} = |1-4m|$

Suy ra $1+m^2 = 1-8m+16m^2 \Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{array}\right.$

Vậy giá trị m thỏa yêu câu bài toán là: $\boxed{m = 0 \text{ hay } m = \frac{8}{15}}$

CÂU 57 (CHÍNH THỨC – ĐH B2009 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):*** $(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ ***và hai đường thẳng Δ_1: x – y = 0, Δ_2: x – 7y = 0. Xác định tọa độ tâm K và bán kính đường tròn (C_1), biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để tìm tâm K của đường tròn ta chắc chắn phải thiết lập K(a; b) (2 ẩn) nên cần 2 phương trình.

+ Phương trình thứ 1: điều kiện tiếp xúc giữa đường tròn với d_1 và d_2

+ Phương trình thứ 2: tâm K thuộc đường tròn (C).

_ Sau khi tìm được tâm K thì việc xác định bán kính của đường tròn cần tìm không vì ta lại sử dụng điều kiện tiếp xúc một lần nữa.

► **Hướng dẫn giải :**

* Đặt K(a; b) là tọa độ tâm K của đường tròn cần tim.

* Ta có K ∈ (C): $(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5} \Rightarrow (a-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5}$ (1)

* Mặt khác $\begin{cases}(C')\,tiep\,xuc\,d_1\\(C')\,tiep\,xuc\,d_2\end{cases} \Leftrightarrow d[K;d_1]=d[K;d_2]=\text{R}$

Suy ra $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-7b|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow 25(a-b)^2-(a-7b)^2=0$ (2)

* Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

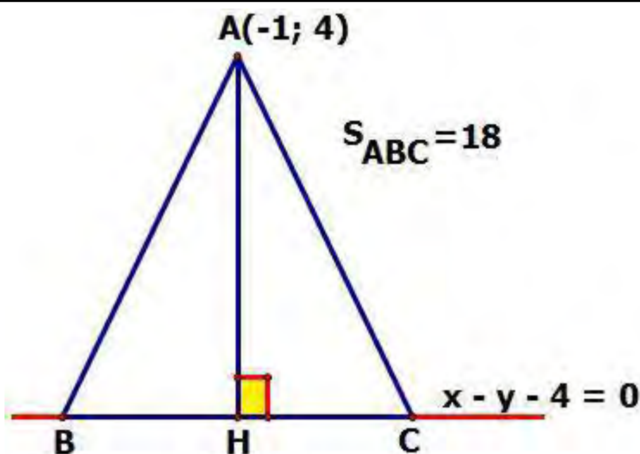
$$\begin{cases}(a-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5}\\25(a-b)^2-(a-7b)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\25b^2-40b+16=0\end{cases} \Leftrightarrow (a;b)=\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{6}{5}\right)$$

* Bán kính R = $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{K\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{4}{5}\right) \text{ và } R=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}}$

CÂU 58 (CHÍNH THỨC – ĐH B2009 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(–1; 4) va các đỉnh B, C thuộc đường thẳng Δ: x – y – 4 = 0. Xác định tọa độ của các điểm B và C biết diện tích tam giác ABC bằng 18.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Trước khi triển khai việc tìm tọa độ điểm ? ta cũng nên đặt ra câu hỏi : "có tìm thêm được tọa độ điểm mới nào không ?". "có lập thêm được phương trình đường thẳng nào không ?" hay "có lập được phương trình đường tròn ẩn mình nào không ?"

→ Quá trình này giúp ta liên kết các giả thiết tưởng chừng rời rạc nhưng lại có một sợi dây liên kết vô hình xâu chuỗi chúng lại ?

_ Để trả lời cho câu hỏi trên, khi quan sát hình vẽ, ta nhận thấy do tính chất đặc biệt của tam giác cân nên đường cao hạ từ đỉnh cân của tam giác sẽ vuông góc với cạnh đáy BC → viết phương trình AH.

_ Ngoài ra H cũng chính là trung điểm của cạnh BC

→ tìm tọa độ H = AH ∩ BC → như vậy ta chỉ cần hoặc tìm tọa độ B hoặc tìm toa độ C → giảm bớt quá trình đặt ẩn.

_ Như vậy đến đây ta còn đúng duy nhất 1 dữ kiện chưa dùng đến chính là **diện tích tam giác.** Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AH.2BH = AH.BH \Rightarrow BH = ?$$

→ giải phương trình trên tìm tọa độ B → tọa độ C

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi H là trung điểm BC (do tam giác ABC cân tại A)

$\Rightarrow AH \perp BC: x - y - 4 = 0$

Nên AH: $x + y + m = 0$. AH qua A(–1; 4)

$\Rightarrow m = -3$. Vậy **AH: x + y – 3 = 0**

* Ta có: $H = AH \cap BC \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$$

* Ta có B ∈ BC: x – y – 4 = 0

$$\Rightarrow B(b+4;b) \text{ và } \overrightarrow{HB}=\left(b+4-\frac{7}{2};b+\frac{1}{2}\right)=\left(b+\frac{1}{2};b+\frac{1}{2}\right)$$

* Mặt khác, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=\dfrac{1}{2}AH.2BH=AH.BH \Rightarrow BH^2=8$

Suy ra $\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2=8 \Leftrightarrow \left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{-5}{2} \end{array}\right.$

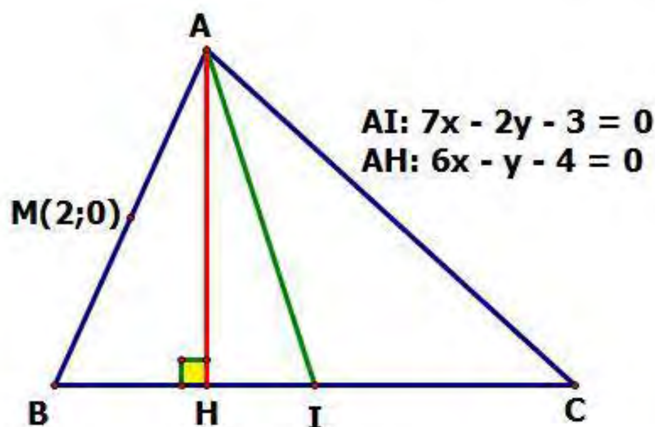
Vậy tọa độ điểm B và C thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right),C\left(\frac{3}{2};\frac{-5}{2}\right) \text{ hay } B\left(\frac{3}{2};\frac{-5}{2}\right),C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)}$$

CÂU 59 (CHÍNH THỨC – ĐH D2009 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M(2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt là $7x-2y-3=0$ và đường thẳng $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Dễ dàng tìm được tọa độ điểm A = AH ∩ AI → do M là trung điểm AB → tọa độ B → BC qua B và BC vuông AH → viết phương trình BC → I = BC ∩ AI → I là trung điểm BC → tọa độ C → AC qua A và C.



► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi H là chân đường cao kẻ từ A và I là trung điểm BC.

Ta có A = AI ∩ AH ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}7x-2y-3=0\\6x-y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow \boxed{A(1;2)}$$

* Do M là trung điểm AB

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\y_A+y_B=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=2x_M-x_A=4-1=3\\y_B=2y_M-y_A=0-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{B(3;-2)}$$

* Đường thẳng BC ⊥ AH: 6x – y – 4 = 0 ⇒ BC: x + 6y + m = 0.
BC qua B(3; –2) ⇒ m = 9. Vậy **BC : x + 6y + 9 = 0**
* Ta có I = AI ∩ BC ⇒ Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}7x-2y-3=0\\x+6y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\dfrac{-3}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{I\left(0;\dfrac{-3}{2}\right)}$$

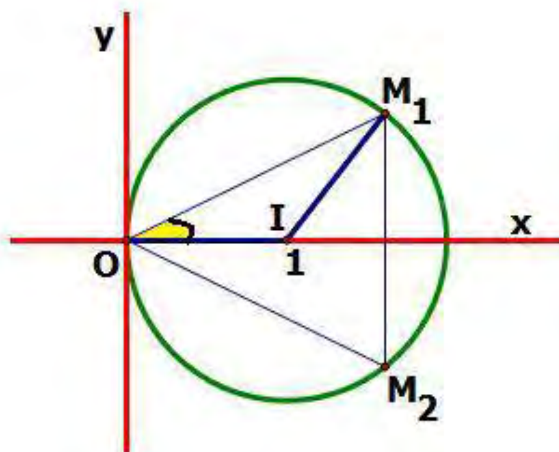
* Đường thẳng AC qua A(1; 2) và nhận $\overrightarrow{IM}=\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$ làm véctơ chỉ phương (do MI // AC) có dạng: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}\Leftrightarrow AC:3x-4y+5=0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{AC:3x-4y+5=0}$

CÂU 60 (CHÍNH THỨC – ĐH D2009 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):*** $(x-1)^2+y^2=1$***. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho góc IMO bằng 30º.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Trong bài toán này ta có thể ha hướng để giải quyết:



+ **Hướng thứ 1**: Sử dụng định lý hàm số cosin cho tam giác IMO → tính được độ dài cạnh OM → Tọa độ M chính là giao điểm giữa đường tròn (C) và đường tròn (C’) có tâm O và bán kính OM.

+ **Hướng thứ 2**: Ta có góc IMO bằng 30º → góc IOM = 30º ⇒ M thuộc đường thẳng d tạo với trục hoành một góc 30º → viết phương trình đường OM → M = OM ∩ (C).

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 0) và bán kính R = 1.
* Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác IMO ta có:

$$\cos IMO = \frac{IM^2 + OM^2 - IO^2}{2IM.OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow OM = \sqrt{3}$$

* Đường tròn (C') có tâm O(0; 0) và bán kính R' = OM = $\sqrt{3}$ có dạng là:

$$(C'):\ x^2 + y^2 = 3$$

* Điểm M chính là giao điểm giữa hai đường tròn (C) và (C') ⇒ Tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ -2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ hay } M\left(\frac{3}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 0) và bán kính R = 1.
* Ta có góc IMO bằng 30^o ⇒ góc IOM bằng 30^o (do ΔOMI cân tại I) ⇒ đường thẳng OM hợp với trục hoành một góc 30^o ⇒ hệ số góc cua đường OM là k = $\tan\left(\pm 30^o\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$
* TH1: OM qua O có hệ số góc $k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇒ OM: $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó M = OM ∩ (C)

Suy ra tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = \dfrac{3}{2}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

⇒ $\boxed{M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

* TH2: OM qua O có hệ số góc $k_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ⇒ OM: $y = \frac{-x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó M = OM $\cap$ (C)

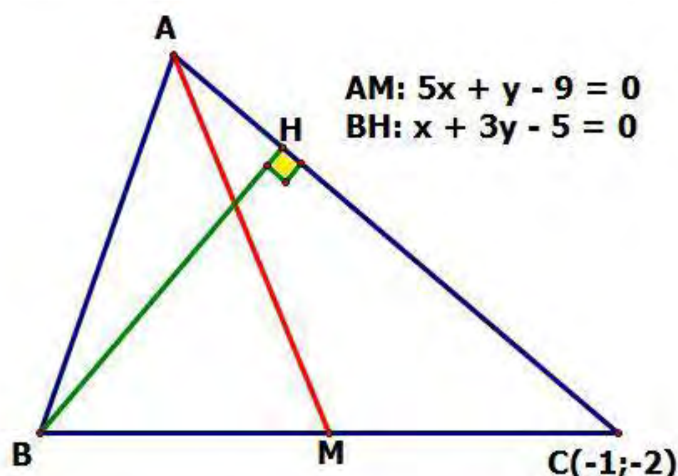
Suy ra tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{-x}{\sqrt{3}} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = \dfrac{3}{2}, y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \boxed{M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)}$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ hay } M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)}$

CÂU 61 (CHÍNH THỨC – CĐ 2009 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh C(–1; –2), đường trung tuyến kẻ A có phương trình là*** $5x + y - 9 = 0$ ***và đường cao kẻ từ B có phương trình là*** $x + 3y - 5 = 0$. ***Tìm tọa độ các đỉnh A và B.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Trong các dữ kiện đề bài cho thì ta thấy dữ kiện đường cao BH có thể giúp ta thiết lập thêm một phương trình đường thẳng nữa → đó chính là đường thẳng AC (AC qua C, AC ⊥ BH)

_ Khi đó A = AC $\cap$ AM → tọa độ A.

_ Mặt khác điểm B ∈ BH → tham số hóa điểm B theo đường BH → biểu diễn tọa độ M theo tọa độ B (do M là trung điểm BC) → M ∈ AM → tọa độ B.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có AC ⊥ BH: x + 3y – 5 = 0 ⇒ AC: 3x – y + m = 0.

AC qua C(–1 ; –2) ⇒ m = 1.

Vậy **AC : 3x – y + 1 = 0**.

Lại có A = AC $\cap$ AM (với M là trung điểm BC)

Suy ra tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y+1=0\\5x+y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\Rightarrow \boxed{A(1;4)}$

* Ta có B ∈ BH: x + 3y – 5 = 0 ⇒ $B(5-3b;b)$

$\Rightarrow M\left(\frac{4-3b}{2};\frac{b-2}{2}\right)$

* Mặt khác M ∈ AM : 5x + y – 9 = 0

Suy ra $5\frac{4-3b}{2}+\frac{b-2}{2}-9=0\Leftrightarrow 20-15b+b-2-18=0\Leftrightarrow b=0\Rightarrow \boxed{B(5;0)}$

Vậy tọa độ điểm A và B cần tìm là $\boxed{A(1;4),\ B(5;0)}$

CÂU 62 (CHÍNH THỨC – CĐ 2009 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng Δ1:*** $x-2y-3=0$ ***và Δ2:*** $x+y+1=0$***. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ1 sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ2 bằng*** $\frac{1}{\sqrt{2}}$***.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:** Bài toán trên ta không thiết phải dựng hình, mà chỉ đơn thuần kiểm tra kiến thức về dạng toán khoảng cách. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có M ∈ Δ_1: x – 2y – 3 = 0 ⇒ $M(2m+3;m)$

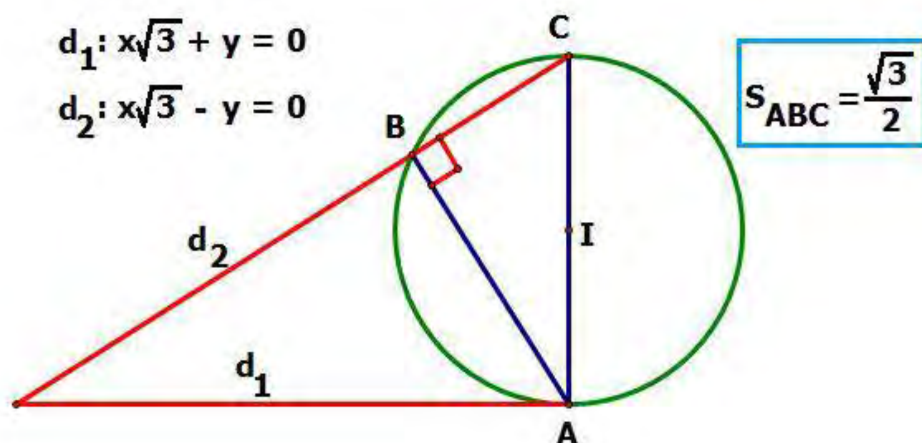
* Ta có $d[M;\Delta_2]=\frac{|2m+3+m+1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|3m+4|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=\frac{-5}{3}\end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M(1;-1)\ hay\ M\left(\frac{-1}{3};\frac{-5}{3}\right)}$

CÂU 63 (CHÍNH THỨC – ĐH A2010 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d1:*** $x\sqrt{3}+y=0$ ***và d2:*** $x\sqrt{3}-y=0$***. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d1 tại A, cắt d2 tại B và***

C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để lập phương trình đường tròn (T) chúng ta chỉ cần → tìm được tọa độ của A và C → tọa độ tâm I và độ dài bán kính R. (do nhận xét ΔABC ⊥ B).

_ Để xác định tọa độ A và C ta có thể giải theo cách hướng sau:

+ **Hướng thứ 1** (*không phát hiện d_1 và d_2 tạo góc 60^o với nhau*): Ta sẽ viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C → như vậy ta cần tìm đầy đủ tọa độ của 3 điểm A, B, C → lần lượt tham số B và C theo d_2 và A theo d_1 → chúng ta cần đến 3 phương trình bao gồm:

(1). $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (2). $AC \perp d_1$, (3). $AB \perp d_2$.

+ **Hướng thứ 2** (*không phát hiện d_1 và d_2 tạo góc 60^o với nhau*): Ta sẽ tham số hóa A theo d_1 → viết phương trình AC ⊥ d_1 phụ thuộc theo tham số của A. Khi đó C = AC ∩ d_2 → biểu diễn tọa độ C theo tọa độ A. Tương tự ta viết phương trình AB ⊥ d_2 → B = AB ∩ d_2 (tọa độ B biểu thị theo A). Cuối cùng là sử dụng công thức $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC$ → giải phương trình và suy ra A và C.

+ **Hướng thứ 3** (*phát hiện d_1 và d_2 tạo góc 60^o với nhau tại O*) → dẫn đến góc $AOB = 60^0$ suy ra $BAC = 60^0$ → vận dụng công thức diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.AC\sin 60^0$ → dễ dàng tính được cạnh OA → suy

ra tọa độ điểm A. Đến đây thì ta viết phương trình AC (như hướng thứ nhất) → C = AC ∩ d_1 → tọa độ C.

► Hướng dẫn giải cách 1:

* Ta có $\begin{cases} A \in d_1 \\ B \in d_2 \\ C \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(a;-a\sqrt{3}) \ \ (a>0) \\ B(b;b\sqrt{3}) \\ C(c;c\sqrt{3}) \end{cases}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-a;b\sqrt{3}+a\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{AC} = (c-a;c\sqrt{3}+a\sqrt{3}) \\ \vec{u}_1 = (1;-\sqrt{3})\ la\ vtcp\ cua\ d_1 \\ \vec{u}_2 = (1;\sqrt{3})\ la\ vtcp\ cua\ d_2 \end{cases}$

* Theo đề bài ta có: $\begin{cases} AB \perp d_2 \\ AC \perp d_1 \\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1} = 0 & (2) \\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (3) \end{cases}$.

* Từ (1) $\Rightarrow b - a + 3b + 3a = 0 \Leftrightarrow 4b + 2a = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = \dfrac{-a}{2}}$

* Từ (2) $\Rightarrow c - a - 3c - 3a = 0 \Leftrightarrow -2c - 4a = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = -2a}$

* Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{-3a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) \\ \overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{-3a}{2};\dfrac{-3a\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$.

Từ (3) $\Rightarrow BA^2.BC^2 = 3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}\right)\left(\dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{27a^2}{4}\right) = 3$

Suy ra $a^4 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $(do\ a > 0)$

$\Rightarrow \boxed{A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};-1\right), C\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}};-2\right)}$

* Suy ra tâm $I\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{3}};\dfrac{-3}{2}\right)$ và bán kính $R = IA = 1$

Vậy phương trình đường tròn (T) là $\boxed{(T): \left(x + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 1}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Ta có $A \in d_1 \Rightarrow A(a;a\sqrt{3}),\ (a>0)$

* AC vuông góc với $d_1: x\sqrt{3}+y=0 \Rightarrow\ AC: x-y\sqrt{3}+m=0$.

  Lại có AC qua A $\Rightarrow$ $\boxed{AC: x-y\sqrt{3}-4a=0}$

  Ta có C = AC ∩ d2 ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y=0 \\ x-y\sqrt{3}-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a \\ y=-2a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{C\left(-2a;-2a\sqrt{3}\right)}$$

* AB vuông góc với $d_2: x\sqrt{3}-y=0 \Rightarrow\ AB: x+y\sqrt{3}+n=0$

  Lại có AB qua A $\Rightarrow$ $\boxed{AB: x+y\sqrt{3}+2a=0}$

  Ta có B = AB ∩ d2 ⇒ Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y=0 \\ x+y\sqrt{3}+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-a}{2} \\ y=\dfrac{-a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{B\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{-a\sqrt{3}}{2}\right)}$$

* $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB.BC=\sqrt{3} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};-1\right),\ C\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}};-2\right)}$

* Suy ra tâm $I\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{3}};\dfrac{-3}{2}\right)$ và bán kính $R=IA=1$

  Vậy phương trình đường tròn (T) là $\boxed{(T): \left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=1}$

► **Hướng dẫn giải cách 3: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

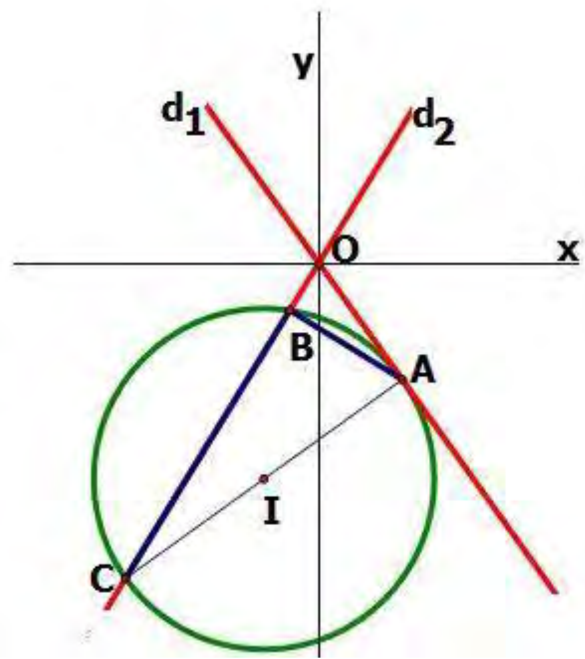
* d_1 và d_2 cắt nhau tại O,

  $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|\sqrt{3}.\sqrt{3}-1.1|}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+1}}=\dfrac{1}{2}$

  và tam giác OAB vuông tại B,

  do đó $\widehat{AOB}=60^0 \Rightarrow \widehat{BAC}=60^0$.

* Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0$



$$= \frac{\sqrt{3}}{3}(OA.\sin 60^0)(OA.\tan 60^0)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}OA^2$$

Do $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA^2 = \frac{4}{3}$

* Tọa độ A(x; y) với x > 0 thỏa mãn hệ $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right)}$

* AC đi qua A và vuông góc với d_2, suy ra $AC: \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$.

Ta có $C = AC \cap d_2 \Rightarrow$ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; -2\right)}$$

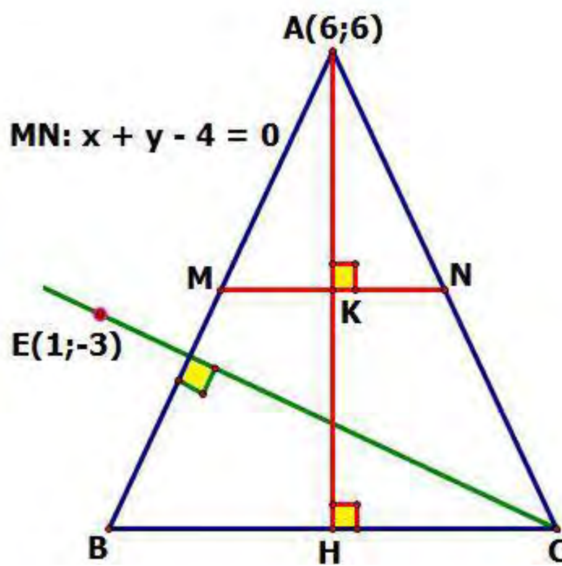
* Đường tròn (T) có đường kính AC, suy ra tâm $I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}; \frac{-3}{2}\right)$ và bán kính

$R = IA = 1$

Vậy phương trình đường tròn (T) là $\boxed{(T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1}$

■ **Lời bình**: Rõ ràng việc xác định được góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 đã tạo sự thuận lợi cho ta rất nhiều trong quá trình tính toán. Cách 1 tuy dài nhưng sẽ được nhiều bạn nghĩ đến, cách 2 đòi hỏi phải có một chút liều lĩnh và ở cách 3 là ở sự quan sát, liên hệ với các đối tượng hình học xung quanh một đối tượng đang tìm kiếm. Qua bài trên, chúng ta cũng đút rút cho mình một số kỹ năng như khi thấy bài toán có cho nhiều đường thẳng thì nên kiểm tra khoảng cách cũng như góc của chúng.

CÂU 64 (CHÍNH THỨC – ĐH A2010 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6; 6), đường thẳng đi qua trung điểm của cạnh AB và AC có phương trình là (d): x + y – 4 = 0.***



Tìm tọa độ các đỉnh B và C biết điểm E(1; –3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Một câu hỏi đặt ra là đường thẳng MN mà đề bài cho và điểm E thuộc đường cao kẻ từ C gợi ý cho ta điều gì ?

+ Thứ 1, đường thẳng MN trước hết là đường trung bình của ΔABC → MN // BC và MN ⊥ AH → viết được phương trình AH. Nếu gọi K là trung điểm MN → K cũng là trung điểm AH (hình vẽ) → điều này có nghĩa là ta đã viết được phương trình BC (Việc lập phương trình BC có ý nghĩa quan trọng trong quá trình tìm tọa độ B và C vì khi đó ta dễ dàng tham số hóa B (hoặc C) và kết hợp với trung điểm H tìm được để giảm số ẩn xuống thấp nhất (1 ẩn theo B) → vấn đề đặt ra ta cần thiết lập phương trình chứa tham số của B.

+ Thứ 2, Điểm E thuộc đường cao kẻ từ C thì cũng để lộ " yếu tố vuông góc" mà thôi → ta bắt đầu liên kết tọa độ của các điểm lại thì lúc này EC ⊥ AB → đó chính là phương trình mà ta đang cần tìm. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi H là trung điểm BC, K là trung điểm AH

  Ta có AH ⊥ BC: x + y – 4 = 0 ⇒ AH: x – y + m = 0

  AH qua A(6; 6) ⇒ m = 0. Vậy AH: x – y = 0

* K = AH ∩ MN ⇒ Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{K(2;2)} \Rightarrow \boxed{H(-2;-2)}$$

* Đường thẳng BC đi qua H và BC // MN suy ra BC: x + y + 4 = 0.

* Ta có B ∈ BC ⇒ $B(b;-4-b)$. Do H là trung điểm BC ⇒ $C(-4-b;b)$

* Ta có EC ⊥ AB ⇔ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}=0$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(b-6;-10-b) \\ \overrightarrow{EC}=(-5-b;b+3) \end{cases}$.

  Do đó

$$(*) \Leftrightarrow (b-6)(-5-b)-(10+b)(b+3)=0 \Leftrightarrow -b^2-6b=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-6 \end{array}\right.$$

• Với b = 0 ⇒ B(0; –4), C(–4; 0)

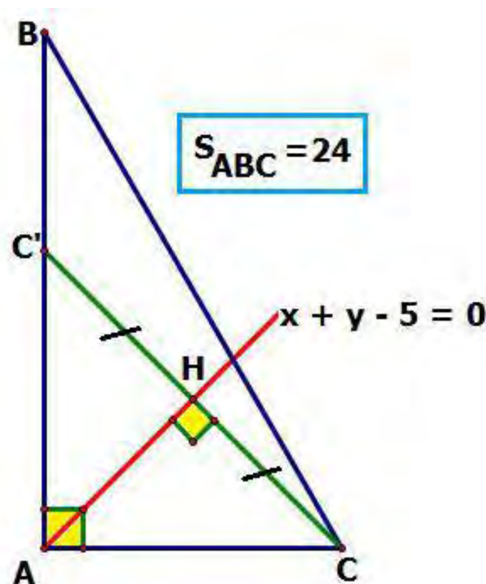
- Với b = –6 ⇒ B(–6; 2), C(2; –6)

  Vậy tọa độ điểm B và C cần tìm là

  $\boxed{B(0;-4), C(-4;0) \text{ hay } B(-6;2), C(2;-6)}$

CÂU 65 (CHÍNH THỨC – ĐH B2010 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có đỉnh C(–4; 1), phân giác trong góc A có phương trình x + y – 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.***

► Hướng dẫn giải cách 1 (Sử dụng tính chất của đường phân giác):



* Gọi C' là điểm đối xứng của C qua d, ta có C' ∈ AB. Phương trình CC': x – y + m = 0

Do CC' qua C(–4; 1) ⇒ m = 5.

Vậy CC': x – y + 5 = 0.

Lại có H = CC' ∩ d

⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{H(0;5)}$$

* Mặt khác, H là trung điểm CC' nên ta có $\boxed{C'(4;9)}$

* Vì A ∈ d: x + y – 5 = 0 ⇒ $A(a;5-a)$ và ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-4-a;-4+a) \\ \overrightarrow{AC'} = (4-a;4+a) \end{cases}$

Do ΔABC ⊥ A ⇒ AC' ⊥ AC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow A(4;1) \Rightarrow \boxed{AC = 8}$

* Lại có $S_{ABC} = 24 = \frac{1}{2}AB.AC \Rightarrow AB = 6$

Vì AB ⊥ Ox ⇒ $AB = y_B - y_A \Leftrightarrow y_B = 7$. Do B, C nằm về hai phía của phân giác d nên $y_B > y_A$

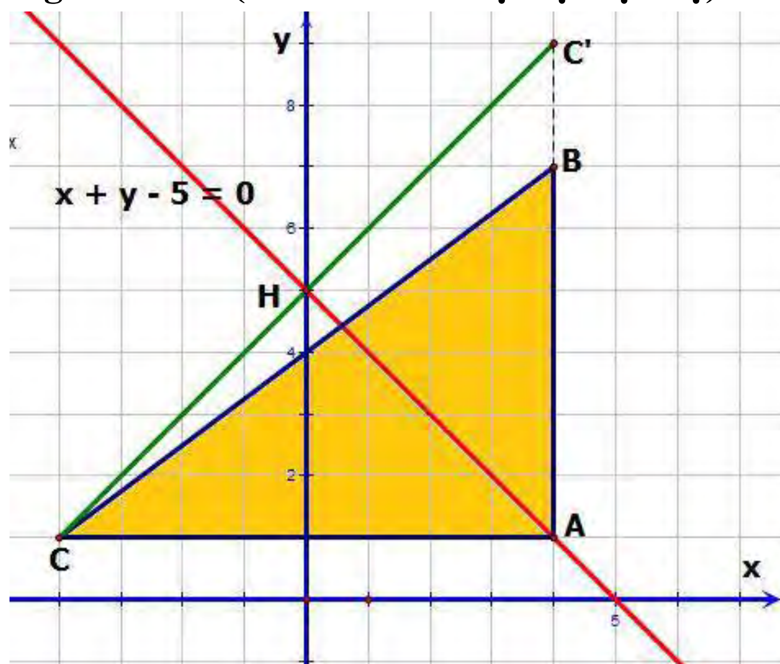
Vậy tọa độ điểm $B(4;7)$.

* Nên phương trình đường thẳng

$$BC: \frac{x+4}{4+4} = \frac{y-1}{7-1} \Leftrightarrow \boxed{BC: 3x-4y+16=0}$$

Vậy phương trình đường BC cần tìm là $\boxed{BC: 3x+4y-16=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 2 (Vẽ hình kèm hệ trục tọa độ)**



* Vì $C(-4;1)$ và góc $CAB = 90^0$, phân giac trong góc A là d: x + y – 5 = 0, $x_A > 0$ nên đường thẳng AC phải tạo với d một góc 45°

$\Rightarrow \boxed{A(4;1)} \Rightarrow$ AC = 8.

* Mặt khác $S_{ABC} = 24 = \frac{1}{2}AB.AC \Rightarrow AB = 6$

* Mặt khác AB ⊥ trục hoành nên B(4; 7)
* Nên phương trình đường thẳng

$$BC: \frac{x+4}{4+4} = \frac{y-1}{7-1} \Leftrightarrow \boxed{BC: 3x-4y+16=0}$$

Vậy phương trình đường BC cần tìm là $\boxed{BC: 3x+4y-16=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 3: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Gọi D là điểm đối xứng của C(–4; 1) qua d: x + y – 5 = 0, suy ra tọa độ D thỏa mãn:

$$\begin{cases} (x+4)-(y-1)=0 \\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+1}{2}-5=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(4;9)}$$

* Điểm A thuộc đường tròn đường kính CD, nên tọa độ A thỏa mãn:

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x^2+(y-5)^2=32 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(4;1)}\ do\ x_A>0$$

Suy ra AC = 8 $\Rightarrow$ $AB=\dfrac{2S_{ABC}}{AC}=6$. B thuộc đường thẳng AD: x = 4

$\Rightarrow$ tọa độ B(4; y) thỏa mãn: $(y-1)^2=36 \Rightarrow B(4;7)$ hay $B(4;-5)$

* Do d là phân giác trong cua góc A nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, suy ra B(4; 7)

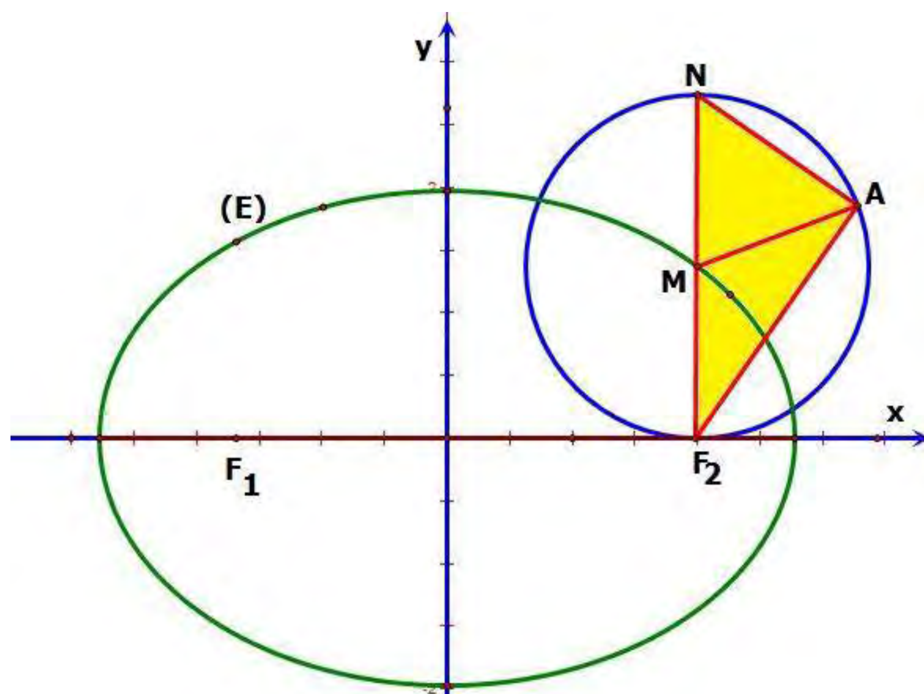
* Nên phương trình đường thẳng

$$BC:\frac{x+4}{4+4}=\frac{y-1}{7-1} \Leftrightarrow \boxed{BC:3x-4y+16=0}$$

Vậy phương trình đường BC cần tìm là $\boxed{BC:3x+4y-16=0}$

CÂU 66 (CHÍNH THỨC – ĐH B2010 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tọa độ điểm*** $A(2;\sqrt{3})$ ***và elip (E):*** $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$***. Gọi F₁ và F₂ là các tiêu điểm của (E), (F₁ có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF₁ với (E), N là điểm đối xứng của F₂ qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF₂.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, N, F_2 chúng ta cần xác định tọa độ của điểm N ? (do đề bài đã cho ta tọa độ của điểm A và F_2). Để tìm tọa độ điểm N ta dựa vào yếu tố M là trung điểm NF_2

$\rightarrow$ tìm được tọa độ M suy ra tọa độ N. Lại có $M = AF_1 \cap (E)$ nên ta dễ dàng tìm được M.

_ Đến đây nếu khéo léo ta có thể kiểm tra xem tam giác ANF_2 có là tam giác đặc biệt ? (thông qua hai cách tính độ MA và so sánh với MF_2 hoặc cũng có thể xét tích vô hướng giữa hai véctơ NA và AF_2). Tuy nhiên nếu không phát hiện được thì bạn vẫn có thể lập được phương trình đường tròn đi qua 3 điểm trên thông qua dạng khai triển của đường tròn (C). Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải:**

* $(E)\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=3 \\ b^2=2 \\ c^2=a^2-b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=\sqrt{2} \\ c=1 \end{cases}$ suy ra $F_1(-1;0),\ F_2(1;0)$

* Phương trình đường $AF_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$

* Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (E) và AF_1 ta có:

$$2x^2+3.\frac{3}{9}(x+1)^2=6 \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ \ (tm) \\ x=\dfrac{-5}{3}\ \text{(ktm)} \end{array}\right.$$

Vậy $M\left(1;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $N\left(1;\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$

* Gọi dạng khai triển của đường tròn (C) cần tìm là:

$$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0,\ (\text{R}=\sqrt{m^2+n^2-p})$$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} N\in(C)\\ A\in(C)\\ F_2\in(\text{C})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{16}{3}-2m-\dfrac{8n}{\sqrt{3}}+p=0\\ 4+3-4m-2n\sqrt{3}+p=0\\ 1-2m+p=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1\\ n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\ p=1\end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là (C):

$$\boxed{x^2+y^2-2x-\frac{4}{\sqrt{3}}y+1=0}$$

* *Những cách khác để lập phương trình đường tròn khi tìm được tọa độ điểm N.*

Xét $\overrightarrow{AN}=\left(-1;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{AF_2}=(-1;-\sqrt{3})$. Do $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AF_2}=0\Rightarrow \Delta ANF_2\perp A$

Vậy đường tròn qua A, N, F_2 là đường tròn đường kính NF_2 có tâm M và bán kính R = MF_2.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là (C) : $\boxed{(x-1)^2+\left(y-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4}{3}}$

(*Hay ta cũng có thể làm theo đáp án của Bộ GD&ĐT*)

Ta có $MA=MF_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và do N là điểm đối xứng của F_2 qua M nên MF_2 = MN

Suy ra $MA=MF_2=MN$ $\Rightarrow$ Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 chính là đường tròn tâm M, bán kính MF_2.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là (C) : $\boxed{(x-1)^2+\left(y-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4}{3}}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(x-1)^2+\left(y-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4}{3}}$

CÂU 67 (CHÍNH THỨC – ĐH D2010 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3; –7), trực tâm H(3; –1), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(–2; 0). Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.***

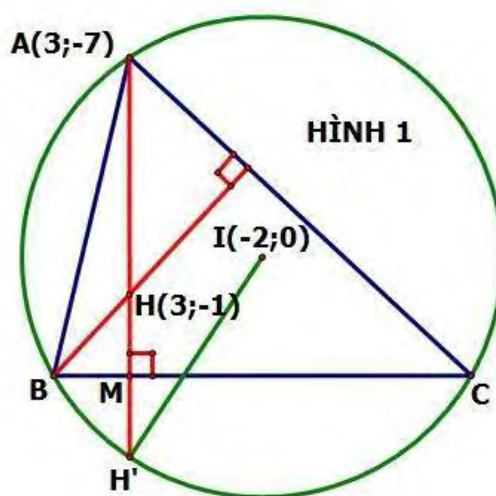
☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Bài toán này có thể tiếp cận theo 2 hướng chính (hoặc kẻ thêm đường phụ, hoặc không kẻ thêm đường phụ). Cụ thể ta có các cách tiếp cận sau:

+ **Cách 1**: (kẻ thêm đường phụ – kéo dài AH cắt (C) tại H’): Do đề bài cho A và I → nên ta viết được phương trình đường tròn (C) có tâm I và bán kính R = IA → Khi đó H’ và A là giao điểm giữa AH và (C). Điều đặc biệt là trung điểm HH’ thuộc đường thẳng BC → viết phương trình BC → B và C là giao điểm giữa BC và (C).

+ **Cách 2**: (kẻ thêm đường phụ – kéo dài AI cắt (C) tại A’): tương tự cách 1, ta cũng tìm được tọa độ A’. Ở đây nhận xét BHCA’ là hình bình hành (xem lại bổ đề chương 1) → trung điểm HA’ thuộc đường thẳng BC → viết phương trình đường thẳng BC ⊥ AH → B và C là giao điểm giữa BC và (C).

+ **Cách 3**: (không kẻ thêm đường phụ – theo đáp án của Bộ GD&ĐT). Mời bạn đọc xem lời giải.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Kéo dài AH cắt đường tròn (C) tâm I bán kính IA tại H’.

Dễ dàng chứng minh được góc HCH’ = góc BAH’. Mà góc BAH’ = góc BCH’ (góc nội tiếp cùng chắn một cung) ⇒ góc HCB = góc BCH’

⇒ BC là đường phân giác của góc HCH’ mà BC ⊥ HH’

Nên ΔHCH’ cân tại C ⇒ BC là trung trực của HH’. BC ∩ HH’ = M

⇒ M là trung điểm của HH’

* Đường tròn (C) có tâm I(–2; 0) và bán kính R = IA = $\sqrt{74}$

⇒ $\boxed{(C):(x+2)^2+y^2=74}$

* Đường thẳng AH có phương trình $AH: x-3=0$.

* Ta có H' và A là giao điểm giữa (C) và AH thỏa hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=74\\ x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3, y=-7\\ x=3, y=7\end{array}\right.$$

Do A(3; –7) nên ta nhận H'(3;7).

* Đường thẳng BC có phương trình: $BC: y-3=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm B và C thỏa hệ:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=74\\ y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{65}-2, y=3\\ x=\sqrt{65}-2, y=3\end{array}\right.$$

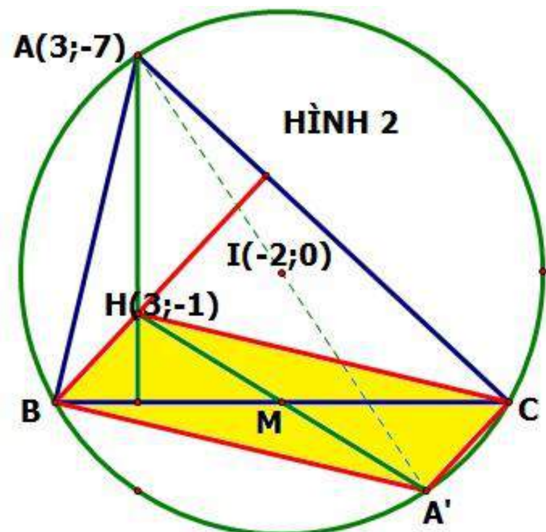
Do C có hoành độ dương nên ta nhận $C(\sqrt{65}-2;3)$

Vậy điểm tọa độ điểm C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(\sqrt{65}-2;3)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Đường tròn (C) có tâm I(–2; 0) và bán kính R = IA = $\sqrt{74}$

$\Rightarrow \boxed{(C):(x+2)^2+y^2=74}$



* Gọi AA' là đường kính.

Ta có $\begin{cases}CA' \perp AC\\ BH \perp AC\end{cases} \Rightarrow CA'//BH$ (1)

và $\begin{cases}BA' \perp AB\\ CH \perp AB\end{cases} \Rightarrow BA'//CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BHCA' là hình bình hành và gọi M là trung điểm BC

⇒ M cũng là trung điểm của HA'

Ta có IM là đường trung bình của tam giác A'AH nên

$$\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \Rightarrow \boxed{M(-2;3)}$$

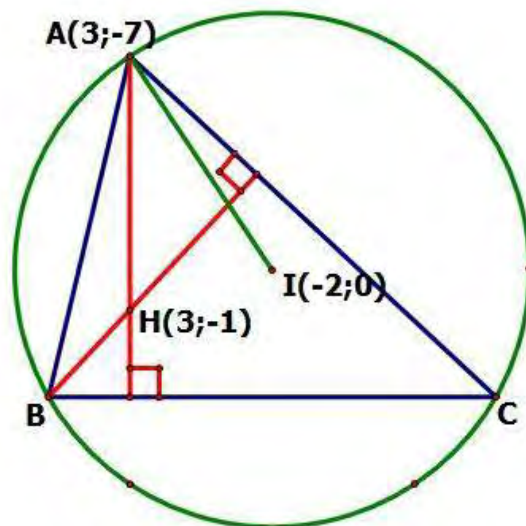
* Phương trình đường thẳng BC qua M và vuông góc AH là y – 3 = 0.

* Tọa độ C thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+2)^2+y^2=74\\ y-3=0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+\sqrt{65}\\ y=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-2+\sqrt{65};3)}$$

Vậy điểm tọa độ điểm C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(\sqrt{65}-2;3)}$

► Hướng dẫn giải cách 3:



* Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình:

$\boxed{(C):(x+2)^2+y^2=74}$

* Phương trình AH: x = 3 và BC ⊥ AH ⇒ BC: y = a ($a\neq -7$) do BC không đi qua A.
* Do đó hoành độ B, C thỏa phương trình: $(x+2)^2+a^2=74$

$\Leftrightarrow x^2+4x+a^2-70=0$ (1)

* Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi $|a|<\sqrt{70}$.
* Do C có hoành độ dương nên ta có:

$$B(-2-\sqrt{74-a^2},a) \text{ và } C(-2+\sqrt{74-a^2},a).$$

* AH ⊥ BC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{74-a^2}-5\right)\left(\sqrt{74-a^2}+5\right)+(a+7)(-1-a)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+4a-21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-7\ (ktm) \\ a=3\ (tm)\end{array}\right.$$

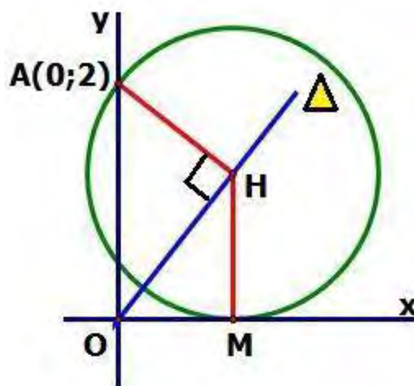
Vậy điểm tọa độ điểm C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(\sqrt{65}-2;3)}$

■ **Lời bình**: Có thể thấy lời giải của Bộ GD&ĐT đậm chất "đại số hóa hình học". Điều này không có gì là không tốt nhưng nó sẽ làm mất đi một phần nào đó ý nghĩa hình học mà bài toán mang lại. Con đường giải quyết bài toán hình học dựa trên công cụ đại số không phát triển về tư duy và óc thẩm mĩ của học sinh mà chỉ đơn giản rèn luyện và phát huy những kỹ năng mạnh của đại số. Với hình học, thì kĩ năng kẻ đường phụ là cực kì quan trọng. Nếu có một nền tảng vững chắc khi bắt đầu học về hình học thì bài toán này không quá khó để chúng ta phải giải quyết. Nhưng làm sao để nghĩ ra việc phải kẻ những đường phụ đó lại là vấn đề cần được quan tâm. Liệu chăng vấn đề dạy và học chỉ là nhồi nhét những kiến thức phục vụ cho kì thi hay phát triển năng lực của học sinh trước việc giải quyết một bài toán ?

CÂU 68 (CHÍNH THỨC – ĐH D2010 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tọa độ điểm A(0; 2) và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Đây có thể coi là một trong những câu Oxy "khó nhất" mà khối D đã từng ra thi. Bài toán này có thể tiếp cận theo nhiều hướng khác nhau như xuất phát điểm là việc tìm toa độ điểm H (tính độ dài, tính góc, đặt ẩn giải hệ) hoặc xuất phát từ việc gọi dạng của đường thẳng Δ (do Δ đã đi qua gốc tọa độ O).



+ **Hướng thứ 1:** (sử dụng khoảng cách) Ở đây ta gọi H(a; b) → 2 ẩn nên chắc chắn cần 2 phương trình → pt (1) đó là AH ⊥ OH, pt (2) đó là AH = d[H;Ox] → giải hệ trên tìm được tọa độ H .

+ **Hướng thứ 2:** (sử dụng kỹ thuật dùng góc) ở đây ta thấy góc HOM = góc HAO → $\sin HOM = \frac{HM}{OH}$ và $\sin HAO = \frac{OH}{AO}$ → $\frac{OH^2}{2} = HM = AH$ kết hợp $AH^2 + OH^2 = OA^2 = 4$ → tính được hết độ dài các cạnh → suy ra tọa độ của điểm H.

+ **Hướng thứ 3:** (gọi dạng hệ số góc k của đường Δ). Ta có thể nhận xét nhanh nếu Δ ≡ Ox hay đường Δ ≡ Oy đều không thỏa mãn → Δ: y = kx → viết phương trình AH ⊥ Δ → tìm tọa độ H = Δ ∩ AH. Cuối cùng là việc sử dụng d[H; Ox] = AH → giải phương trình tìm k → suy ra đường thẳng Δ.

+ **Hướng thứ 4:** (theo đáp án của Bộ GD&ĐT): tương tự như hướng thứ 1, cách giải gọi H(a; b) và thiết lập 2 phương trình 2 ẩn để giải → trong đó H ∈ đường tròn đường kính OA và d[H;Ox] = AH. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi $H(a;b)$ là hình chiếu của A xuống Δ. Ta có $\overrightarrow{AH} = (a;b-2)$, $\overrightarrow{OH} = (a;b)$.

* Do giả thiết ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OH} = 0 \\ AH = d[H;Ox] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b(b-2) = 0 \\ \sqrt{a^2 + (b-2)^2} = |b| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b - b^2 \\ a^2 + (b-2)^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b - b^2 \\ b^2 + 2b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 + \sqrt{5} \Rightarrow a^2 = -8 + 4\sqrt{5}\ (tm) \\ b = -1 - \sqrt{5} \Rightarrow a^2 = -8 - 4\sqrt{5}\ (ktm) \end{array}\right.$$

Do đó: $H\left(\sqrt{4\sqrt{5}-8}; -1+\sqrt{5}\right)$ *hay* $H\left(-\sqrt{4\sqrt{5}-8}; -1+\sqrt{5}\right)$

* Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\left(\sqrt{5}-1\right)x \pm y\sqrt{4\sqrt{5}-8} = 0$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{y = \pm\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}x}$

► Hướng dẫn giải cách 2: Gọi M là hình chiếu của H lên trục hoành.

* Ta có góc HOM = góc HAO nên

$$\sin HOM = \sin HAO \Leftrightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{HM}{OH} \Rightarrow HM = AH = \frac{OH^2}{OA} = \frac{OH^2}{2}$$

* Mặt khác ΔAHO ⊥ H có $AH^2 + OH^2 = OA^2 = 4,\ (AH > 0)$

$$\Leftrightarrow AH^2 + 2AH - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boxed{AH = -1+\sqrt{5}}\ (tm) \\ AH = -1-\sqrt{5}\ (\text{ktm}) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{OH^2 = 2HM = -2 + 2\sqrt{5}}$$

* Lại có ΔOHM ⊥ M

$$\Rightarrow OM^2 = OH^2 - HM^2 = -2 + 2\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5} = -8 + 4\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{OM = \sqrt{-8+4\sqrt{5}}}$$

Do đó: $H\left(\sqrt{4\sqrt{5}-8}; -1+\sqrt{5}\right)$ *hay* $H\left(-\sqrt{4\sqrt{5}-8}; -1+\sqrt{5}\right)$

* Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\left(\sqrt{5}-1\right)x \pm y\sqrt{4\sqrt{5}-8} = 0$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{y = \pm\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}x}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Giả sử Δ ≡ Ox ⇒ H ≡ A: không thỏa mãn AH = d[H; Ox]

* Giả sử Δ ≡ Oy ⇒ H ∈ O: không thỏa mãn AH = d[H; Ox]

* Phương trình đường thẳng Δ có dạng y = kx ($k \neq 0$).

Ta có AH ⊥ Δ và AH qua A ⇒ $\boxed{AH: y = \frac{-1}{k}x + 2}$

* Ta có H = AH ∩ Δ ⇒ Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = kx \\ y = \frac{1}{k}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k}{k^2+1} \\ y = \frac{2k^2}{k^2+1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{2k}{k^2+1}; \frac{2k^2}{k^2+1}\right)}$$

* Mặt khác AH = d[H; Ox]

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2k^2}{k^2+1} - 2\right)^2} = \frac{2k^2}{k^2+1} \Leftrightarrow k^4 - k^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ (tm) \\ k^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ (\text{k}\, tm) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{k = \pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}}$$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{y = \pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}x}$

► **Hướng dẫn giải cách 4: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Gọi tọa độ H là (a; b).

Ta có $AH^2 = a^2 + (b-2)^2$ và $d[H;Ox] = |b| \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 = b^2$ (1)

Mặt khác do H thuộc đường tròn đường kính OA, nên $a^2 + (b-2)^2 = 1$ (2)

* Từ (1), (2), ta có $\begin{cases} a^2 - 4b + 4 = 0 \\ a^2 + b^2 - 2b = 0 \end{cases}$

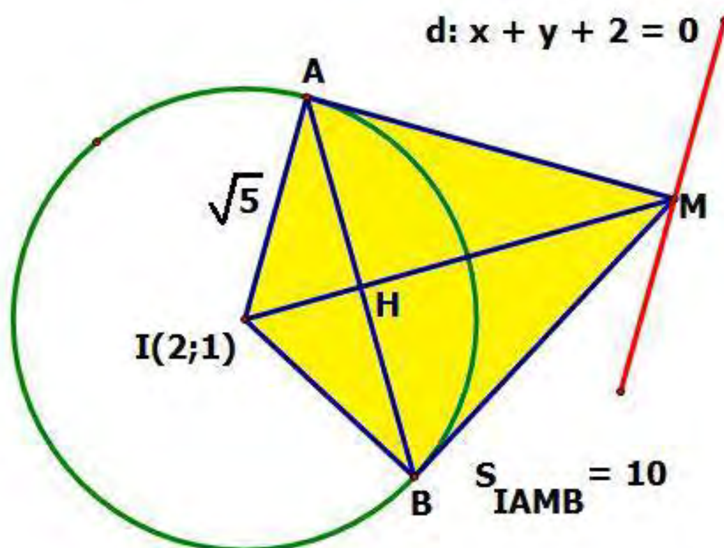
Suy ra $H\left(\sqrt{4\sqrt{5}-8}; -1+\sqrt{5}\right)$ *hay* $H\left(-\sqrt{4\sqrt{5}-8}; -1+\sqrt{5}\right)$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{y = \pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}x}$

CÂU 69 (CHÍNH THỨC – ĐH A2011 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: x + y + 2 = 0 và đường tròn (C):*** $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. ***Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M***

kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Nhận xét: M ∈ d → tham số hóa điểm M theo d → 1 ẩn nên cần 1 phương trình.

_ Phương trình đó chắc chắn ta phải khai thác từ dữ kiện $S_{MAIB} = 10 = 2S_{\Delta IAM}$ $\Rightarrow AM = ? \Rightarrow IM = ?$

_ Lưu ý: Với một số bài toán cho các khối hình tứ giác phức tạp, thậm chí là các hình tứ giác quen thuộc (hình thang, hình bình hành, hình thoi,...) mà ta "bất chợt quên" mất công thức của nó thì cách tốt nhất là "chia" các khối hình đó về "tam giác con". Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có M ∈ d: x + y + 2 = 0 ⇒ $M(m;-2-m)$

* Đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính IA = IB = R = $\sqrt{5}$.

* Tứ giác MAIB có góc MAI = góc MBI = 90° và MA = MB

Suy ra $S_{MAIB} = IA.MA \Rightarrow MA = 2\sqrt{5}$

Mặt khác, ΔIAM ⊥ A có $IM^2 = IA^2 + AM^2 = 25$ (*) với $\overrightarrow{IM} = (m-2;-m-3)$

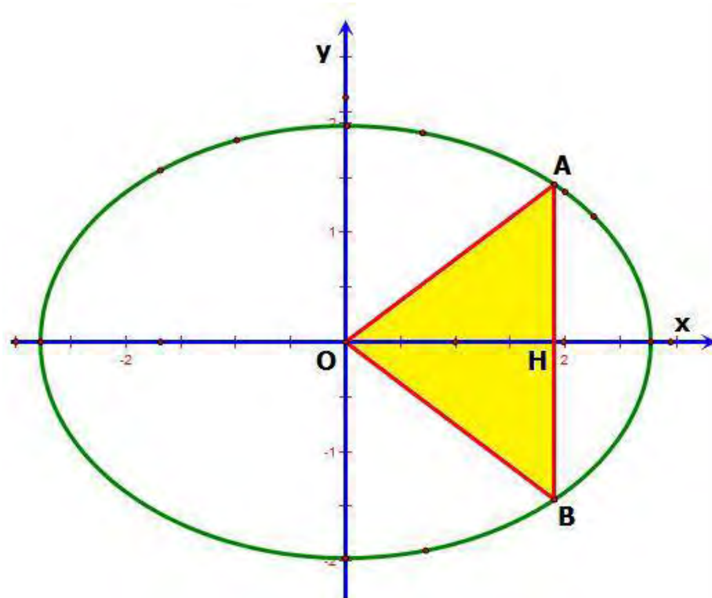
* Do đó (*) $\Leftrightarrow (m-2)^2 + (m+3)^2 = 25 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Vậy ta có $M(2;-4)$ *hay* $M(-3;1)$

Vậy tọa độ điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(2;-4) \text{ hay } M(-3;1)}$

CÂU 70 (CHÍNH THỨC – ĐH A2011 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E):*** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. ***Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Việc xác định tọa độ A và B sao cho ΔOAB có diện tích lớn nhất → ta có thể biểu diễn công thức tính diện tích tam giác theo một ẩn số nào đó ? → sử dụng phương pháp hàm số hoặc vận dụng các bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức hình học để giải. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**

* Do A và B đối xứng qua trục hoành. Ta gọi

$$A\left(a;\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\right)\in(E)\Rightarrow B\left(a;-\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\right)\ (a>0)$$

Suy ra: $AB=|2y|=\sqrt{4-a^2}$

* Gọi H là trung điểm AB thì H(a; 0) và OH ⊥ AB

* Ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}\le\frac{a^2+4-a^2}{4}=1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{4-a^2}\Leftrightarrow a=\sqrt{2}$

Suy ra $A\left(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right),B\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *hay* $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B\left(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

* Chú ý nếu không áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Ta có thể dùng phương pháp khảo sát hàm số để tìm giá trị lớn nhất của $S_{\Delta OAB}$.

Đặt $f(a) = (S_{\Delta OAB})^2 = \frac{1}{4}a^2(4-a^2) = \frac{-1}{4}a^4 + a^2$.

Tập xác định D = (0; + ∞) do a > 0.

Khi đó $f'(a) = -a^3 + 2a$. Xét $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Do a > 0 nên ta nhận $a = \sqrt{2}$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ta có max f(a) = 1 ⇔ $a = \sqrt{2}$

Suy ra $A\left(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *hay* $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

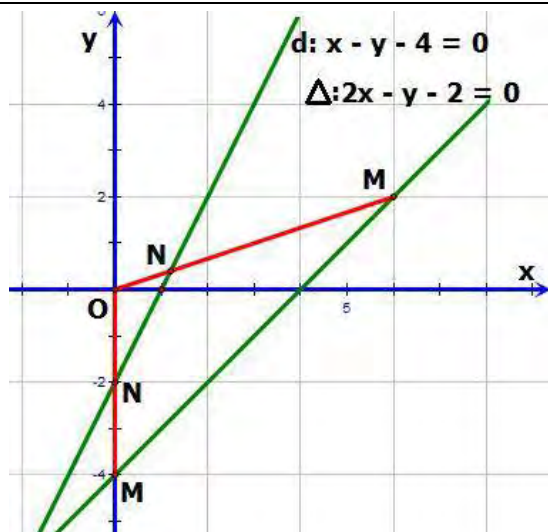
Vậy tọa độ điểm A và B cần tìm là

$$\boxed{A\left(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ hay } A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

CÂU 71 (CHÍNH THỨC – ĐH B2011 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: x – y – 4 = 0 và d: 2x – y – 2 = 0. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn OM.ON = 8.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để xác định tọa độ điểm M và N trong đề bài ta có thể M ∈ Δ, N ∈ d → 2 ẩn nên cần 2 phương trình → pt (1) chính là OM.ON = 8, pt (2) chính là O, M, N thẳng hàng. Tuy nhiên cần chú ý việc giải một phương trình bậc cao đòi hỏi ở người giải những kỹ năng đại số nhất định. Mời bạn đọc cùng xem lời giải.



► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi $M(m;m-4) \in \Delta$ và $N(n;2n-2) \in d$

* Ta có O, M, N thẳng hàng ⇔ $\begin{vmatrix} m & m-4 \\ n & 2n-2 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow m(2n-2)=n(m-4)\Leftrightarrow mn-2m=-4n\Leftrightarrow \boxed{n=\frac{2m}{m+4}}$$

* Do đó $\begin{cases}\overrightarrow{OM}=(m;m-4)\\ \overrightarrow{ON}=\left(\dfrac{2m}{m+4};\dfrac{2(m-4)}{m+4}\right)\end{cases}$

* Mặt khác $OM.ON=8\Leftrightarrow OM^2.ON^2=64$

$$\Leftrightarrow\left[m^2+(m-4)^2\right]\left[\frac{4m^2}{(m+4)^2}+\frac{4(m-4)^2}{(m+4)^2}\right]=64$$

$$\Leftrightarrow(2m^2-8m+16)^2=[4(m+4)]^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m^2-8m+16=4(m+4)\\2m^2-8m+16=-4(m+4)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m^2-12m=0\\2m^2-4m+32=0\,(vn)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\boxed{m=0\ hay\ m=6}$$

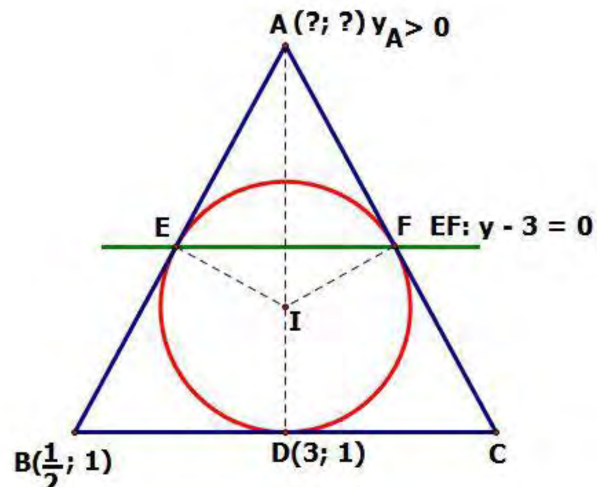
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{M_1(0;-4),\ N_1(0;-2)\ hay\ M_2(6;2),\ N_1\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)}$$

CÂU 72 (CHÍNH THỨC – ĐH B2011 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh*** $B\left(\frac{1}{2};1\right)$***. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho D(3; 1) và đường thẳng EF có phương trình*** $y-3=0$***. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Việc phát hiện một tính chất hình học ẩn sau trong một bài toán là điều rất quan trọng vì nó góp phần cho ta "manh mối" để tìm cho ra câu trả lời mà ta đang muốn tìm. Ở đây theo phản xạ tự nhiên chắc chắn chúng ta sẽ "lập phương trình đường BC. Nhưng trong quá trình lập đó ta phát hiện BC // EF ⇒ điều này



dẫn đến ΔABC là tam giác cân tại A.

_ Mọi chuyện gần như sáng sủa hơn rất hơn nhiều vì khi đó ta có thể → viết phương trình AD ⊥ EF và AD qua D. Đồng thời do tính chất của đường tròn nội tiếp tam giác nên BE = BD → tìm tọa độ điểm E → viết phương trình AB và kết hợp AB ∩ AD → tọa độ điểm A. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* BC qua $B\left(\frac{1}{2};1\right)$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{5}{2};0\right)$ suy ra BC: y – 1 = 0

Mà phương trình EF: y – 3 =0 do đó BC // EF nên **ΔABC cân tại A.**

* Gọi $E(m;3)\in EF$.

Ta có $BD^2=BE^2 \Leftrightarrow \frac{25}{4}=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+4 \Leftrightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy $E_1(2;3)$ hay $E_2(-1;3)$ và do BC // y’Oy nên AD // x’Ox $\Rightarrow x_A=x_D=3$

* AB qua B có vtcp $\overrightarrow{BE_1}=\left(\frac{3}{2};2\right)=\frac{1}{2}(3;4)$.

Phương trình $BE_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}\Leftrightarrow 4x-3y+1=0$

A ∈ AB : $x_A=3\Rightarrow y_A=\frac{13}{3}$ (nhận vì thỏa yêu cầu bài toán)

* AB qua B có vtcp $\overrightarrow{BE_2}=\left(\frac{-3}{2};2\right)=\frac{1}{2}(-3;4)$.

Phương trình $BE_1:\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{4}\Leftrightarrow 4x+3y-5=0$

A ∈ AB : $x_A=3\Rightarrow y_A=\frac{-7}{3}$ (nhận vì thỏa yêu cầu bài toán)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{A\left(3;\frac{13}{3}\right)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* BC qua $B\left(\frac{1}{2};1\right)$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{5}{2};0\right)$ suy ra BC: y – 1 = 0

Mà phương trình EF: y – 3 =0 do đó BC // EF nên **ΔABC cân tại A**

⇒ AD ⊥ BC

Nên $AD: x+m=0$. AD qua D(3; 1) ⇒ m = – 3. Vậy $\boxed{AD: x-3=0}$

* F có tọa độ dạng $F(t;3)$. Ta có: $BD^2 = BF^2 \Leftrightarrow \frac{25}{4} = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right.$

* Với t = –1 ⇒ $F(-1;3)$; suy ra đường BF có phương trình $BF: 4x+3y-5=0$

Khi đó A = BF ∩ AD ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-3=0 \\ 4x+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{-7}{3}\ (ktm) \end{cases}$$ Do A có tung độ dương.

* Với t = 2 ⇒ $F(2;3)$; suy ra đường BF có phương trình $BF: 4x-3y+1=0$

Khi đó A = BF ∩ AD ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ:

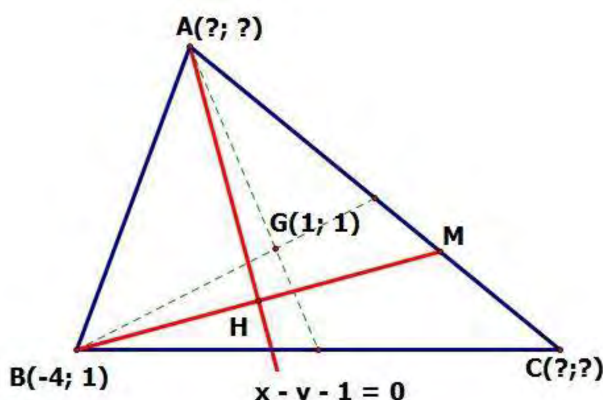
$$\begin{cases} x-3=0 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{13}{3}\ (tm) \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{A\left(3;\frac{13}{3}\right)}$

CÂU 73 (CHÍNH THỨC – ĐH D2011 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(–4; 1), trọng tâm G(1; 1) và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình x – y – 1 = 0. tìm tọa độ các đỉnh A và C.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Giữa hai tọa độ cần tìm là A và C thì tọa độ điểm A có nhiều lợi thế hơn cả do A thuộc phân giác trong kẻ từ A. Và nếu tìm được tọa độ điểm A ta gần như chắc chắn tìm được tọa độ điểm C (thông qua công thức trọng tâm G).



_ Vấn đề đặt ra là tìm tọa độ điểm A như thế nào ? → A ∈ d: x – y – 1 = 0 → viết thêm một phương trình đường thẳng nữa → Ở đây ta chọn AC do AC có trung điểm N thỏa 3BG = 2BN và đồng thời nhờ tính chất "phân giác" nên ta tìm thêm được điểm mới M *(Bạn đọc có thể xem lại dạng toán này ở phần chủ đề 2.1, 2.2 chương 2)*.

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên d: x – y – 1 = 0 và M là điểm đối xứng của B qua phân giác d. (M ∈ AC). Ta có BM ⊥ d: x – y – 1 = 0

$\Rightarrow BM: x+y+m=0$. BM qua B(–4; 1) ⇒ m = 3.

Vậy $BM: x+y+3=0$

* Ta có H = BM ∩ d ⇒ tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-2)$$

Mặt khác H là trung điểm BM nên ta có $\boxed{M(2;-5)}$

* Gọi N là trung điểm AC nên ta có :

$$\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2(x_N - 1) \\ 0 = 2(y_N - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{7}{2} \\ y_N = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N\left(\dfrac{7}{2};1\right)}$$

* AC qua M(2 ;–5) có vtcp $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{3}{2};6\right) = \dfrac{3}{2}(1;4)$ có dạng là

$$AC: \frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{4} \Leftrightarrow 4x-y-13=0$$

Lại có A = AC ∩ d ⇒ tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x-y-13=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(4;3)}$$

Ta có N là trung điểm AC ⇒ $\boxed{C(3;-1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là : $\boxed{A(4;3),\ C(3;-1)}$

CÂU 74 (CHÍNH THỨC – ĐH D2011 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tọa độ điểm A(1; 0) và đường tròn (C):*** $x^2+y^2-2x+4y-5=0$. ***Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.***

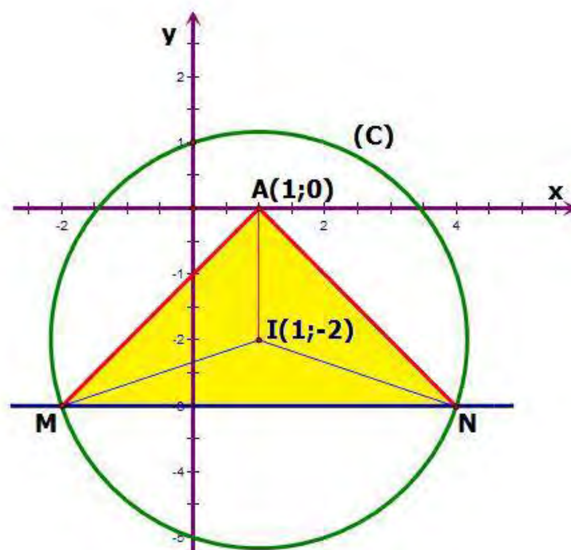
☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Do ΔAMN vuông cân tại A nên ta có AI ⊥ MN ⇒ dạng phương trình của đường MN // Ox. Đến đây ta có 2 hướng tiếp cận:

+ Hướng thứ 1: Đó là vận dụng bài toán cắt giữa đường thẳng và đường tròn tạo thành dây cung với cách thiết lập

$$\left(d[I;MN]\right)^2 + \frac{MN^2}{4} = MA^2 = R^2$$

+ Hướng thứ 2: Đó là thay phương trình đường thẳng y = f(x) vào phương trình đường tròn (C) và biện luận m theo yêu cầu bài toán.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; –2) và bán kính $R = \sqrt{10}$. Vì A và I đều đồng thời cách đều M và N nên MN ⊥ AI và $\overrightarrow{AI} = (0;-2)$ nên phương trình MN có dạng y = t (t ∈ R)

* Ta có $MN = 2d[A;MN] = 2|b|$ và $d[I;MN] = |b+2|$

* Mặt khác $\left(d[I;MN]\right)^2 + \frac{MN^2}{4} = MA^2 = R^2 \Leftrightarrow b^2 + 2b - 3 = 0$

Suy ra **b = 1 hay b = –3.**

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{y = 1 \; hay \; y = -3}$

► **Hướng dẫn giải cách 2: (Theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; –2) và bán kính $R = \sqrt{10}$.

* Ta có IM = IN và AM = AN ⇒ AI ⊥ MN ⇒ Δ có dạng y = m.

* Hoành độ M, N là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2x + m^2 + 4m - 5 = 0 \; (1)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi: $m^2 + 4m - 6 < 0 (*)$.

Khi đó giả sử $M(x_1;m)$ và $N(x_2;m)$

* Ta có $AM \perp AN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 + 1 = 0 \; (2)$

Theo hệ thức Vi–et của phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 + 4m - 5 \end{cases}$

Do đó $(2) \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{y = 1 \ hay \ y = -3}$

■ **Lời bình**: Thoạt nhìn ta cứ tưởng cách giải 1 là ngắn nhưng có thể đã để hở một số điều kiện đó chính là A, M, N không được thẳng hàng. Ở cách giải 2 của Bộ chặt chẽ về mặt điều kiện và dễ dàng tiếp cận hơn với cách giải thiên về hình học của của cách giải 1.

CÂU 75 (CHÍNH THỨC – CĐ 2011 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: x + y + 3 = 0. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(2; –4) và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^o.***

► **Hướng dẫn giải :**

* Phương trình đường thẳng Δ qua A(2; –4) có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)\ (a^2 + b^2 > 0)$ là:

$$\boxed{a(x-2) + b(y+4) = 0}$$

* Đường thẳng d có ve1cto pháp tuyến là $\vec{u} = (1;1)$

Do đó $\cos(d;\Delta) = |\cos(\vec{n};\vec{u})| = \dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$

Theo đề bài ta có $\cos(d;\Delta) = \cos 45^o = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$

* Với a = 0, do $a^2 + b^2 > 0$ nên ta chọn b = 1. Khi đó $\Delta_1 : y + 4 = 0$

* Với b = 0, do $a^2 + b^2 > 0$ nên ta chọn a = 1. Khi đó $\Delta_2 : x - 2 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{\Delta_1 : y + 4 = 0 \ hay \ \Delta_2 : x - 2 = 0}$

CÂU 76 (CHÍNH THỨC – CĐ 2011 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các cạnh là AB: x + 3y – 7 = 0, BC: 4x + 5y – 7 = 0, CA: 3x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.***

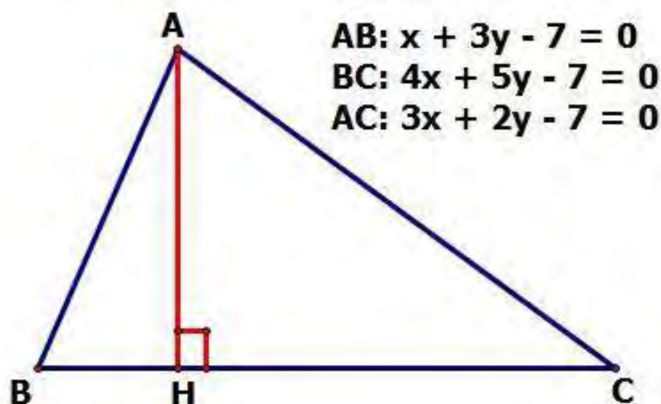
► **Hướng dẫn giải :**

* A = AB ∩ AC

⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y-7=0 \\ 3x+2y-7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;2)}$$



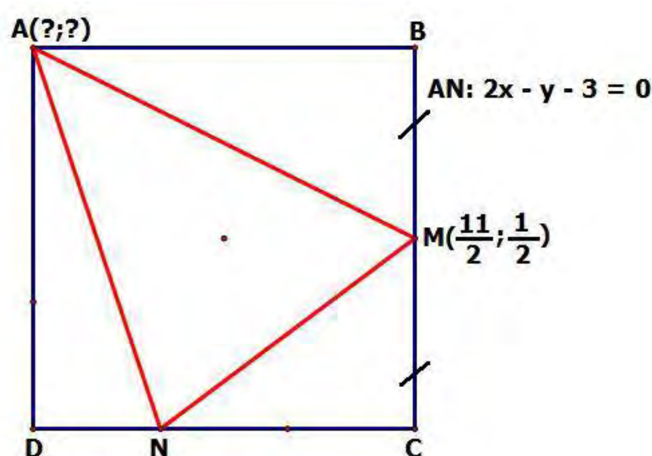
* Gọi d là đường cao kẻ từ A, ta có d ⊥ BC

⇒ d: 5x – 4y + m = 0

Mặt khác d qua A(1; 2) ⇒ m = 3.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{d: 5x-4y+3=0}$

CÂU 77 (CHÍNH THỨC – ĐH A2012 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho*** $CN = 2ND$***. Giả sử tọa độ điểm*** $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ ***và đường thẳng AN có phương trình 2x – y – 3 = 0. Tìm tọa độ điểm A.***



☺**Nhận xét và ý tưởng:**

Một lợi thế cực lớn của bài này đó chính là A ∈ AN → ta có thể tham số tọa độ A theo đường AN. Tuy nhiên việc tìm được phương trình còn lại liên hệ với tham số của A thì không dễ chút nào. Thử liệt kê lại các dữ kiện đã cho trong bài ta có: phương trình AN ? trung điểm M và N ∈ CD sao cho CN = 2ND.

Từ đây ta có thể đề nghị các hướng giải sau:

\+ **Hướng thứ 1**: (xét điểm A trong sự tương giao giữa AM và AN) nghĩa là ta cần tìm véctơ pháp tuyến của AM → gợi lên nhu cầu **tính góc AMN = ?** Do xét thấy ΔAMN không là tam giác đặc biệt nên ta sẽ phải vận dụng định lý hàm số cosin → do vậy ta bắt buộc đặt 1 cạnh của hình vuông là số đo chưa biết (ví dụ AB = a > 0) và tìm cách tính các cạnh AM, MN, NA theo a ?

\+ **Hướng thứ 2**: (liên hệ tọa độ A và M) → nghĩa là ta cần tính độ dài AM =? → Ở đây ta có thể đặt cạnh AB = a > 0 và liên hệ giữa "điểm và đường" tạo nên

khoảng cách, gọi H là hình chiếu của M lên AN → biểu diễn cạnh a theo độ dài MH đó.

+ **Hướng thứ 3**: (sử dụng kỹ thuật kẻ đường phụ – theo đáp án của Bộ GD&ĐT). Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Đặt AB = a > 0

$\Rightarrow ND = \frac{a}{3}, NC = \frac{2a}{3}, MB = MC = \frac{a}{2}$ (vì ABCD là hình vuông)

* Áp dụng định lý Pytago ta có: $\begin{cases} AM^2 = AB^2 + BM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \\ AN^2 = AD^2 + DN^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{10a^2}{9} \\ MN^2 = NC^2 + CM^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = \frac{40a^2}{9} \end{cases}$

* Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác AMN ta có:

$$\cos\angle MAN = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mặt khác, gọi $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1)$ $(a_1^2 + b_1^2 > 0)$ là vtpt của AM và ta có vtpt AN là $\overrightarrow{n_2} = (2; -1)$ nên:

$\cos\angle MAN = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| \Leftrightarrow \frac{|2a_1 - b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 3a_1^2 - 8a_1b_1 - 3b_1^2 = 0$ (*)

* Với $b_1 = 0$ thì (*) $\Rightarrow a_1 = 0$ (không thỏa $a_1^2 + b_1^2 > 0$).

Với $b_1 \neq 0$, ta chọn $b_1 = 3$ thì (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 9 \end{array}\right.$

* **TH1**: với $\overrightarrow{n_1} = (-1; 3)$ ta có phương trình AM qua $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là $x - 3y - 4 = 0$

Lại có A = AM ∩ AN

$\Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1; -1)}$

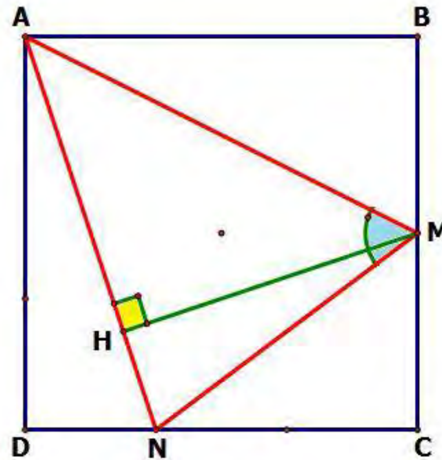
* **TH2**: với $\overrightarrow{n_1}=(3;1)$ ta có phương trình AM qua $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ là $3x+y-17=0$

Lại có A = AM ∩ AN ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+y-17=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(4;5)}$$

Vậy tọa độ điểm A thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-1)\ hay\ A(4;5)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Đặt AB = a > 0 $\Rightarrow ND=\frac{a}{3}, NC=\frac{2a}{3}, MB=MC=\frac{a}{2}$ (vì ABCD là hình vuông)

* Áp dụng định lý Pytago ta có: $\begin{cases}AM^2=AB^2+BM^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\\AN^2=AD^2+DN^2=a^2+\frac{a^2}{9}=\frac{10a^2}{9}\\MN^2=NC^2+CM^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{a^2}{4}=\frac{25a^2}{36}\end{cases}$

* Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác AMN ta có:

$$\cos\angle AMN=\frac{AM^2+MN^2-AN^2}{2AM.MN}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\angle AMN=\sqrt{1-\cos^2\angle AMN}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

* Ta có $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}d[M;AN].AN=\frac{1}{2}AM.MN.\sin\angle AMN$

$$\Leftrightarrow \frac{|11-\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{5}}\frac{a\sqrt{10}}{3} = AM\frac{5a}{6}.\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Suy ra $AM^2 = \frac{45}{2}$ (1).

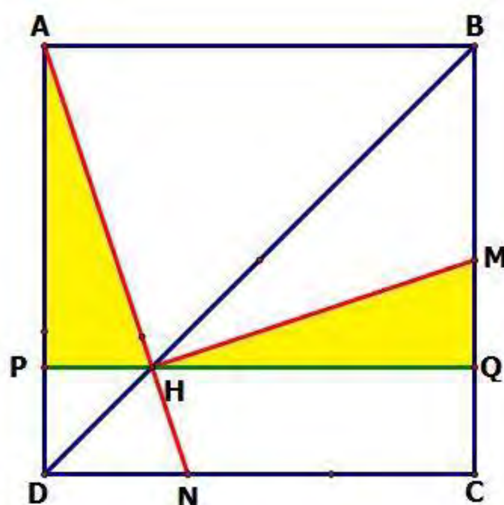
Mặt khác A ∈ AN: 2x – y – 3 = 0 ⇒ A(t; 2t – 3) và $\overrightarrow{MA} = \left(t-\frac{11}{2}; 2t-\frac{7}{2}\right)$

* Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \left(t-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(2t-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow A(1;-1) \\ t=4 \Rightarrow A(4;5)\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm A thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-1)\ hay\ A(4;5)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT – kỹ thuật kẻ đường phụ)**



* **Gọi H là giao điểm của AN và** BD. Kẻ đường thẳng qua H và song song với AB, cắt AD và BC lần lượt tại P và Q. Đặt $HP = x \Rightarrow PD = x, AP = 3x, HQ = 3x$.

* Ta có $CQ = x \Rightarrow MQ = x$. Do đó $\Delta AHP = \Delta HMQ$ suy ra $AH \perp HM$. Mặt khác AH = HM

Suy ra ΔAHM vuông cân tại H ⇒ $AM = \sqrt{2}MH = \sqrt{2}d[M; AN] = \frac{\quad}{2}$

* A(t; 2t – 3) và $\overrightarrow{MA} = \left(t-\frac{11}{2}; 2t-\frac{7}{2}\right)$

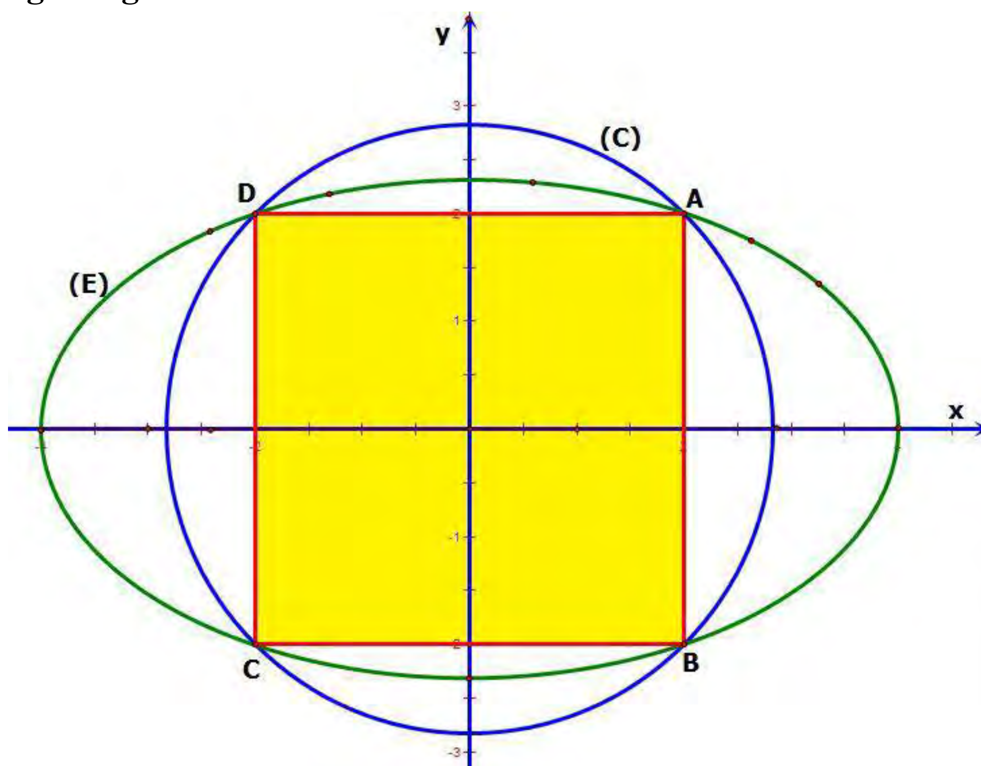
* Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \left(t-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(2t-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow A(1;-1) \\ t=4 \Rightarrow A(4;5)\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm A thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-1)\ hay\ A(4;5)}$

CÂU 78 (CHÍNH THỨC – ĐH A2012 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đương tròn (C):*** $x^2+y^2=8$***. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.***

► Hướng dẫn giải :



* Gọi phương trình chính tắc của (E) có dạng là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với a > b > 0

* Theo đề bài ta có độ dài trục lớn bằng 8 ⇒ 2a = 8 ⇒ a = 4

* Do (E) và (C) cùng nhận Ox và Oy làm trục đối xứng và các giao điểm là các đỉnh của hình vuông nên (E) và (C) có một giao điểm dạng A(t; t) (t > 0).

* A ∈ (C) ⇒ $t^2+t^2=8 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow A(2;2)$

* Mặt khác A ∈ (E) ⇒ $\frac{4}{16}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là $\boxed{(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1}$

CÂU 79 (CHÍNH THỨC – ĐH B2012 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường tròn*** $(C_1): x^2+y^2=4$, $(C_2): x^2+y^2-12x+18=0$ ***và đường thẳng d:*** $x-y-4=0$. ***Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C₂), tiếp xúc với d và cắt (C₁) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d.***

☺ Nhận xét và ý tưởng:

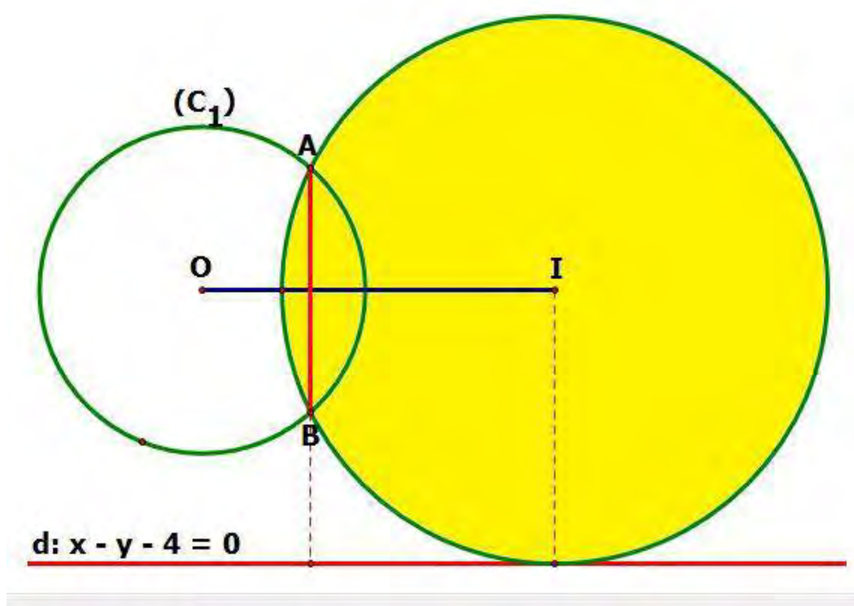
_ Muốn viết phương trình đường tròn ta cần xác định tâm I → tâm IO ∈ → trước đó ta lập phương trình IO đi qua O và vuông góc AB (tính chất đường nối tâm) hay song song với d)

_ Kết hợp với dữ kiện I ∈ (C_2) → giải tìm tọa độ tâm I

_ Đến đây ta chỉ cần xác định bán kính R dựa vào điều kiện tiếp xúc giữa d và (C_1).

► **Hướng dẫn giải:**

* Gọi I là tâm đường tròn (C) cần tìm. Đường tròn (C_1) có tâm O(0; 0).



* Vì $\begin{cases} OI \perp AB \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow OI // d \Rightarrow$ phương trình OI: x – y + m = 0 ($m \neq -4$). Mà OI qua O ⇒ m = 0

Vậy phương trình đường OI là $\boxed{OI: x - y = 0}$

* Mặt khác I ∈ OI ⇒ I(t; t) và đồng thời I ∈ (C_2)

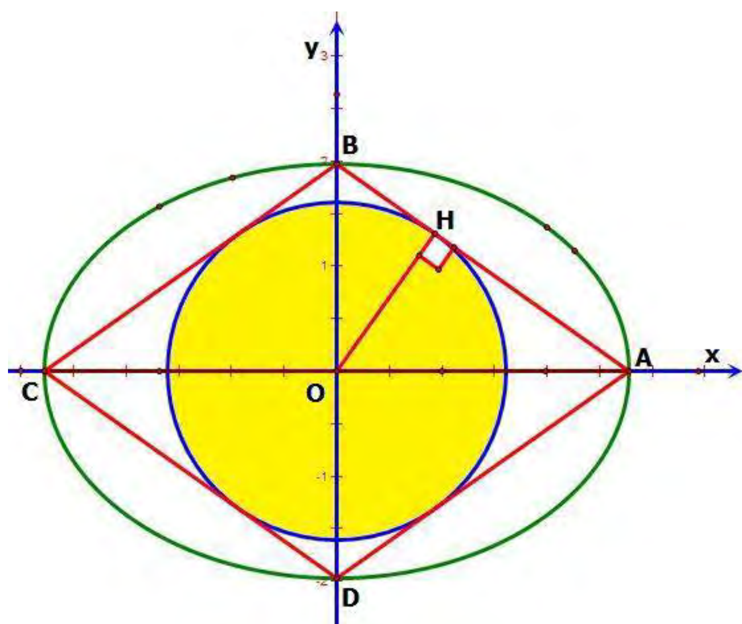
$\Rightarrow t^2 + t^2 - 12t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \boxed{I(3;3)}$

* Do (C) tiếp xúc với d nên ta có $d[I;\text{d}] = \text{R} \Leftrightarrow \dfrac{|3-3-4|}{\sqrt{2}} = R \Leftrightarrow \boxed{R = 2\sqrt{2}}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $\boxed{(C): (x-3)^2 + (y-3)^2 = 8}$

CÂU 80 (CHÍNH THỨC – ĐH B2012 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có AC = 2BD và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình*** $x^2 + y^2 = 4$***. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi biết A thuộc Ox.***

► **Hướng dẫn giải:**



* Gỉa sử phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với a > b > 0

* Hình thoi ABCD có AC = 2BD và A, B, C, D thuộc (E) suy ra OA = 2OB

* Không mất tính tổng quát, ta có thể xem A(a ; 0) và $A(a;0)$, $B\left(0;\frac{a}{2}\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB. Suy ra OH là bán kính đường tròn (C)

* Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}\Rightarrow a^2=20$

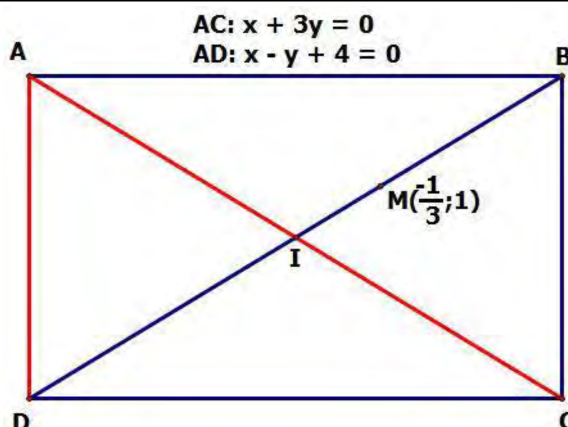
  Do đó $b^2=5$

  Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là $\boxed{(E):\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1}$

CÂU 81 (CHÍNH THỨC – ĐH D2012 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là x + 3y = 0 và x – y + 4 = 0, đường thẳng BD đi qua điểm*** $M\left(\frac{-1}{3};1\right)$. ***Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Đầu tiên, không quá khó để ta tìm tọa độ điểm A vì A = AC ∩ AD → câu hỏi lúc này ta nên tọa độ các điểm cần tìm rồi lập số phương trình tương ứng hay tìm thêm các phương trình đường thẳng mới, điểm mới ? → Điều



này dẫn đến các hướng giải quyết
bài toán như sau:

+ **Hướng thứ 1**: AB qua A và AB ⊥ AD → viết phương trình AB → tham số hóa các điểm B ∈ AB, D ∈ AD → biểu diễn tọa độ tâm I của hình chữ nhật theo tọa độ B và D → I ∈ AC (pt (1)). Mặt khác B, M, D thẳng hàng (pt (2)) → 2 phương trình 2 ẩn giải tìm B và D và suy ra C.

+ **Hướng thứ 2**: Gọi d là đường thẳng qua M và song song với AD, cắt AC tại N → Ta tìm được tọa độ điểm N. Khi đó đường trung trực của MN đi qua tâm I của hình chữ nhật và trung điểm của AD → viết phương trình đường trung trực của MN → tọa độ I và K → tọa độ B và C.

+ **Hướng thứ 3**: Ta có góc |cos(BD;AD)| = |cos(AC;AD)| → viết phương trình đường thẳng BD qua M và khuyết "cây gậy" vecto pháp tuyến → BD ∩ AD = D, BD ∩ AC = I → tọa độ B và C.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có A = AC ∩ AD ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3;1)}$$

* AB ⊥ AD: x – y + 4 = 0 ⇒ AB: x + y + m = 0, AB qua A(–3; 1) ⇒ m = 2.
Vậy $AB: x+y+2=0$.

* Ta có $\begin{cases} B\in AB \\ D\in AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(b;-2-b) \\ D(d;d+4) \end{cases}$. Gọi I là tâm hình chữ nhật

$$\Rightarrow I\left(\frac{b+d}{2};\frac{2-b+d}{2}\right)$$

* Mặt khác I ∈ AC: x + 3y = 0

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2}+3\frac{2-b+d}{2}=0 \Leftrightarrow -2b+4d+6=0 \Leftrightarrow -b+2d=-3 \ (1)$$

* Lại có B, M, D thẳng hàng nên ta có $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{DM}$ cùng phương với

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB}=(b+\frac{1}{3};-3-b) \\ \overrightarrow{MD}=(d+\frac{1}{3};d+3) \end{cases}$$

Nên ta có $\begin{vmatrix} b+\frac{1}{3} & -3-b \\ d+\frac{1}{3} & d+3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left(b+\frac{1}{3}\right)(d+3)+(3+b)\left(d+\frac{1}{3}\right)=0 \ (2)$

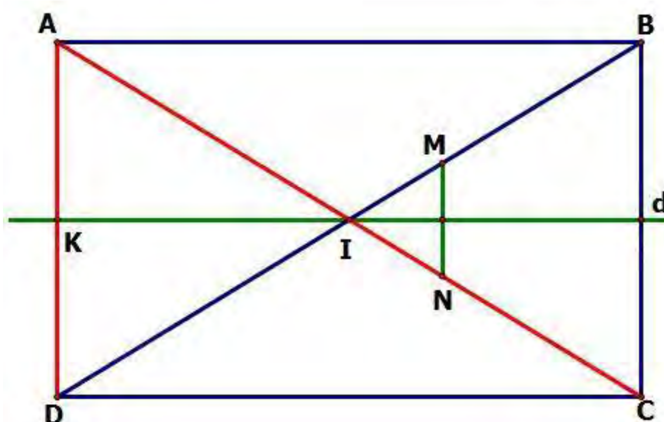
Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) ta được $b=1, d=-1$ suy ra $B(1;-3),\ D(-1;3)$ và I(0;0)

Suy ra tọa độ điểm $C(3;-1)$ (vì I là trung điểm AC)

Vậy tọa độ các điểm của hình chữ nhật ABCD là

$\boxed{A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)}$

► Hướng dẫn giải cách 2: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)



* Ta có A = AC ∩ AD

⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{A(-3;1)}$

* Gọi N là điểm thuộc AC sao cho MN // AD

⇒ MN: $x-y+\dfrac{4}{3}=0$.

Vì N ∈ AC, nên tọa độ của N thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+\dfrac{4}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{N\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)}$$

* Đường trung trực d của MN qua trung điểm của MN và vuông góc với AD nên d: x + y = 0

* Gọi I, K lần lượt giao điểm của d với AC và AD.

Suy ra tọa độ I thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(0;0)}$

Và tọa độ K thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+4=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-2;2)}$

* Do I là trung điểm AC ⇒ C(3; –1), K là trung điểm AD ⇒ D(–1; 3)

Mặt khác I là trung điểm BD ⇒ B(1; –3)

Vậy tọa độ các điểm của hình chữ nhật ABCD là

$\boxed{A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)}$

► Hướng dẫn giải cách 3:

* Ta có A = AC ∩ AD ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3;1)}$

* Gọi $\overrightarrow{n_1}=(a;b), \overrightarrow{n_2}=(1;3), \overrightarrow{n_3}=(1;-1)$ lần lượt là vécto pháp tuyến của đường BD, AC, AD.

  Ta có: $\angle CAD = \angle ADB \Leftrightarrow |\cos\angle CAD| = |\cos\angle ADB|$

  $\Leftrightarrow |\cos(AC;AD)| = |\cos(AD,BD)|$

  Suy ra $|\cos(\overrightarrow{n_2};\overrightarrow{n_3})| = |\cos(\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n_1})| \Leftrightarrow \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1+9}\sqrt{1+1}} = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1+1}}$

  $\Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0\,(*)$

* Với b = 0 thì (*) $\Rightarrow$ a = 0 (không thỏa mãn vì $a^2+b^2>0$)

* Với b $\neq$ 0 thì (*), ta chọn b = 3 nên (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9 \Rightarrow BD: 3x+y=0 \\ a=1 \Rightarrow BD: x+3y-\dfrac{8}{3}=0 \end{array}\right.$

  (loại trường BD: $x+3y-\dfrac{8}{3}=0$ do song song với AC)

* Gọi I là tâm hình chữ nhật ta có I = AC $\cap$ BD

  $\Rightarrow$ I thỏa hệ $\begin{cases} x+3y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(0;0)}$

  Lại có D = BD $\cap$ AD $\Rightarrow$ D thỏa hệ $\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(1;-3)}$

  Do I là trung điểm AC và BD $\Rightarrow$ B(1; –3) và C(3; –1)

  Vậy tọa độ các điểm của hình chữ nhật ABCD là

  $\boxed{A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)}$

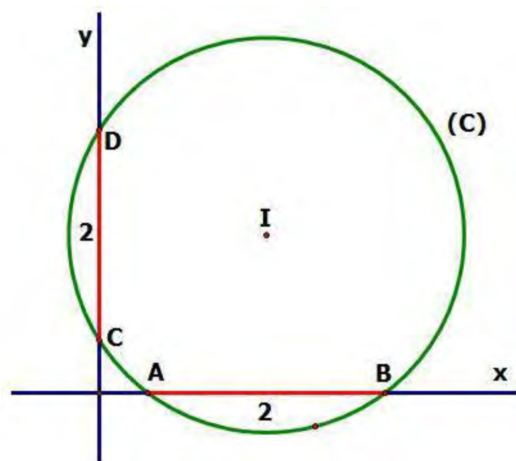
CÂU 82 (CHÍNH THỨC – ĐH D2012 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: 2x – y + 3 = 0. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho AB = CD = 2.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Ta đã có tâm I $\in$ d $\rightarrow$ tham số tâm I theo đường d. Do độ dài AB = CD = 2 nên I cách đều 2 trục tọa độ Ox, Oy $\Rightarrow$ khoảng cách từ I đến 2 trục tọa độ

là bằng nhau → thiết lập phương trình tìm I.

_ Để xác định bán kính của đường tròn ta xét khoảng cách I đến Ox (hoặc Oy) và dùng dấu hiệu "cắt" (pytago) để tính bán kính R. (*Bạn đọc có thể xem hướng dẫn chi tiết ở chương 2, chủ đề 2.3*)



► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi I là tâm đường tròn cần lập.

Do $I \in d: 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow I(t; 2t+3)\ (t \in R)$

* Ta có AB = CD ⇒ I cách đều hai trục tọa độ

$$\Rightarrow d[I;Ox] = d[I;Oy] \Leftrightarrow |2t+3| = |t| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \Rightarrow I(-3;-3) \\ t = -1 \Rightarrow I(-1;1) \end{array}\right.$$

* Với $I(-3;-3)$. Ta có $R_1^2 = \dfrac{AB^2}{4} + \left(d[I;Ox]\right)^2 = 10$.

Nên $(C_1): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$

* Với $I(-1;1)$. Ta có $R_2^2 = \dfrac{AB^2}{4} + \left(d[I;Ox]\right)^2 = 2$.

Nên $(C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

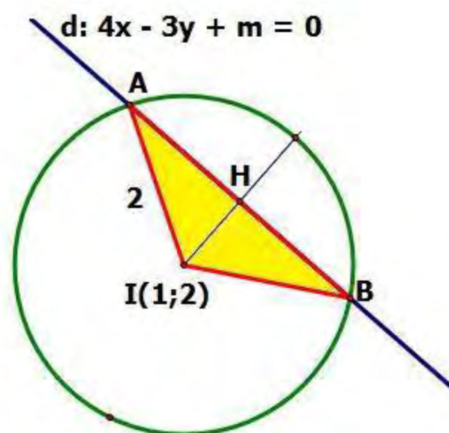
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là :

$$\boxed{(C_1): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10\ hay\ (C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2}$$

CÂU 83 (CHÍNH THỨC – CĐ 2012 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):*** $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ***và đường thẳng d: 4x – 3y + m = 0. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho góc AIB bằng 120°, với I là tâm của (C).***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Bài toán yêu cầu định m nhưng thực chất lại yêu cầu ta viết phương trình đường thẳng. Ở đây 1 vấn đề đặt ra là "điều kiện để đường thẳng cắt đường tròn ?" trước khi ta xét đến góc AIB = 120° → Ở đây khoảng cách từ tâm I đến đường d đóng vai trò quyết định đến việc giải bài toán.



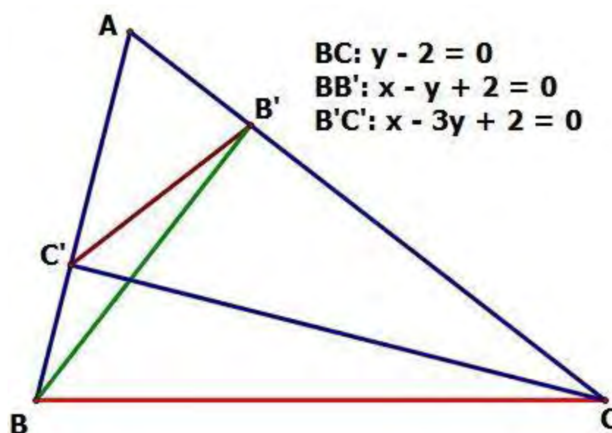
_ Cụ thể, nếu ta gọi H là trung điểm AB, theo định lý đường kính và dây cung ta có IH ⊥ AB
⇒ IH chính là khoảng cách từ I đến đường thẳng d → việc tính độ dài IH không quá khó (xin dành cho bạn đọc).

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính R = 2
* Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d ⇒ H là trung điểm AB.
* Ta có góc AIB = 120º ⇒ góc AIH = 60º ⇒ $\cos 60^o = \dfrac{IH}{R} \Rightarrow IH = 1$
* Mặt khác $IH = d[I;d] \Leftrightarrow 1 = \dfrac{|4-6+m|}{5} \Leftrightarrow |m-2| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{m=7 \ hay \ m=-3}$

CÂU 84 (CHÍNH THỨC – CĐ 2012 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, các đường thẳng BC, BB', B'C' lần lượt có phương trình là y – 2 = 0, x – y + 2 = 0, x – 3y + 2 = 0 với B', C' tương ứng là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC.***



☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Trước khi ta lập phương trình AB và AC thì ta cần đặt câu hỏi " có thể tìm thêm điểm mới ? phương trình đường thẳng mới nào không ? "
→ B = BC ∩ BB', B' = BB' ∩ B'C'.

_ Đến đây dễ dàng viết phương trình AC thỏa: AC ⊥ BB' và AC qua B'
→ C = AC ∩ BC.

_ Để viết phương trình AB ta có thể tìm thêm tọa độ một điểm nữa ? → điểm A hoặc điểm C'.
Ở đây ta thấy việc tìm điểm C' dễ dàng hơn vì C'∈ B'C' và CC' ⊥ BC'.
Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**

* Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y-2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(0;2)}$

* Tọa độ B' là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B'(-2;0)}$

* Đương thẳng AC qua B' và vuông góc BB' nên AC có phương trình

$\boxed{AC: x+y+2=0}$

* Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-4;2)}$

* C ∈ B'C' $\Rightarrow C(3c-2;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CC'}=(3c+2;c-2) \\ \overrightarrow{BC'}=(3c-2;c-2) \end{cases}$.

Mặt khác $CC' \perp BC' \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{BC'}=0 \Leftrightarrow (3c+2)(3c-2)+(c-2)^2=0$

$\Leftrightarrow 10c^2-4c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

Do đó $C'\left(\dfrac{-4}{5};\dfrac{2}{5}\right)$ *hay* $C'(-2;0)$

* Với $C'\left(\dfrac{-4}{5};\dfrac{2}{5}\right)$, ta có phương trình AB qua B và A' nên $\boxed{AB: 2x-y+2=0}$

* Với $C'(-2;0)$, ta có phương trình AB qua B và A' nên $\boxed{AB: x-y+2=0}$

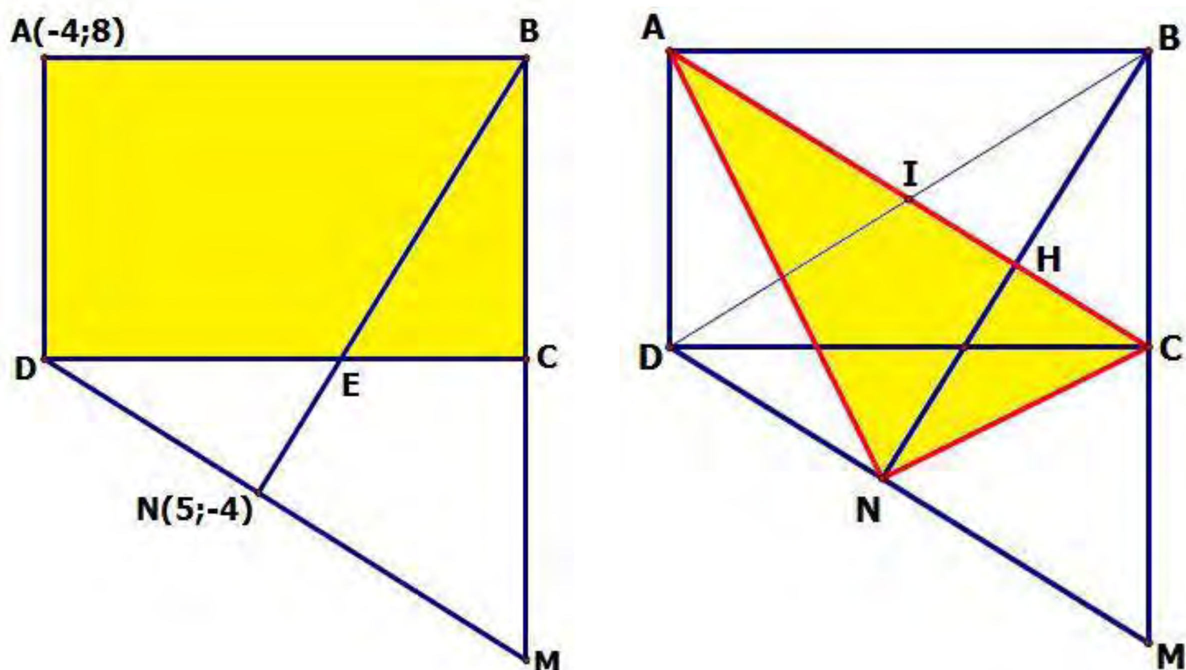
Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\boxed{\begin{cases} AC: x+y+2=0 \\ AB: 2x-y+2=0 \end{cases} hay \begin{cases} AC: x+y+2=0 \\ AB: x-y+2=0 \end{cases}}$$

■ **Lời bình**: Đây là một câu hỏi Oxy tương đối khó có tính phân loại tốt với một đề thi Cao Đẳng, so với các đề thi trước đó thì nhìn chung đây được xem là đề thi Cao Đẳng hay.

CÂU 85 (CHÍNH THỨC – ĐH A2013 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng d: 2x + y + 5 = 0 và A(–4; 8). Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng tọa độ điểm N(5; –4).***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**



_ Bài toán này có rất nhiều hướng để tiếp cận. Một trong những hướng khả thi có thể kể đến:

+ **Hướng thứ 1**: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT): tham số hóa C ∈ d và gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD → biểu diễn tọa độ I theo tọa độ C. Lại có IA = IN (do ΔBDN ⊥ N có BD là cạnh huyền) → giải phương trình tìm được tọa độ C → viết phương trình AC. Mặt khác BN ⊥ AC (do ACMD là hình bình hành) → viết phương trình BN. Dễ dàng chứng minh được H = BN ∩ AC chính là trung điểm BN → việc tìm tọa độ B thông qua tìm tọa độ H.

+ **Hướng thứ 2**: (phát hiện AN ⊥ NC → tìm cách chứng minh) → do ACMD là hình bình hành ⇒ AC // DM (AC ∩ BN = H , C là trung điểm BM) → H là trung điểm BN ⇒ ΔCAN ⊥ N (do ΔCAN = ΔABC) → ta viết phương trình NC → NC ∩ d = C → tọa độ C → việc tìm tọa độ B ta có thể làm khác đi một chút bằng cách xét B trong sự tương giao của BN và đường tròn tâm I bán kính IA.

► **Hướng dẫn giải cách 1: (Theo đáp án Bộ GD&ĐT)**

* Do C ∈ d $\Rightarrow C(t;-2t-5)$. Gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD

⇒ I là trung điểm AC

Vậy $I\left(\frac{t-4}{2};\frac{-2t+3}{2}\right)$

* ΔBDN ⊥ N nên IN = IB, lại co IB = IA ⇒ IN = IA. Do đó ta có phương trình:

$$\left(5-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(-4-\frac{-2t+3}{2}\right)^2=\left(-4-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(8-\frac{-2t+3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \boxed{C(1;-7)}$$

* Do M đối xứng với B qua C nên CM = CB mà CB = AD và CM // AD nên ACMD là hình bình hành suy ra AC // DM. Theo giả thiết BN ⊥ DM
⇒ BN ⊥ AC và CB = CN, vậy B là điểm đối xứng của N qua AC.

* Đường thẳng AC qua 2 điểm A và C có phương trình: $AC: 3x + y + 4 = 0$

* Đường thẳng BN qua N và vuông góc với AC nên có phương trình:
$BN: x - 3y - 17 = 0$.

Do đó $B(3b+17;b)$. Trung điểm BN thuộc AC nên:

$$2\left(\frac{3b+17+5}{2}\right) + \frac{b-4}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow b = -7 \Rightarrow \boxed{B(-4;-7)}$$

Vậy tọa độ điểm B và C cần tìm là: $\boxed{B(-4;-7),\ C(1;-7)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi H, I lần lượt giao điểm giữa BN và DM, AC và BD.
Tứ giác ACMD là hình bình hành do (CM = AD và CM // AD) ⇒ AC // DM
Mặt khác C là trung điểm BM ⇒ H là trung điểm BN
Lại có BN ⊥ DM ⇒ BN ⊥ AC. Do đó ΔANC ⊥ N ⇒ AN ⊥ NC

* CN qua N(5; –4) nhận $\overrightarrow{AN} = (9;-12) = 3(3;-4)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là:

$$3(x-5) - 4(y+4) = 0 \Leftrightarrow NC: 3x - 4y - 31 = 0$$

Mặt khác, C = NC ∩ d ⇒ Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y + 44 = 0 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(1;-7)}$$

* Suy ra tâm $I\left(\frac{-3}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $IA^2 = \frac{125}{2}$ ⇒ Đường tròn (C) có tâm I bán kính IA là:

$$(C): \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}$$

* Ta có BN ⊥ AC nên BN qua N(5;–4) nhận $\overrightarrow{AC} = (5;-15) = 5(1;-3)$ làm vtpt có dạng là: $1(x-5) - 3(y+4) = 0 \Leftrightarrow BN: x - 3y - 17 = 0$

Ta có B là giao điểm của đường BN và đường tròn (C) thỏa hệ :

$$\begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{2} \\ x - 3y - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3y + \frac{37}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{2} \\ x = 3y + 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -4 \Rightarrow x = 5 \\ y = -7 \Rightarrow x = -4 \end{array}\right.$$

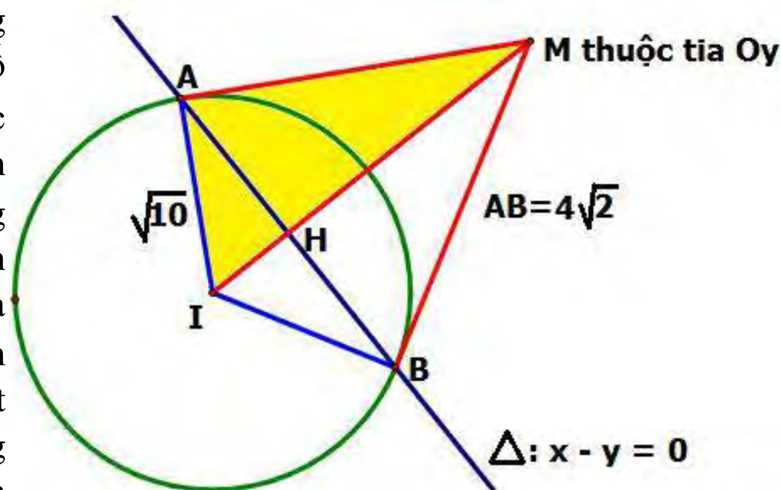
Nên ta được $\boxed{B(-4;-7)}$ (loại $B(5;-4)$ vì trùng N)

Vậy tọa độ điểm B và C cần tìm là: $\boxed{B(-4;-7),\ C(1;-7)}$

CÂU 86 (CHÍNH THỨC – ĐH A2013 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: x – y = 0. Đường tròn (C) có bán kính R =*** $\sqrt{10}$ ***cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho AB =*** $4\sqrt{2}$***, tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để lập phương trình đường tròn (C) khi đã cho yếu tố bán kính R = $\sqrt{10}$ thì việc còn lại của ta là xác định tâm I(a; b) ? → Một trong những đường thẳng quan trọng chứa tâm I chính là đường IM → Do tính chất hình học của một điểm nằm ngoài đường tròn tạo 2 tiếp tuyến đến đường tròn thì IM ⊥ d



→ như vậy việc quan trọng nhất chính là xác định tọa độ điểm M ?

_ Đề bài đã gợi mở cho ta M ∈ tia Oy (cần lưu ý tia Oy chứ không phải trục tung, rất nhiều em học sinh đã bị nhầm lẫn ở điểm này) → tham số hóa điểm M theo tia Oy → 1 ẩn nên cần 1 phương trình ? → vậy ta liên hệ M với những dữ kiện nào ? → đó chính là đường thẳng d → đều này gợi cho ta việc tính khoảng cách từ M đến d cụ thể chính là đoạn MH (đây là lúc các dữ kiện độ dài bắt đầu phát huy).

_ Ta có rất nhiều cách để tính đoạn HM như:

+ Tính $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} \rightarrow IH.IM = IA^2 \Rightarrow IM = ?$

$\rightarrow HM = IM - IH$

+ Hay $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{IA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AM = ? \rightarrow HM = \sqrt{AM^2 - AH^2}$

_ Sau khi tìm được tọa độ điểm M → viết phương trình IM. Đến đây ta có thể tìm I theo 2 hướng.

+ **Hướng thứ 1:** tham số I theo IM → 1 ẩn cần 1 phương trình → độ dài IM

+ **Hướng thứ 2:** chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức vecto → dựa trên tỉ lệ độ dài IH và IM → điều này có nghĩa là ta phải tìm tọa độ điểm H = IM ∩ BA → tìm tọa độ I. (Ở đây đáp án của Bộ GD&ĐT đã đi theo hướng này).

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi I là tâm đường tròn cần tìm.
* Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C), H là giao điểm của AB và IM.
  Ta có M ∈ tia Oy ⇒ $M(0;m)\ (m>0)$ và H là trung điểm AB

$$\Rightarrow AH=\frac{AB}{2}=2\sqrt{2}$$

* $\Delta AMI\perp A\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AM^2}\Rightarrow \boxed{AM=2\sqrt{10}}$

  Do đó $HM=\sqrt{AM^2-AH^2}=4\sqrt{2}$

  Mặt khác $MH=d[M;\Delta]\Leftrightarrow 4\sqrt{2}=\frac{|m|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m=8$. Do đó $\boxed{M(0;8)}$

* Đường thẳng IM ⊥ Δ: x – y = 0 ⇒ IM: x + y + c = 0.
  IM qua M(0; 8) ⇒ c = – 8.
  Vậy IM: x + y – 8 = 0.
  Lại co H = IM ∩ AB

  $$\Rightarrow \text{Tọa độ H thỏa hệ } \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-8=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}\Rightarrow \boxed{H(4;4)}$$

* Ta có $IH=\sqrt{IA^2-HA^2}=\sqrt{2}=\frac{IM}{4}\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}\Rightarrow I(5;3)$

  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\boxed{(C):(x-5)^2+(y-3)^2=10}$

CÂU 87 (CHÍNH THỨC – ĐH B2013 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và AD = 3BC. Đường thẳng BD: x + 2y – 6 = 0 và tam giác ABD có trực tâm H(–3 ; 2). Tìm tọa độ các đỉnh C và D.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Nếu không chú ý cách vẽ hình thì một số bạn cũng sẽ gặp rất nhiều lúng túng khi vẽ (Cách tốt nhất là ta nên dựng 2 đường chéo BD và AC vuông góc nhau trước rồi mới kẻ 2 đường BC và AD song song thỏa mãn AD = 3BC).

_ Đề bài cho chúng ta 3 dữ kiện quan trọng gồm có (ABCD là hình thang cân (AD = 3BC), AC ⊥ BD (BD: x + 2y – 6 = 0), tọa độ trực tâm H(–3;2) → tìm tọa độ điểm C và D.

_ Ở đây ta dễ dàng viết được phương trình đường AC (do AC qua trực tâm H)

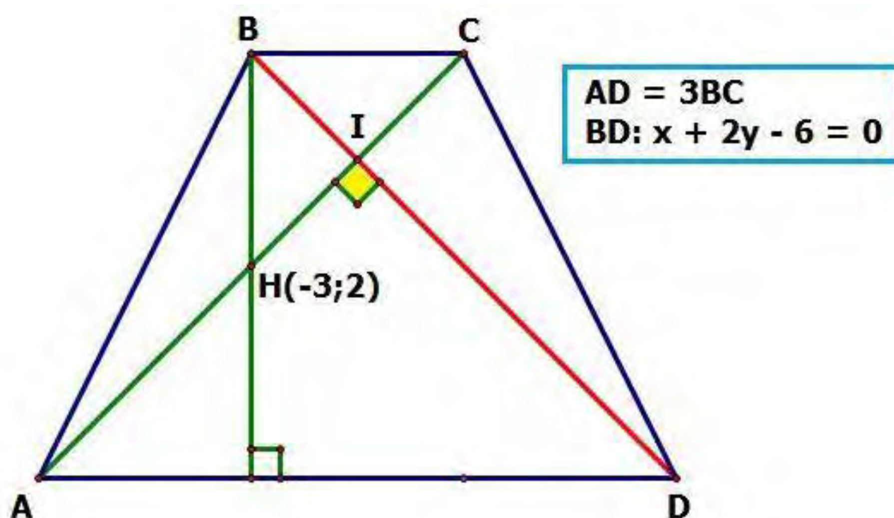
→ AC ∩ BD = I. Do 2 đường chéo vuông góc ⇒ I là trung điểm HC → tọa độ điểm C.

_ Để tìm tọa độ điểm D ta có thể đi theo nhiều hướng khác nhau như:

+ **Hướng thứ 1**: (lập thêm phương trình 1 đường thẳng chứa D để tương giao với BD) → đó có thể là đường AD hoặc đường HD → trong tình huống này ta phải tìm thêm tọa độ của điểm A → và viết phương trình đường thẳng AD qua 1 điểm tạo góc 45° với BD.

+ **Hướng thứ 2**: Tìm tọa độ điểm B (do nhận xét ID = 3IB theo định lý Thales thuận) → ta có thể tìm B bằng cách viết phương trình đường tròn đường kính HC giao với đường BD → tọa độ B → tọa độ D.

+ **Hướng thứ 3**: Đó là liên hệ D với toa độ I và C → sử dụng độ dài do đã biết được quan hệ tỉ lệ giữa các cạnh. (đáp án của Bộ GD&ĐT).



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có AC ⊥ BD: x + 2y – 6 = 0 ⇒ AC: 2x – y + m = 0, AC qua H(–3; 2) ⇒ m = 8.

Vậy $\boxed{AC: 2x - y + 8 = 0}$.

Gọi I = AC ∩ BD

⇒ Tọa độ I thỏa hệ $\begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(-2;4)}$

* Ta BD ⊥ AC ⇒ ΔIBC vuông cân tại I , lại có BH ⊥ BC ⇒ ΔBHC vuông cân tại B ⇒ I là trung điểm HC. Do đó ta có $\boxed{C(-1;6)}$

* Theo định lý Thales thuận ta có:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{ID}{IB} = \frac{IA}{IC} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 2 = 3.(-1) \\ y_A - 4 = 3.(-2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-5;-2)}$$

* Đường thẳng AD qua A(–5;–2) có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (a;b)$ $(a^2 + b^2 > 0)$ có dạng là:

$AD: a(x+5)+b(y+2)=0$ và $\overrightarrow{n_2}=(1;2)$ là vtpt của BD

Mặt khác: $\cos\angle ADB=\cos(AD;BD)=|\cos(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})|=\dfrac{|a+2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Suy ra $2(a+2b)^2=5(a^2+b^2)\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0$ (*) (nhận xét $b\neq 0$ nên ta chọn b = 3)

Khi đó (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=9\Rightarrow AD: 3x+y+17=0 \\ a=-1\Rightarrow AD: -x+3y+1=0\end{array}\right.$

* Với AD: 3x + y + 17 = 0, ta có tọa độ D thỏa hệ

$$\begin{cases}3x+y+17=0\\ x+2y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8\\ y=7\end{cases}\Rightarrow \boxed{D(-8;7)}$$

* Với AD: – x + 3y + 1 = 0, ta có tọa độ D thỏa hệ

$$\begin{cases}-x+3y+1=0\\ x+2y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}\Rightarrow \boxed{D(4;1)}$$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $\boxed{C(-1;6),\ D(4;1)\ hay\ C(-1;6),\ D(-8;7)}$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Ta có AC ⊥ BD: x + 2y – 6 = 0 ⇒ AC: 2x – y + m = 0, AC qua H(–3; 2) ⇒ m = 8.

  Vậy $\boxed{AC: 2x-y+8=0}$.

  Gọi I = AC ∩ BD ⇒ Tọa độ I thỏa hệ

$$\begin{cases}2x-y+8=0\\ x+2y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}\Rightarrow \boxed{I(-2;4)}$$

* Ta BD ⊥ AC ⇒ ΔIBC vuông cân tại I , lại có BH ⊥ BC ⇒ ΔBHC vuông cân tại B ⇒ I là trung điểm HC. Do đó ta có $\boxed{C(-1;6)}$

* Đường tròn (C) có tâm I(–2; 4) và bán kính $R=IC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ có dạng là: $(C): (x+2)^2+(y-4)^2=5$

* Ta có B là tọa độ giao điểm giữa (C) và BD nên thỏa hệ:

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-4)^2=5\\ x+2y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=5\Rightarrow x=-4\\ y=3\Rightarrow x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(-4;5)\\ B(0;3)\end{array}\right.$$

* Theo định lý Thales thuận ta có: $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{ID}{IB}=\dfrac{IA}{IC}=3\Rightarrow\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{BI}$ (*)

Với B(–4; 5), ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = 3.(2) \\ y_D - 4 = 3.(-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(4;1)}$

Với B(0; 3), ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = 3.(-2) \\ y_D - 4 = 3.(1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-8;7)}$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $\boxed{C(-1;6),\ D(4;1)\ hay\ C(-1;6),\ D(-8;7)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3: (Theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Gọi I = AC ∩ BD ⇒ IB = IC, mà IB ⊥ IC nên ΔIBC vuông cân tại I

$\Rightarrow \angle ICB = 45^0$

Lại có BH ⊥ AD ⇒ BH ⊥ BC ⇒ ΔHBC vuông cân tại B ⇒ I là trung điểm HC

* Do HC ⊥ BD và trung điểm I của HC thuộc BD nên tọa độ C thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 2(x+3)-(y-2)=0 \\ \dfrac{x-3}{2}+2\left(\dfrac{y+2}{2}\right)-6=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-6;1)}$$

* Theo định lý Thales thuận ta có: $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{ID}{IB}=\dfrac{IA}{IC}=3 \Rightarrow ID=3IC$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{IC^2+ID^2}=IC\sqrt{10}=\frac{HC\sqrt{10}}{2}=5\sqrt{2}$$

* Ta có D ∈ BD: x + 2y – 6 = 0

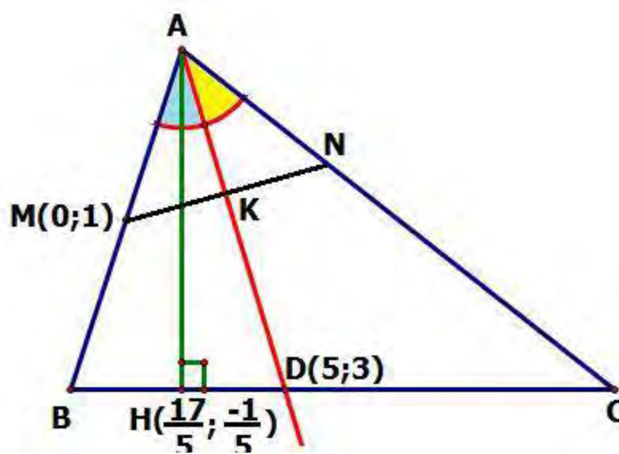
$\Rightarrow D(6-2t;t)$ và $CD=5\sqrt{2} \Rightarrow (7-2t)^2+(t-6)^2=50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=7 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $\boxed{C(-1;6),\ D(4;1)\ hay\ C(-1;6),\ D(-8;7)}$

CÂU 88 (CHÍNH THỨC – ĐH B2013 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là*** $H\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{-1}{5}\right)$***, chân đường phân giác trong của góc A là D(5;3) và trung điểm của cạnh AB là M(0; 1). Tìm tọa độ đỉnh C.***

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**

_ Để bài cho ta tọa độ của 3 điểm H, D, M và chúng đều là tọa độ của những điểm đặc biệt trong tam giác → vậy ta khai thác như thế nào tọa độ các điểm đó ?



+ Kết hợp H và D → viết phương trình BC (dùng để về sau tham số hóa C theo BC hoặc tìm thêm phương trình 1 đường thẳng nữa để tương giao).

+ Kết hợp H và D → viết phương trình AH (dùng để tham số hóa điểm A)

+ Sử dụng M là trung điểm AB → giải tìm tọa độ A và B (A ∈ AH, B ∈ BC)

_ Sau khi đã có tọa độ A → viết phương trình phân giác AD (sử dụng tính chất của phân giác) → tìm điểm mới N (mời bạn đọc xem lại phần này ở chương 2, chủ đề 2.1, 2.2) → viết phương trình AC → AC ∩ BC = C.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có đường BC qua D(5; 3) nhận $\overrightarrow{HD}=\left(\frac{8}{5};\frac{16}{5}\right)=\frac{8}{5}(1;2)$ làm vecto chỉ phương có dạng $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{2}\Leftrightarrow \boxed{BC:2x-y-7=0}$

* Ta có đường AH qua $H\left(\frac{17}{5};\frac{-1}{5}\right)$ nhận $\overrightarrow{HD}=\left(\frac{8}{5};\frac{16}{5}\right)=\frac{8}{5}(1;2)$ làm vecto pháp tuyến có dạng: $1\left(x-\frac{17}{5}\right)+2\left(y+\frac{1}{5}\right)=0\Leftrightarrow \boxed{AH:x+2y-3=0}$

* Ta có $\begin{cases}A\in AH\\ B\in BC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(3-2a;a)\\ B(b;2b-7)\end{cases}$.

Lại có M là trung điểm AB nên ta được: $\begin{cases}3-2a+b=2.(0)\\ a+2b-7=2.(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(-3;3)}$

* Đường AD qua A(–3; 3) nhận $\overrightarrow{AD}=(8;0)=8(1;0)$ làm vecto chỉ phương có dạng: $\boxed{AD:\text{y}-3=0}$

* Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên AD và N là điểm đối xứng của M qua AD (N ∈ AC)

Ta có MN ⊥ AD ⇒ MN: x = 0 ⇒ K = MN ∩ AD ⇒ K(0; 3) là trung điểm MN ⇒ N(0; 5)

* AC qua A(–3; 3) và nhận $\overrightarrow{AN}=(3;2)$ làm vecto chỉ phương có dạng :

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-3}{2}\Leftrightarrow\boxed{AC:2x-3y+15=0}$$

* Ta có C = AC ∩ BC ⇒ Tọa độ C thỏa hệ

$$\begin{cases}2x-3y+15=0\\ 2x-y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ y=11\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(9;11)}$$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là $\boxed{C(9;11)}$

► Hướng dẫn giải cách 2: (Theo Bộ GD&ĐT)

* Ta có H ∈ AH và AH ⊥ HD nên AH: x + 2y – 3 = 0. Do đó A(3 – 2a ; a)
* Do M là trung điểm AB nên MA = MH

$$\Rightarrow (3-2a)^2+(a-1)^2=13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=3\ (n)\\ a=\dfrac{-1}{5}\ (l)\end{array}\right.$$

Do A khác H nên ta nhận $\boxed{A(-3;3)}$

* Phương trình AD là y – 3 = 0. Gọi N là điểm đối xứng của M qua AD

$\Rightarrow$ N ∈ AC và tọa độ N thỏa: $\begin{cases}\dfrac{1+y}{2}-3=0\\ 1.x+0.(y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases} \Rightarrow \boxed{N(0;5)}$

* Đường thẳng AC có phương trình: 2x – 3y + 15 = 0

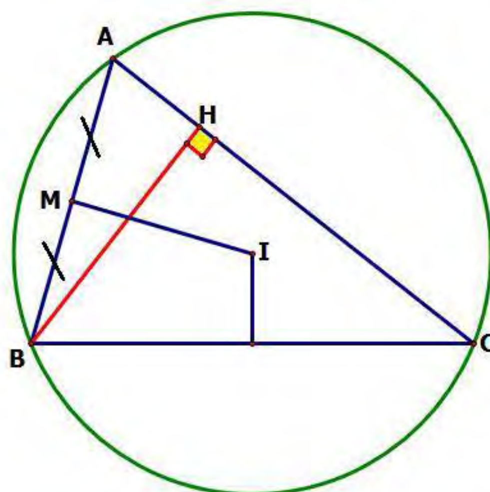
BC có phương trình 2x – y – 7 = 0.

* Ta có C = AC ∩ BC

$\Rightarrow$ Tọa độ C thỏa hệ $\begin{cases}2x-3y+15=0\\ 2x-y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ y=11\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(9;11)}$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là $\boxed{C(9;11)}$

CÂU 89 (CHÍNH THỨC – ĐH D2013 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm*** $M\left(\dfrac{-9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ ***là trung điểm của cạnh AB, điểm H(–2; 4) và điểm I(–1; 1) lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ đỉnh C.***



☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Tọa độ điểm C trong bài toán này có thể tìm theo hai hướng C = AC ∩ BC hoặc C = (C) ∩ AC trong đó (C) là đường tròn tâm I bán kính IA. Ta thấy đề bài đã gợi mở cho ta tâm I và tọa độ trung điểm của AB nên ta sẽ đi theo hướng này.

+ Dựa vào cách dựng tâm ngoại (giao điểm của 3 đường trung trực) → MI ⊥ AB → viết phương trình AB → tham số A theo AB và biểu diễn tọa độ B theo tọa độ A thông qua trung điểm M → 1 ẩn nên ta cần 1 phương trình ? → Liên hệ với dữ kiện cuối cùng chân đường cao H → AH ⊥ BH → giải tìm A và B

+ Khi đã có tọa độ A và B → lập phương trình đường tròn (C) và đường AC qua A, AC ⊥ BH.

► **Hướng dẫn giải: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{-7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Ta có AB qua M và AB ⊥ IM nên phương trình đường AB là: $\boxed{AB: 7x-y+33=0}$

* $A\in AB\Rightarrow A(a;7a+33)$.

Do M là trung điểm của AB nên $B(-a-9;-7a-30)$

Lại có HA ⊥ HB $\Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}=0\Leftrightarrow a^2+9a+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-4\\a=-5\end{array}\right.$

* Với a = –4 ⇒ $A(-4;5),B(-5;-2)$.

Ta có BH ⊥ AC nên AC có phương trình là : $AC: x+2y-6=0$.

Do đó $C(6-2c;c)$.

Mặt khác IC = IA suy ra $(7-2c)^2+(c-1)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\c=5\end{array}\right.$

Do C khác A nên ta nhận $\boxed{C(4;1)}$

* Với a = –5 ⇒ $A(-5;-2),B(-4;5)$.

Ta có BH ⊥ AC nên AC có phương trình là : $AC: 2x-y+8=0$.

Do đó $C(t;2t+8)$.

Mặt khác IC = IA suy ra $(t+1)^2+(2t+7)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-5\end{array}\right.$

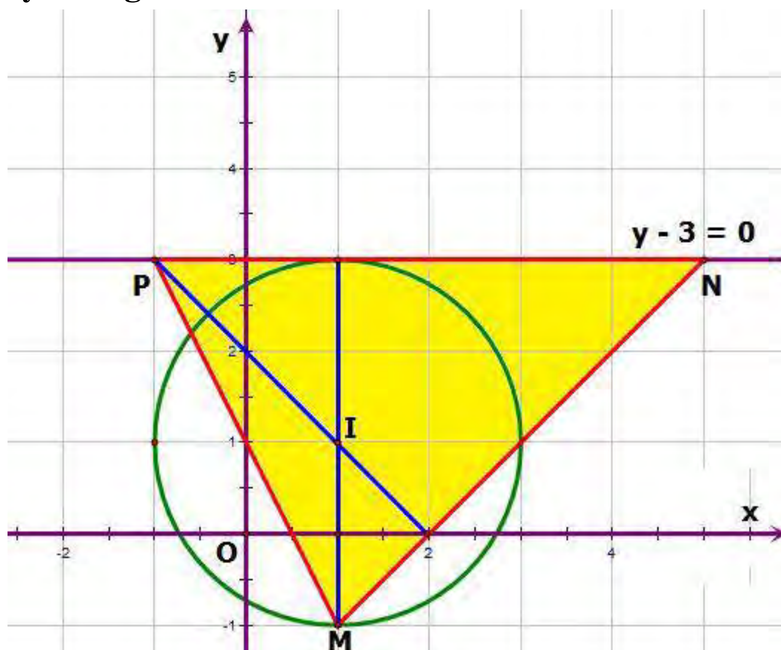
Do C khác A nên ta nhận $\boxed{C(-1;6)}$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là $\boxed{C(4;1)\ hay\ C(-1;6)}$

CÂU 90 (CHÍNH THỨC – ĐH D2013 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):*** $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ ***và đường thẳng***

Δ: y – 3 = 0. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Do ΔMNP nhận I làm trực tâm và M thuộc đường tròn (C) nên ta có IM ⊥ NP ⇒ dễ dàng tìm được tọa độ điểm M.

_ Mặt khác N thuộc Δ → tham số N theo Δ → biểu diễn tọa độ trung điểm MN theo N và cho thuộc (C) → tìm được N.

_ Để xác định tọa độ điểm P → P ∈ Δ và ta có IP ⊥ MN → giải tìm P.

► **Hướng dẫn giải : (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Đường tròn (C) có tâm I(1;1). D(ường thẳng IM ⊥ Δ nên có phương trình x = 1
  Do đó M có dạng M(1; m)

* Mặt khác do M ∈ (C) nên $(a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$ Do $M \notin \Delta$ nên ta nhận M(1; –1)

* N ∈ Δ ⇒ N(n; 3). Trung điểm của MN thuộc (C)

  Suy ra $\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right)^2 + (1-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-3 \end{array}\right.$

  Do đó N(5; 3) hoặc N(–3; 3)

* P ∈ Δ ⇒ P(p; 3)

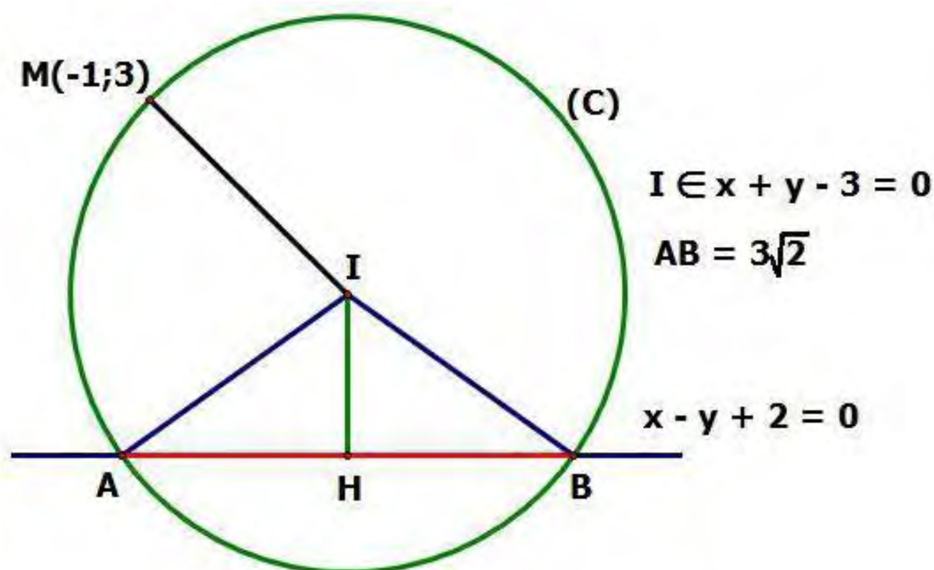
  Với N(5; 3), ta có $MP \perp IN \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{IN} = 0 \Leftrightarrow p = -1$. Do đó P(–1; 3)

  Với N(–3; 3), ta có $MP \perp IN \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{IN} = 0 \Leftrightarrow p = 3$. Do đó P(3; 3)

  Vậy tọa độ điểm P cần tìm là $\boxed{P(-1;3) \text{ hay } P(3;3)}$

CÂU 91 (CHÍNH THỨC – CĐ 2013 – PHẦN CƠ BẢN). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng d: $x + y - 3 = 0$, Δ: $x - y + 2 = 0$ và điểm M(–1 ;3). Viết phương trình đường tròn đi qua M, có tâm thuộc d, cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho AB =*** $3\sqrt{2}$

☺ **Nhận xét và ý tưởng:**



_ Ta có tâm I ∈ d → tham số hóa tâm I theo đường d → 1 ẩn nên cần 1 phương trình.

_ Ta liên hệ IM = IA trong đó $IA = \sqrt{IH^2 + AH^2}$, $IH = d[I;\Delta]$

→ giải phương trình tìm I → bán kính R = IM.

► **Hướng dẫn giải : (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Gọi (C) là đường tròn cần tìm và I là tâm của (C). Do I ∈ d ⇒ I(t; 3 – t)

* Gọi H là trung điểm AB, ta có $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và $IH = d[I;\Delta] = \dfrac{|2t-1|}{\sqrt{2}}$

* Do đó $IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5}$

* Ta có $IM = IA \Leftrightarrow \sqrt{2t^2 + 2t + 1} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5} \Leftrightarrow t = 1$

Do đó I(1; 2) và bán kinh R = IM = $\sqrt{5}$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là $\boxed{(C):(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5}$

CÂU 92 (CHÍNH THỨC – CĐ 2013 – PHẦN NÂNG CAO). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A(–3; 2) và có trọng tâm*** $G\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC đi qua điểm P(–2; 0). Tìm toạ độ các điểm B và C.

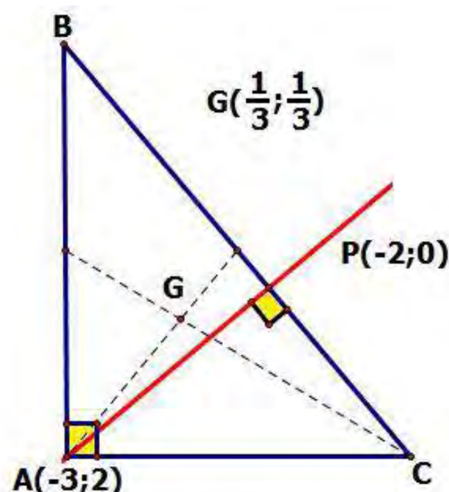
☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Dựa vào tính chất của trọng tâm ta dễ dàng tìm được trung điểm M của BC → viết phương BC qua M và vuông góc với AP.

_ Đến đây ta có hai hướng đi tiếp:

+ Hướng thứ 1: tham số hóa B theo BC và biểu diễn C theo B thông qua trung điểm M. Cuối cùng sử dụng điều kiện vuông góc của tam giác ABC → AB ⊥ AC → giải tìm B và C.

+ Hướng thứ 2: xét B và C trong sự tương giao giữa BC và đường tròn có tâm M, bán kính MA.



► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi M là trung điểm BC, ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow \boxed{M\left(2;\frac{-1}{2}\right)}$

Đường thẳng BC qua M và vuông góc AP có dạng là : $\boxed{BC: x-2y-3=0}$

* Ta có B ∈ BC ⇒ B(2b + 3; b). Do M là trung điểm BC ⇒ $C(1-2b;-1-b)$

* Ta có AB ⊥ AC ⇔ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ (*) với $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2b+6;b-2)\\ \overrightarrow{AC}=(4-2b;-b-3)\end{cases}$

Do đó

$$(*)\Leftrightarrow(2b+6)(4-2b)-(b-2)(b+3)=0\Leftrightarrow b^2+b-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2\\ b=-3\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm B và C cần tìm là $\boxed{B(7;2),C(-3;-3)\ hay\ B(-3;-3),C(7;2)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi M là trung điểm BC, ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow \boxed{M\left(2;\frac{-1}{2}\right)}$

Đường thẳng BC qua M và vuông góc AP có dạng là : $\boxed{BC: x-2y-3=0}$

* ΔABC vuông tại A nên B và C thuộc đường tròn tâm M bán kính $MA=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

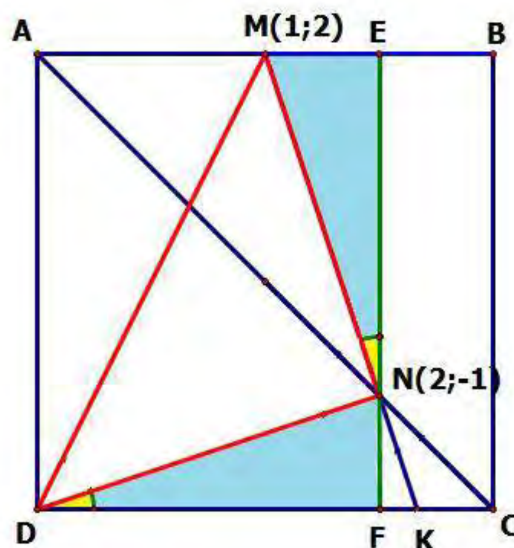
Tọa độ các điểm B và C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ (x-2)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{125}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, y=2 \\ x=-3, y=-3 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm B và C cần tìm là $\boxed{B(7;2), C(-3;-3)\ hay\ B(-3;-3), C(7;2)}$

CÂU 93 (CHÍNH THỨC – ĐH A2014). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN = 3NC. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng M(1; 2) và N(2; –1).***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**



_ Để lập phương trình đường thẳng CD ta có các hướng tư duy sau:

+ **Hướng thứ 1**: (tìm 2 điểm thuộc CD → viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm): Hiện tại CD chưa đi qua bất kì điểm cụ thể nào ? → Kéo dài điểm MN ∩ CD = K (kẻ đường phụ) theo định lý Thales thuận ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm K. Ta cũng phát hiện "dấu hiệu vuông góc" → ND ⊥ MN và MN = ND (việc chứng minh xin dành cho bạn đọc) → khi có tọa độ D kết hợp K → viết phương trình CD.

+ **Hướng thứ 2**: Tương tự hướng thứ 1 ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm K. Đến đây ta viết phương trình đường thẳng CD qua K và tạo góc với ND (trước đó ta chứng minh ND ⊥ MN và viết phương trình ND) ta có cos NDC = cos MNE (việc tính toán cụ thể xin dành cho bạn đọc).

+ **Hướng thứ 3**: (Đặt cạnh hình vuông AB = t > 0 → có thể dùng để chứng minh MN ⊥ ND hoặc tính độ dài các cạnh của hình vuông theo MN → Khi đó D thỏa mãn độ dài MD và DN. Đến đây ta có thể tìm tọa độ P = AC ∩ MD → rồi dùng quan hệ tỉ lệ giữa AP và AN → tìm tọa độ A. Lúc này CD qua D và nhận vecto AM làm vecto chỉ phương.

+ **Hướng thứ 4**: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT). Gọi I là trung điểm CD → bài toán chuyển về tìm tọa độ điểm I (do khi đó CD qua I và nhận IM làm vecto pháp tuyến). Như vậy ta có thể sử dụng theo hướng thứ 2 đặt cạnh AB =

t > 0 để quy tất cả các cạnh độ dài của hình vuông ABCD theo độ dài MN → từ đây tọa độ I thỏa mãn độ dài IN và IM.

Còn rất nhiều các cách khác nhau để giải bài toán hình vuông này. Trên đây chỉ mới là các cách giải tiêu biểu. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi K = MN ∩ CD, theo định lý Thales thuận ta có:

$$\frac{MN}{NK}=\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{KC}=3\Rightarrow \overrightarrow{NK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow \begin{cases} x_K-2=\frac{1}{3}(1) \\ y_K+1=\frac{1}{3}(-3) \end{cases}\Rightarrow \boxed{K\left(\frac{7}{3};-2\right)}$$

* Gọi d là đường thẳng qua N song song với AD, cắt AB, CD lần lượt tại E và F. Dễ dàng chứng minh được ΔMEN = ΔDNF ⇒ MN = DN và MN ⊥ DN

* Đặt tọa độ $D(a;b)$. Ta có $\begin{cases} MN^2=ND^2 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ND}=0 \end{cases}$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{MN}=(1;-3) \\ \overrightarrow{ND}=(a-2;b+1) \end{cases}$.

Do đó (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10=(a-2)^2+(b+1)^2 \\ a-2-3(b+1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 10=9(b+1)^2+(b+1)^2 \\ a-2=3(b+1) \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0,a=5 \\ b=-2,a=-1 \end{array}\right.$$

Nên $D(5;0)$ *hay* $D(-1;-2)$

* TH1: $D(5;0),K\left(\frac{7}{3};-2\right)$ suy ra phương trình CD là $\boxed{3x-4y-15=0}$

* TH2: $D(-1;-2),K\left(\frac{7}{3};-2\right)$ suy ra phương trình CD là $\boxed{y+2=0}$

Vậy phương trình đường CD cần tìm là $\boxed{y+2=0 \text{ hay } 3x-4y-15=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 2: Đặt cạnh hình vuông AB = a > 0**

* Xét $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN})=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DA}+AN^2$

$$=0+MA.AN.\cos(135^o)+AN.DA.\cos(135^o)+AN^2$$

$$=\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{3a\sqrt{2}}{4}.a\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2=0$$

Suy ra MN ⊥ DN

* Gọi K = MN ∩ CD, theo định lý Thales thuận ta có:

$$\frac{MN}{NK}=\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{KC}=3\Rightarrow \overrightarrow{NK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow \begin{cases} x_K-2=\frac{1}{3}(1) \\ y_K+1=\frac{1}{3}(-3) \end{cases}\Rightarrow \boxed{K\left(\frac{7}{3};-2\right)}$$

* Ta có

$$\cos\angle NDF=\cos\angle MNE=\frac{EN}{MN}=\frac{EN}{\sqrt{ME^2+EN^2}}=\frac{\frac{3a}{4}}{\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{9a^2}{16}}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\ (*)$$

Gọi $\vec{n}=(a;b)\ (a^2+b^2>0)$, $\overrightarrow{MN}=(1;-3)$ lần lượt là vecto pháp tuyến của CD và ND

$$(*)\Leftrightarrow |\cos(\vec{n};\overrightarrow{MN})|=\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow (a-3b)^2=9(a^2+b^2)$$

Suy ra $(a-3b)^2=9(a^2+b^2)\Leftrightarrow 8a^2+6ab=0$ (nhận xét b khác 0 nên ta chọn b = 4

Khi đó ta có a = 0, a = –3 suy ra $\vec{n}=(-3;4)$ hay $\vec{n}=(0;4)$

Vậy phương trình đường CD cần tìm là $\boxed{y+2=0\ hay\ 3x-4y-15=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Đặt AB = a > 0 suy ra $\begin{cases} MN^2=ME^2+EN^2 \\ ND=MN \\ MD^2=AD^2+AM^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ ND^2=10 \\ MD^2=20 \end{cases}$

* Đặt tọa độ $D(a;b)$. Ta có $\begin{cases} ND^2=10 \\ MD^2=20 \end{cases}$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{MD}=(a-1;b-2) \\ \overrightarrow{ND}=(a-2;b+1) \end{cases}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 10=(a-2)^2+(b+1)^2 \\ 20=(a-1)^2+(b-2)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, a=5 \\ b=-2, a=-1 \end{array}\right.$

Nên $D(5;0)\ hay\ D(-1;-2)$

* Gọi P = AC ∩ MD, theo định lý Thales thuận ta có:

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PM}{PD}=\frac{AM}{CD}=\frac{1}{2}\Rightarrow \overrightarrow{MP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}\ (1) \text{ và } \begin{cases} PA=\frac{AC}{3} \\ \frac{PN}{AC}=\frac{NA-PA}{AC}=\frac{\frac{3AC}{4}-\frac{AC}{3}}{AC}=\frac{5}{12} \end{cases}\Rightarrow \frac{PA}{PN}=\frac{4}{5}$$

Suy ra $\overrightarrow{PA} = \frac{-4}{5}\overrightarrow{PN}$ (2)

* TH1: với D(5; 0) từ (1) suy ra $P\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$. Từ (2) suy ra $\boxed{A\left(\frac{13}{5};\frac{16}{5}\right)}$

Do đó $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right) = \frac{2}{5}(4;3)$

Đường CD qua D(5; 0) nhận $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right) = \frac{2}{5}(4;3)$ làm vecto chỉ phương có dạng là: $\frac{x-5}{4} = \frac{y-0}{3} \Leftrightarrow \boxed{AD: 3x-4y-15=0}$

* TH1: với D(–1; –2) từ (1) suy ra $P\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Từ (2) suy ra $\boxed{A(-1;2)}$

Do đó $\overrightarrow{MA} = (-2;0) = -2(1;0)$

Đường CD qua D(–1; –2) có dạng là $\boxed{AD: y+2=0}$

Vậy phương trình đường CD cần tìm là $\boxed{y+2=0 \text{ hay } 3x-4y-15=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 4: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Ta có $MN = \sqrt{10}$. Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ABCD, a > 0.

Ta có $AM = \frac{a}{2}, AN = \frac{3AC}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Nên $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\angle MAN = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow \frac{5a^2}{8} = 10$, nghĩa là a = 4.

* Gọi I(x ; y) là trung điểm CD. Ta có IM = AD = 4 và $IN = \frac{BD}{4} = \sqrt{2}$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=16\\(x-2)^2+(y+1)^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=-2\\x=\frac{17}{5}, y=\frac{-6}{5}\end{array}\right.$

* Với x = 1, y = – 2, ta có $I(1;-2)$ và $\overrightarrow{IM} = (0;4)$.

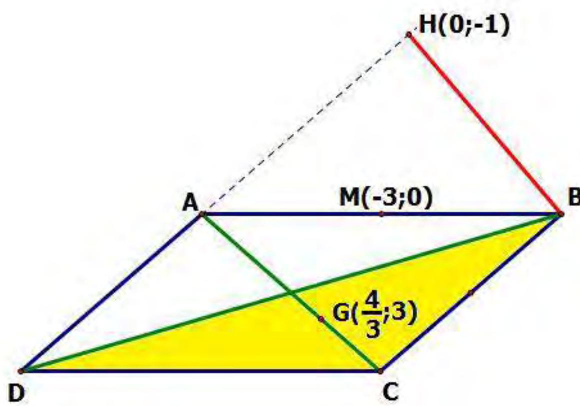
Đường thẳng CD qua I và có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (0;4)$ nên có phương trình là: $\boxed{AD: y+2=0}$

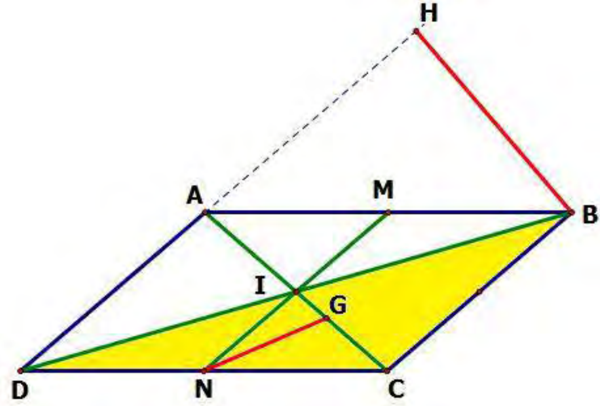
* Với $x=\frac{17}{5}, y=\frac{-6}{5}$, ta có $I\left(\frac{17}{5};\frac{-6}{5}\right)$ và $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{-12}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Đường thẳng CD qua I và có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{-12}{5};\frac{6}{5}\right)$ nên có phương trình là: $\boxed{AD: 3x-4y-15=0}$

Vậy phương trình đường CD cần tìm là $\boxed{y+2=0 \text{ hay } 3x-4y-15=0}$

CÂU 94 (CHÍNH THỨC – ĐH B2014). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD. Điểm M(–3; 0) là trung điểm của cạnh AB, điểm H(0; –1) là hình chiếu vuông góc của B trên AD và trọng tâm của tam giác BCD là $G\left(\frac{4}{3};3\right)$. Tìm tọa độ các điểm B và D.***





► Hướng dẫn giải cách 1:

* Gọi $B(a;b)$ và N là trung điểm CD.

* Ta có $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ với $\begin{cases}\overrightarrow{BG}=\left(\frac{4}{3}-a;3-b\right)\\ \overrightarrow{BN}==\left(x_N-a;y_N-b\right)\end{cases}$. Do đó $N\left(\frac{4-a}{2};\frac{9-b}{2}\right)$.

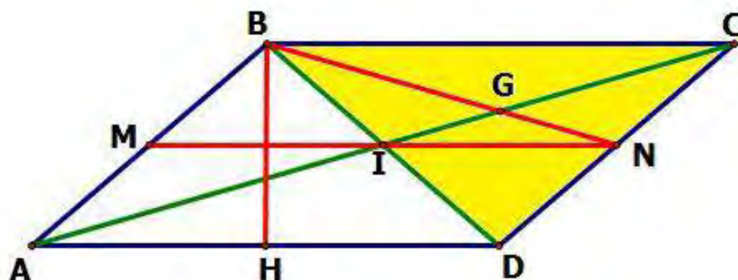
* Mặt khác $\begin{cases}BM=HM\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BH}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a+3)^2+b^2\\ \frac{10-a}{2}.a+\frac{9-b}{2}(1+b)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0,b=-1\\ a=-2,b=3\end{array}\right.$

* Với a = 0, b = –1, ta có B(0 ; –1) loại vì trùng với H.

* Với a = –2,b = 3, ta có B(–2; 3). Gọi I = AC ∩ BD ⇒ $I\left(0;\frac{3}{2}\right)$ suy ra D(2; 0)

Vậy tọa độ điểm B và D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;3), D(2;0)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Gọi A(a; b) ta có :

$$\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{GI}\Leftrightarrow\begin{cases}a-\dfrac{4}{3}=4(x_I-\dfrac{4}{3})\\ b-3=4(y_I-3)\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{a}{4}+1;\dfrac{b}{4}+\dfrac{9}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MI}=\left(\dfrac{a}{4}+4;\dfrac{b}{4}+\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{1}{16}(a+16;b+9)$$

* Do M là trung điểm AB

$\Rightarrow B(-6-a;-b)\Rightarrow\overrightarrow{HB}=(-6-a;-b+1),\ \overrightarrow{MA}=(a+3;b)$

Ta có: $\begin{cases}MA=MH\\ MI\perp HB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)^2+b^2=10\\ (a+16)(-a-6)+(b+9)(-b+1)=0\end{cases}$ (phần giải hệ này xin dành cho bạn đọc)

Suy ra $\left[\begin{array}{l}a=-6;b=1\Rightarrow B(0;-1)\\ a=-4,b=-3\Rightarrow B(-2;3)\end{array}\right.$

Loại B (0;–1) do trùng H nên ta nhận **B(–2; 3)**

Suy ra $I\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ suy ra D(2; 0)

Vậy tọa độ điểm B và D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;3),D(2;0)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Giả sử $B(x;y)$. Vì M là trung điểm AB nên $A(-6-x;-y)$

* Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GC}\Rightarrow C\left(\dfrac{x+10}{2};\dfrac{y+9}{2}\right)$

Vì G là trọng tâm ΔBCD nên $D\left(\dfrac{-3x-2}{2};\dfrac{-3y+9}{2}\right)$

* Do H là hình chiếu của B trên AD nên:

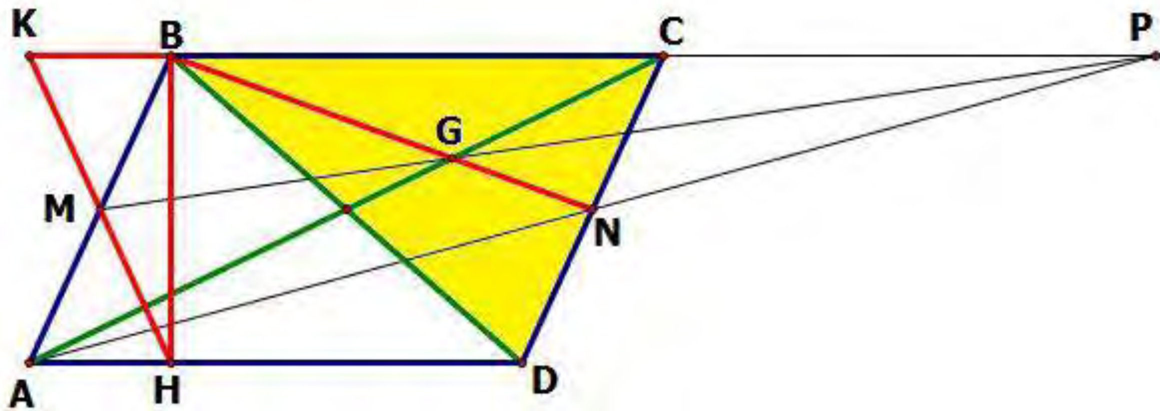
$\begin{cases} BH \perp HA \\ BH \perp HD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HA} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 + 2x - 8y - 11 = 0 \end{cases}$ (phần giải tiếp xin dành cho bạn đọc)

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 0, y = -1 \Rightarrow B(0-1) \equiv H(0;-1)(ktm) \\ x = -2; y = 3 \Rightarrow \boxed{B(-2;3)} \end{array}\right.$

* Do B(–2; 3) suy ra D(2;0).

Vậy tọa độ điểm B và D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;3), D(2;0)}$

► **Hướng dẫn giải cách 4:**



* Gọi K là điểm đối xứng của H qua M nên K thuộc BC và K(–6; 1).

P = AN ∩ BC thì G là trọng tâm ΔPAB $\Rightarrow \overrightarrow{GP} = 2\overrightarrow{MG} \Rightarrow \boxed{P(10;9)}$

* BC qua K(–6; 1) và có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{KP} = (16;8) = 8(2;1)$ nên BC có phương trình: $\dfrac{x+6}{2} = \dfrac{y-1}{1} \Leftrightarrow \boxed{BC: x - 2y + 8 = 0}$

* HB qua H và vuông góc BC nên $2(x-0) + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{HB: 2x + y + 1 = 0}$

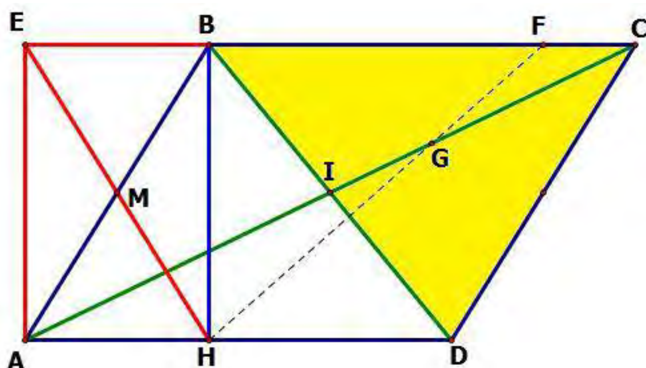
Lại có B = BC ∩ HB

$\Rightarrow$ Tọa độ B thỏa hệ $\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2;3)}$

* Ta có C là trung điểm BP ⇒ C(4 ; 6). G là trọng tâm ΔBCD ⇒ D(2 ; 0)

Vậy tọa độ điểm B và D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;3), D(2;0)}$

► **Hướng dẫn giải cách 5: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**



* Gọi E và F lần lượt là giao điểm HM và HG với BC. Suy ra $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HE}$ và $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GF}$

Do đó E(–6; 1) và F(2; 5).

* BC qua E và có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{EF}$ nên BC có phương trình:

$\boxed{BC: x - 2y + 8 = 0}$

Và BH: 2x + y + 1 = 0

Lại có B = BC ∩ HB ⇒ Tọa độ B thỏa hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2;3)}$$

* Do M là trung điểm AB nên A(–4; –3).

Gọi I là giao điểm của AC và BD suy ra $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{GI} \Rightarrow I\left(0;\frac{3}{2}\right)$

* I là trung điểm BD nên D(2; 0)

Vậy tọa độ điểm B và D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;3), D(2;0)}$

■ **Lời bình**: Những năm gần đây, câu hỏi Oxy trong các đề thi đã được trau chuốt hơn, có tính phân loại cao, đòi hỏi sự tư duy và sáng tạo nhiều hơn ở học sinh. Không dừng lại ở 1 hay 2 cách giải mà tự thân trong một bài toán cũng ngầm ẩn rất nhiều hướng khám phá. Ở đây có cách giải tự nhiên, chân phương đầy tính "bình dân", cũng có những cách giải hoa mỹ, đậm chất kỹ thuật, đầy tính "quý tộc". Tùy vào khả năng lĩnh hội và tri thức sẵn có của mỗi người mà có cách tiếp cận khác nhau cho lời giải bài toán trên.

CÂU 95 (CHÍNH THỨC – ĐH D2014). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm D(1; –1). Đường thẳng AB có phương trình 3x + 2y – 9 = 0, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC.***

► **Hướng dẫn giải cách 1: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Tọa độ A thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 3x+2y-9=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;3)}$

* Gọi d là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

E là giao điểm của d và đường thẳng BC (do AD không vuông góc d nên E luôn tồn tại) và ta có thể giả sử $EB < EC$.

Ta có $\angle EAB = \angle ACB$ và $\angle BAD = \angle DAC$,

Suy ra $\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle ACB + \angle DAC = \angle ADE$

Suy ra ΔADE cân tại E.

* E là giao điểm d và trung trực của đoạn AD nên tọa độ E thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y-7=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(5;1)}$

* Đường thẳng BC đi qua E nhận $\overrightarrow{DE} = (4;2) = 2(2;1)$ làm vecto chỉ phương nên BC: x – 2y – 3 = 0

Vậy phương trình đường thẳng BC cần tìm là $\boxed{BC: x-2y-3=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 2: (sử dụng kỹ thuật đường phụ)**

* Tọa độ A thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 3x+2y-9=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;3)}$

Phương trình đường AD: x – 1 = 0, do đó BC có hệ số góc k.

BC: y + 1 = k(x – 1) ⇒ kx – y – k – 1 = 0

* Đường thẳng qua D và vuông góc AD, cắt AB, AC lần lượt tại M, N

⇒ MN: y + 1 = 0

Tọa độ M thỏa $\begin{cases} 3x+2y-9=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{3} \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\dfrac{11}{3};-1\right)}$

D là trung điểm MN ⇒ $N\left(\dfrac{-5}{3};-1\right)$

⇒ AC qua A nhận $\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{-8}{3};-4\right)=\dfrac{-4}{3}(2;3)$ làm vecto chỉ phương

⇒ $\boxed{AC:3x-2y+3=0}$

* Ta có cos(AC; BC) = cos(AB; d)

$\Leftrightarrow \dfrac{|3k+2|}{\sqrt{13}\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow 4k^2-60k+29=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{1}{2} \\ k=\dfrac{29}{2} \end{array}\right.$

* Với $k=\dfrac{1}{2} \Rightarrow BC:x-2y-3=0$ thì $B(3;0),C(-3;-3)$ (nhận vì B, C khác phía đối với D)

* Với $k=\dfrac{29}{2} \Rightarrow BC:29x-2y-31=0$ thì $B(\dfrac{5}{4};\dfrac{21}{8}),C(\dfrac{17}{13};\dfrac{45}{13})$ (loại vì B, C khác phía đối với D)

Vậy phương trình đường thẳng BC cần tìm là $\boxed{BC:x-2y-3=0}$

► **Hướng dẫn giải cách 3: (sử dụng kẻ đường phụ)**

* Kéo dài AD cắt đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC tại M và AK là đường kính của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

* Tọa độ A thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 3x+2y-9=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;3)}$

* Viết phương trình AK ⊥ d → phương trình AK → K ∈ AK → tọa độ I theo K

* Viết phương trình AD → M ∈ AD
* Ta có: $\begin{cases} IM = IA \\ KM \perp AD \end{cases}$ → giải tìm tọa độ K và M. Khi đó BC qua trung điểm MI và nhận $\overrightarrow{MI}$ làm vecto pháp tuyến.

Vậy phương trình đường thẳng BC cần tìm là $\boxed{BC: x - 2y - 3 = 0}$

CÂU 96 (CHÍNH THỨC – CĐ 2014). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(–2 ; 5) và đường thẳng d: 3x – 4y + 1 = 0. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho AM = 5.***

► Hướng dẫn giải:

* Đường thẳng d có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -4)$
* Đường thẳng Δ cần viết phương trình đi qua A và nhận $\vec{n} = (3; -4)$ làm vecto chỉ phương, nên: $4(x+2) + 3(y-5) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 4x + 3y - 7 = 0$
* M ∈ d suy ra $M\left(m; \dfrac{3m+1}{4}\right)$
* AM = 5 ⇔ $(m+2)^2 + \left(\dfrac{3m+1}{4} - 5\right)^2 = 25 \Rightarrow m = 1$

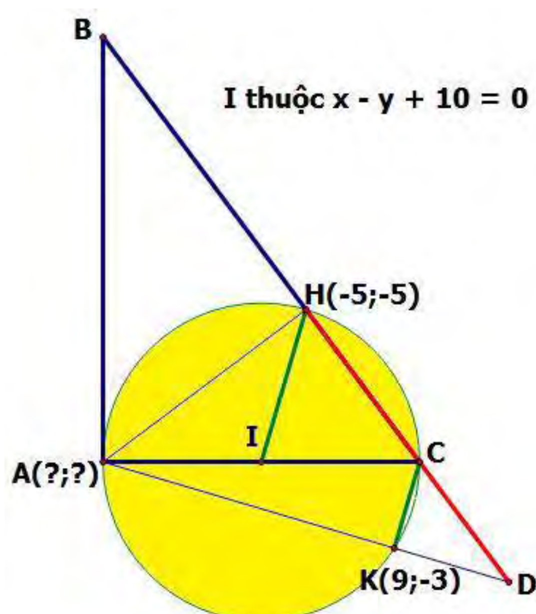
Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M(1;1)}$

CÂU 97 (KÌ THI THPT QUỐC GIA 2015 – ĐỀ CHÍNH THỨC). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử*** $H(-5;-5), K(9;-3)$ ***và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng*** $x - y + 10 = 0$***. Tìm tọa độ điểm A.***

☺**Nhận xét và ý tưởng:**

_ Có thể thấy "hình vẽ" chính là điểm tựa để ta giải quyết bài toán này, do đó việc vẽ "chính xác" hình vẽ có ý nghĩa quan trọng vì hình vẽ giúp ta "phát hiện các tính chất hình học quan trọng". Cụ thể trong bài này, AHCK chính là tứ giác nội tiếp, và IH ⊥ AK. Và bài toán cũng từ đó mà được phân tích theo các hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**: Chứng minh AHCK là tứ giác nội tiếp → IH = IK và I ∈ d



→ tìm tọa độ I. Để chứng minh IH ⊥ AK → ta có thể chứng minh IH // CK (do CK // AD) (phần chứng minh này xin dành cho bạn đọc). → Khi đó A thỏa mãn A thuộc đường tròn đường kính AC và đường thẳng AK.

+ **Hướng thứ 2**: Tương tự hướng thứ 1, ta tìm tọa độ điểm I, để chứng minh IH ⊥ AK → ta gắn hệ trục tọa độ Axy và chứng minh $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IH}=0$ → Khi đó A thỏa mãn A thuộc đường tròn đường kính AC và đường thẳng AK.

+ **Hướng thứ 3**: Tương tự hướng thứ 1, ta tìm tọa độ điểm I, đến đây ta có thể đặt A(x; y) → 2 ẩn nên cần 2 phương trình → pt (1) là IA = IH, pt (2) là AH = HK (ta phải chứng minh ΔAHK cân tại H).

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Ta có $\angle AHC=\angle CKA=90^o \Rightarrow \angle AHC+\angle CKA=180^o$

⇒ tứ giác AHCK nội tiếp.

Gọi I là trung điểm AC ⇒ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK

⇒ IK = IH (*)

Mặt khác I ∈ d: x – y + 10 = 0 ⇒ $I(t;t+10)$.

Do đó

$(*)\Leftrightarrow HI^2=KI^2\Leftrightarrow (t+5)^2+(t+15)^2=(t-9)^2+(t+13)^2\Leftrightarrow t=0\Rightarrow \boxed{I(0;10)}$

* ΔABD cân tại A (do AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến)

$\Rightarrow \angle ABD=\angle BDA$

Mặt khác $\begin{cases}\angle ABD+\angle BCA=90^o\\ \angle DBA+\angle DCK=90^o\end{cases}\Rightarrow \angle BCA=\angle DCK$.

Mà $\angle CHI=\angle HCI$ (do ΔIHC cân tại I)

Suy ra $\angle CHI=\angle KCD$ ⇒ KC // IH (đồng vị) mà CK ⊥ AD ⇒ $\boxed{IH\perp AD}$

* Đường AD qua K(9; – 3) nhận $\overrightarrow{IH}=(-5;-15)=-5(1;3)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là: $1(x-9)+3(y+3)=0\Leftrightarrow \boxed{AD: x+3y=0}$

* A là giao điểm AD và đường tròn đường kính AC nên tọa độ A thỏa mãn hê:

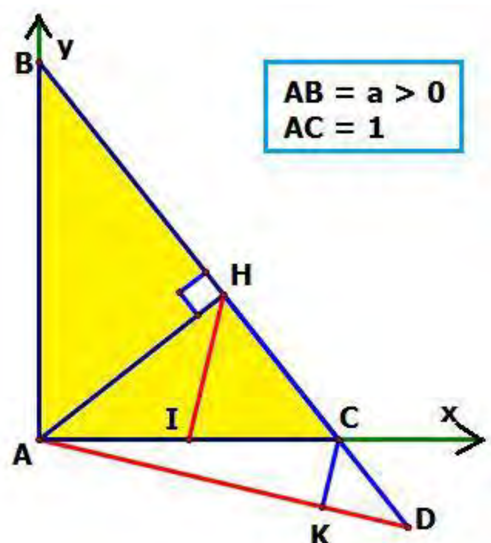
$$\begin{cases}x+3y=0\\ x^2+(y-10)^2=250\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \Rightarrow x = -15 \\ y = -3 \Rightarrow x = 9 \end{array} \right.$$

Suy ra A(–15;5) hay A(9;–3) (loại vì trùng K)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Ta có $\angle AHC = \angle CKA = 90^o$

$\Rightarrow \angle AHC + \angle CKA = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác AHCK nội tiếp.

Gọi I là trung điểm AC

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK $\Rightarrow$ IK = IH (*)

Mặt khác I $\in$ d: x – y + 10 = 0

$\Rightarrow I(t;t+10)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow HI^2 = KI^2$

$\Leftrightarrow (t+5)^2 + (t+15)^2 = (t-9)^2 + (t+13)^2 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$

* Đặt AB = a, AC = 1. Dựng hệ trục Axy như hình vẽ.

Ta có $A(0;0), B(0;a), C(1;0)$

Ta có

$$BH.BC = AB^2 \Leftrightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{a^2}{a^2+1} \Rightarrow \overrightarrow{BH} = \frac{a^2}{a^2+1}\overrightarrow{BC} \Rightarrow H\left(\frac{a^2}{a^2+1};\frac{a}{a^2+1}\right)$$

Ta có H là trung điểm BD

$$\Rightarrow D\left(\frac{2a^2}{a^2+1};\frac{-a^3+a}{a^2+1}\right) \text{ và } I\left(\frac{1}{2};0\right) \text{ là tung điểm AC.}$$

$$\text{Nên } \begin{cases} \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{a^2-1}{2(a^2+1)};\dfrac{a}{a^2+1}\right) \\ \overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{2a^2}{a^2+1};\dfrac{-a^3+a}{a^2+1}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Xét } \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2(a^2-1)+a(-a^3+a)}{(a^2+1)^2} = 0 \Rightarrow IH \perp AD$$

* Đường AD qua K(9; – 3) nhận $\overrightarrow{IH} = (-5;-15) = -5(1;3)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là: $1(x-9)+3(y+3)=0 \Leftrightarrow \boxed{AD: x+3y=0}$

* A là giao điểm AD và đường tròn đường kính AC nên tọa độ A thỏa mãn hệ:
$\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+(y-10)^2=250 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \Rightarrow x=-15 \\ y=-3 \Rightarrow x=9 \end{array}\right.$ suy ra A(–15;5) hay A(9;–3) (loại vì trùng K)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3:**

* Ta có $\angle AHC = \angle CKA = 90^o \Rightarrow \angle AHC + \angle CKA = 180^o \Rightarrow$ tứ giác AHCK nội tiếp.

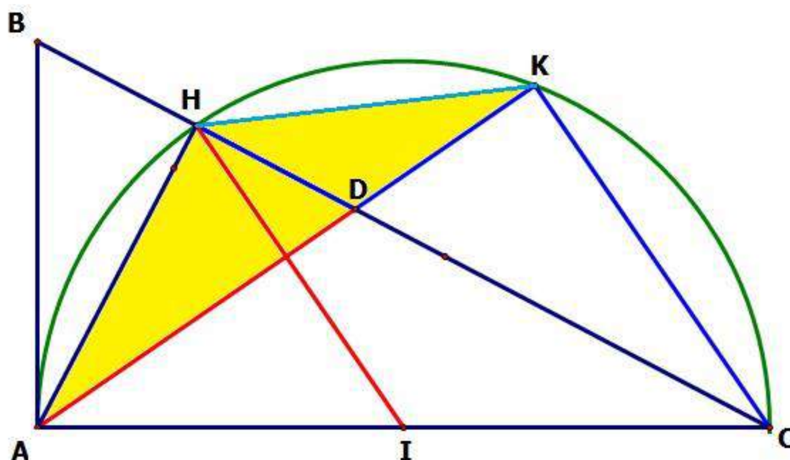
Gọi I là trung điểm AC $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác AHCK

$\Rightarrow$ IK = IH (*)

Mặt khác I ∈ d: x – y + 10 = 0 $\Rightarrow I(t;t+10)$.

Do đó

$(*) \Leftrightarrow HI^2 = KI^2 \Leftrightarrow (t+5)^2+(t+15)^2=(t-9)^2+(t+13)^2 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$



* Xét đường tròn nội tiếp tứ giác AHKC ta có

$\angle AKH = \angle ACH = \angle HAB = \angle HAD \Rightarrow \Delta AHK$ cân tại H

Suy ra AH = HK.

Đặt A(x; y) ta có A thỏa mãn

$\begin{cases} x^2+(y-10)^2=250 \\ (x-5)^2+(y+5)^2=250 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \Rightarrow x=-15 \\ y=-3 \Rightarrow x=9 \end{array}\right.$

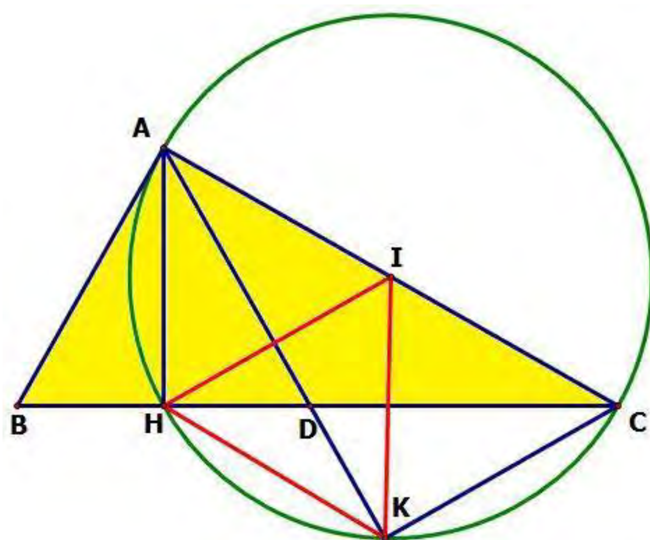
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

► **Hướng dẫn giải cách 4: (theo đáp án của Bộ GD&ĐT)**

* Gọi I là trung điểm AC ta có $IH = IK = \dfrac{AC}{2}$ nên I thuộc đường trung trực của HK.
Đường trung trực HK có phương trình $7x + y - 10 = 0$ nên toa độ I thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ 7x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(0;10)}$$



* Ta có $\angle HKA = \angle HCA = \angle HAB = \angle HAD$ nên ΔAHK cân tại H, suy ra HA = HK mà MA = MK nên A đối xứng với K qua MH. Ta có $\overrightarrow{MH} = (5;15) = 5(1;3)$.
Đường thẳng MH có phương trình: $3x - y + 10 = 0$

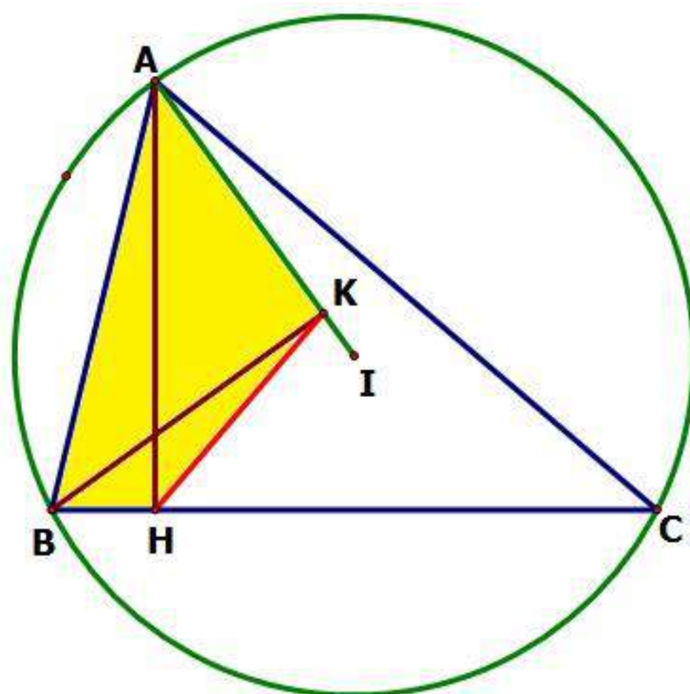
* Trung điểm AK thuộc MH và AK ⊥ MH nên A thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} (x-9) + 3(y+3) = 0 \\ 3\left(\dfrac{x+9}{2}\right) - \left(\dfrac{y-3}{2}\right) + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-15;5)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-15;5)}$

CÂU 98 (KÌ THI THPT QUỐC GIA 2015 – ĐỀ DỰ BỊ). ***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, K là hình chiếu vuông góc của B trên AI. Giả sử*** $A(2;5), I(1;2)$, ***điểm B thuộc đường thẳng*** $3x + y + 5 = 0$, ***đường thẳng HK có phương trình*** $x - 2y = 0$. ***Tìm tọa độ các điểm B, C.***

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có B thuộc đường tròn tâm I bán kính IA và đường thẳng d: 3x + y + 5 = 0 nên thỏa hệ: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=10\\ 3x+y+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2;1)}$

* Ta có H ∈ HK ⇒ $H(2h;h)$ và $\overrightarrow{AH}=(2h-2;h-5), \overrightarrow{BH}=(2h+2;h-1)$.
Lại có AH ⊥ BH

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}=0 \Leftrightarrow (2h-2)(2h+2)+(h-5)(h-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}h=1\\ h=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$$

Do đó ta có : $H(2;1)$ hay $H\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

* Với $H\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)$ ta có $\overrightarrow{AI}=(-1;-3)$, $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{-8}{5};\dfrac{-24}{5}\right)=\dfrac{8}{5}(-1;-3)$ nên ba điểm A, H, I thẳng hàng hay tam giác này cân tai A (không thỏa mãn) nên ta loại $H\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)$ và nhận $\boxed{H(2;1)}$

* Phương trình đường BC khi đó là y – 1 = 0 và C là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA và BC nên tọa độ C thỏa hệ:
$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=10\\ y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2, y=1\\ x=4, y=1\end{array}\right.$. Do B(–2;1) nên ta nhận $\boxed{C(4;1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;1), C(4;1)}$